ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ

Νοέμβριος 2020

ΓΕΛ Ν. Αγιονερίου Κιλκίς

https://eclass.sch.gr/courses/2663010132/

$x \to x_0$

Δ. Όριο άρρητης (0/0) με ριζικά διαφόρων τάξεων ή παραστάσεις όπου απαιτείται διάσπαση. Προσοχή, τα όρια στα οποία θα «σπάσουμε» το αρχικό, πρέπει να διατηρούν τη μορφή (0/0).

1. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+6}+\sqrt{x+2}-6}{x^2-4}$ 2. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt[3]{1-7x}}{x+1}$ 3. $\lim_{x\to -2}\frac{\overset{3}{\sqrt{7-x}}-\overset{2}{\sqrt[3]{6-x}}-1}{x^2+2x}$ (απ: 7/32, 1/3, 1/24)

$$\frac{\overset{3}{\sqrt{7-(-2)}}-\overset{2}{\sqrt[3]{6-(-2)}}-1}{(-2)^2+2\cdot(-2)}=\frac{3-2-1}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{b}=\frac{\alpha-b}{\sqrt[3]{\alpha}^2+\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}^2}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-3+2-\sqrt[3]{6-x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-3}{x^2+2x}\cdot\frac{\sqrt{7-x}+3}{\sqrt{7-x}+3}+\frac{\overset{\sqrt[3]{8}}{\overset{\shortparallel}{2}}-\sqrt[3]{6-x}}{x^2+2x}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{7-x-9}{(x^2+2x)(\sqrt{7-x}+3)}+\frac{8-(6-x)}{(\sqrt[3]{8}^2+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{6-x}+\sqrt[3]{6-x}^2)(x^2+2x)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}\cdot(\underbrace{\sqrt{7-x}}_{3}+3)}+\frac{\cancel{2+x}}{(\underbrace{\ldots\ldots}_{2^3})\,x\cancel{(x+2)}}=\frac{-1}{-2\cdot 6}+\frac{1}{(\underbrace{4+4+4}_{12})(-2)}$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=\frac{1}{24}\ \checkmark$$

$\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)\boxed{\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2}$ >0, $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\boxed{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ >0

$x \to x_0$

ΣΤ. Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή, όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο μηδενίζεται. Ελέγχουμε μήπως ο όρος που μηδενίζεται με το απόλυτο, μπορεί να βγει κοινός παράγοντας σε αριθμητή και παρονομαστή. Αν όχι, φτιάχνουμε πινακάκια για το πρόσημο των παραστάσεων που μηδενίζονται και παίρνουμε πλευρικά όρια.

1. $\lim_{x\to 3}\frac{|x^2+x-12|}{|2x^2-5x-3|}$ 2. $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|^3+x+1}{|x^2+5x+4|}$ 3. $\lim_{x\to -2}\frac{|x^2+x-2|-|x^3+8|}{|x^2-4|}$ (απ: 1, -1/3 και 1/3 δεν υπάρχει, -9/4)

$$\lim_{x\to -2}\frac{|x^2+x-2|-|x^3+8|}{|x^2-4|} = \frac{|(-2)^2-2-2|-|(-2)^3+8|}{|(-2)^2-4|} = \frac{0-0}{0}$$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)\cdot(\underbrace{x^2+2x+4}_{>0})$

$x^2-4=(x+2)(x-2)$

x		-2		1		2	
$x^2+x-2 = f(x)$	+	0	−	0	+		+
$x^3+8 = g(x)$	−	0	+		+		+
$x^2-4 = h(x)$	+	0	−		−	0	+

-2^-, -2^+

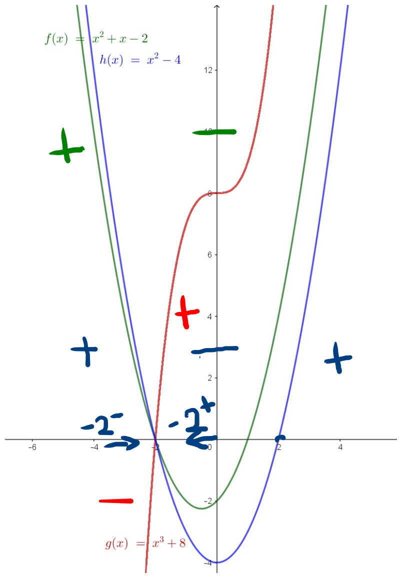
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{-(x^2+x-2)-(x^3+8)}{-(x^2-4)} = \frac{-x^2-x+2-x^3-8}{-(x+2)(x-2)} = \frac{+x^3+x^2+x+6}{+(x+2)(x-2)}$$

Άρα $\lim_{x\to -2^+}\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x^2-x+3)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{4+2+3}{-2-2} = -\frac{9}{4}$

1	1	1	6	-2
	-2	2	-6	
1	-1	3	0	

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{(x^2+x-2)-(-(x^3+8))}{x^2-4} = \dots = -\frac{9}{4}$$

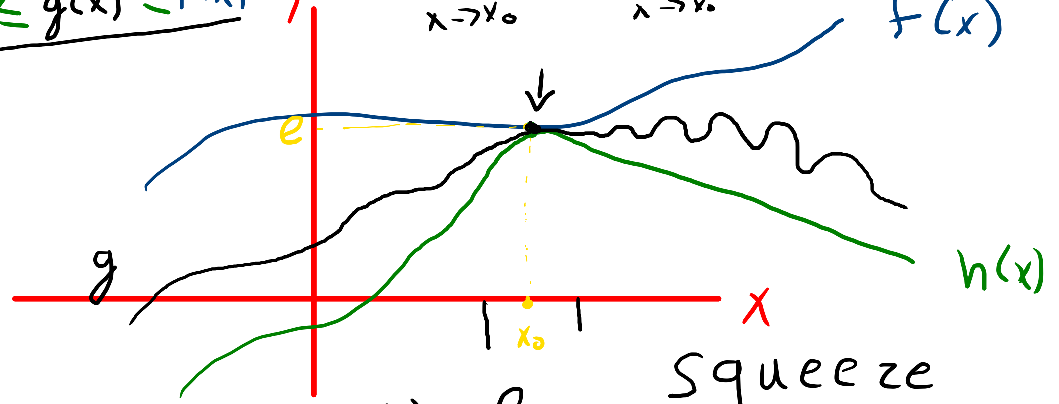
$$\lim_{x\to -2} = -\frac{9}{4}$$



Κριτήριο Παρεμβολής

(1) $h(x) \le g(x) \le f(x)$

(2) αν $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ✓



ΤΟΤΕ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

squeeze theorem

$\lim\limits_{x\to 0} \underline{x\cdot \text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

$\left|x\cdot\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\cdot \overset{\le 1}{\left|\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)\right|}$

$\left|x\cdot\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \underbrace{|x|\cdot 1}_{\theta}$

(1) $\underbrace{\overset{\to 0}{-|x|}}_{h} \le \underbrace{\overset{\to 0}{x\cdot\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}}_{g} \le \underbrace{\overset{\to 0}{|x|}}_{f}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim\limits_{x\to 0}|x|$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

αν $|x| \le \theta$
τότε $-\theta \le x \le \theta$

$\boxed{\text{μηδενική} \cdot \text{φραγμένη}}$

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

$-1 \le \text{ημ}A \le 1 \to$ φραγμένη

π.χ. ΦΡΑΓΜΕΝΟΝ f

$-1 \le f(x) = \text{ημ}x \le 1$ $\quad 0 \le \text{ημ}^2 x \le 1$

$-1 \le \text{συν}x \le 1$ $\quad 0 \le \text{συν}^2 x \le 1$

$\underline{\text{ημ}(g(x))}$, $\text{ημ}(x^{2020})$

$-1 \le \text{ημ}(\ln|x^2+1|) \le 1$

$$\boxed{-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1}$$

Ζ.1. αν $3x \leq f(x) - x^2 + 2x \leq 5x - 4$ (με $+x^2-2x$ σε κάθε μέλος)

βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

$\underbrace{x^2+x}_{\to 6} \leq \underset{\to 6}{f(x)} \leq \underbrace{x^2+3x-4}_{\to 6}$

$\lim_{x\to 2} x^2+x = 2^2+2 = 6.$

$\lim_{x\to 2} x^2+3x-4 = 2^2+3\cdot 2-4 = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 6.$

Ζ.2 αν $\left|\dfrac{f(x)-2x+1}{x-3}\right| \leq x^2+2$, $\lim_{x\to 3} f(x)$;

$|x-3| \cdot \dfrac{|f(x)-2x+1|}{|x-3|} \leq (x^2+2)\cdot|x-3|$

$|f(x)-2x+1| \leq \underbrace{(\overset{>0}{x^2+2})\cdot|\overset{>0}{x-3}|}_{\theta}$

αν $|\alpha| \leq \theta$

$-\theta \leq \alpha \leq \theta$

$-(x^2+2)\cdot|x-3| \leq f(x)-2x+1 \leq (x^2+2)\cdot|x-3|$

$+2x-1 \quad +2x-1 \quad +2x-1$

$\underbrace{-(x^2+2)\cdot|x-3|+2x-1}_{\to 5} \leq f(x) \leq \underbrace{(x^2+2)\cdot|x-3|+2x-1}_{\to 5}$

$\lim_{x\to 3} (x^2+2)\cdot|x-3|+2x-1 = 0+6-1 = 5$

$\lim_{x\to 3} -(x^2+2)\cdot|x-3|+2x-1 = 0+6-1 = 5$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$

Ζ.3. $\lim_{x\to 2} (\overset{\to 0}{x^2-4})\cdot \overset{\to \text{φρ.} [-1,1]}{ημ\left(\dfrac{5}{x-2}\right)} = 0$

$|ημA| \leq 1$

$\left|(x^2-4)\cdot ημ\left(\dfrac{5}{x-2}\right)\right| = |x^2-4|\cdot\left|\underset{\leq 1}{ημ\dfrac{5}{x-2}}\right|$

$\left|(x^2-4)\cdot ημ\left(\dfrac{5}{x-2}\right)\right| \leq \underbrace{|x^2-4|\cdot 1}_{\theta}$

$\underbrace{-|x^2-4|}_{\to 0} \leq \underbrace{(x^2-4)\cdot ημ\left(\dfrac{5}{x-2}\right)}_{\to 0} \leq \underbrace{|x^2-4|}_{\to 0}$

Ασκήσεις στα όρια. 15, $\cancel{α}$, b, 17 α, b

α) $f^2(x) + 6x \le 2x\, f(x) + 9$,

$\lim_{x \to 3} (f(x) - x) = 0$ $\lim_{x \to 3} f(x) = ;$

$f^2(x) - 2x\,f(x) + x^2 \le x^2 - 6x + 9$

$-2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$

$\underbrace{(f(x) - x)^2}_{A} \le \underbrace{(x-3)^2}_{Θ}$

$-|x-3| \le f(x) - x \le |x-3|$

$\lim_{x \to 3} -|x-3| = 0$ $f(x) - x \to 0$ $\lim_{x \to 3} |x-3| = 0$

αν $A^2 < Θ^2$

$-|Θ| < A < |Θ|$

Βιβλίο Ασκ. 8 σελ. 57