ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ

Νοέμβριος 2020

ΓΕΛ Ν. Αγιονερίου Κιλκίς

https://eclass.sch.gr/courses/2663010132/

Όρια Συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις

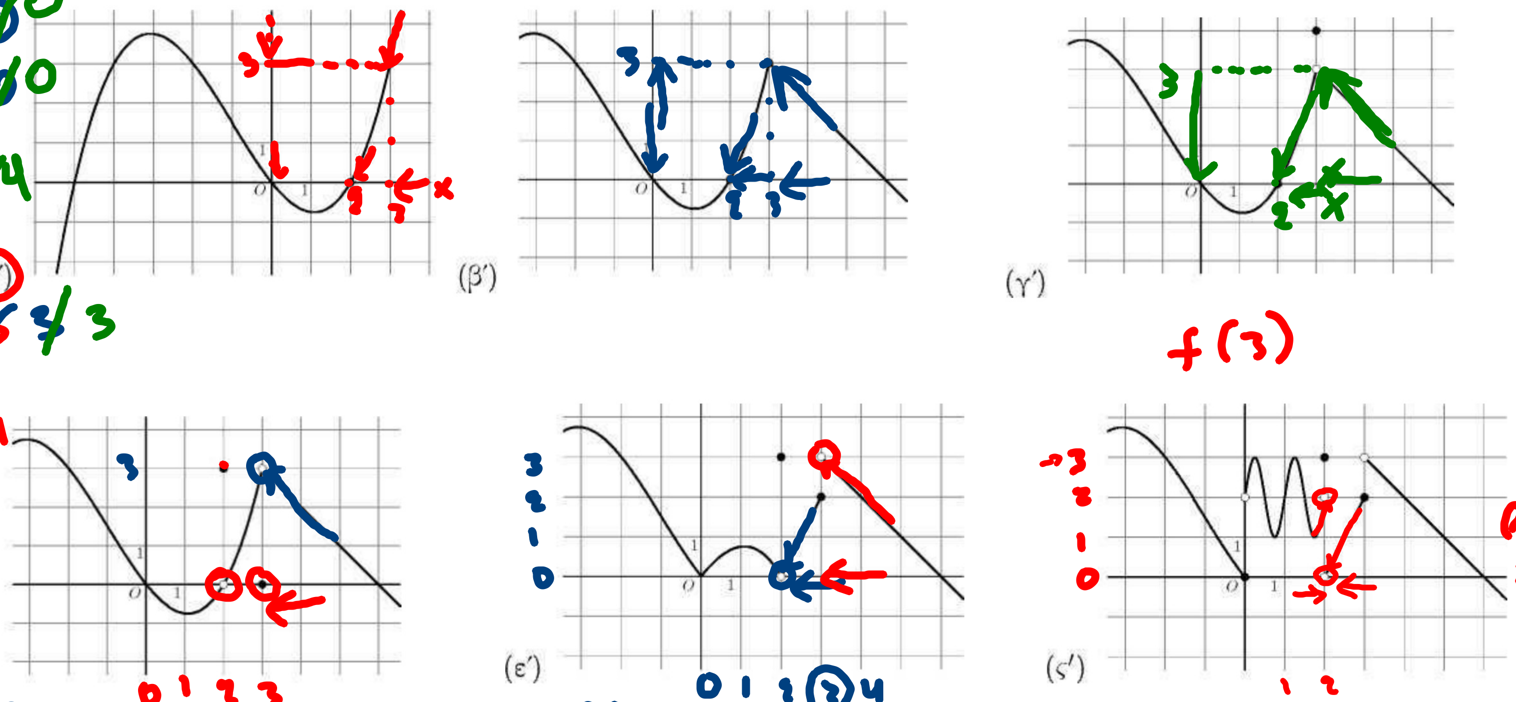
Στα επόμενα σχήματα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης / με πεδίο ορισμού το R. Σε κάθε περίπτωση να συμπληρώσετε τις ισότητες: f(2)=… $\lim_{x\to 2} f(x) = \ldots$ f(3)=… $\lim_{x\to 3} f(x) = \ldots$

$f(2)=\cancel{0}\,\cancel{0}\,0$

$\lim_{x\to 2} f=\cancel{0}\,\cancel{0}\,0$

$f(3)=\cancel{3}\,\cancel{3}\,4$

$\lim_{x\to 3} f(x)=\cancel{3}\,\cancel{3}\,3$



f(3)

$f(2)=3$

$\lim_{x\to 2} f(x)=0$

$f(3)=0$

$\lim_{x\to 3} f(x)=3$

$f(2)=3$

$\lim_{x\to 2} f(x)=0$

$f(3)=2$

$\lim_{x\to 3} f(x)=3$

$f(2)=3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει

Όρια Συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

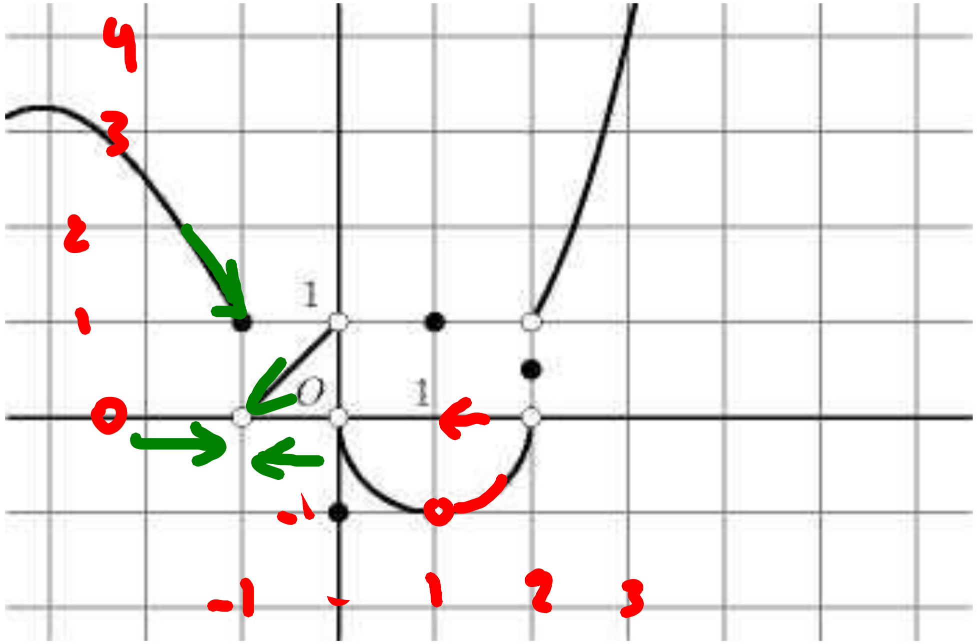
1. $\lim_{x \to 2} x = \ldots$ 3. $\lim_{x \to \beta^+} \beta = \ldots$ 5. $\lim_{x \to \beta^+} \beta = \ldots$ 7. $\lim_{u \to 2^+} u = \ldots$

2. $\lim_{x \to 3} x^2 = \ldots$ 4. $\lim_{x \to \beta} \alpha = \ldots$ 6. $\lim_{x \to \beta^-} (-\beta) = \ldots$ 8. $\lim_{u \to v} u = \ldots$

Όρια Συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις

Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



1. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ δεν	3. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$; δεν	5. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; δεν υπ.	7. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$	4. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$	6. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$	8. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

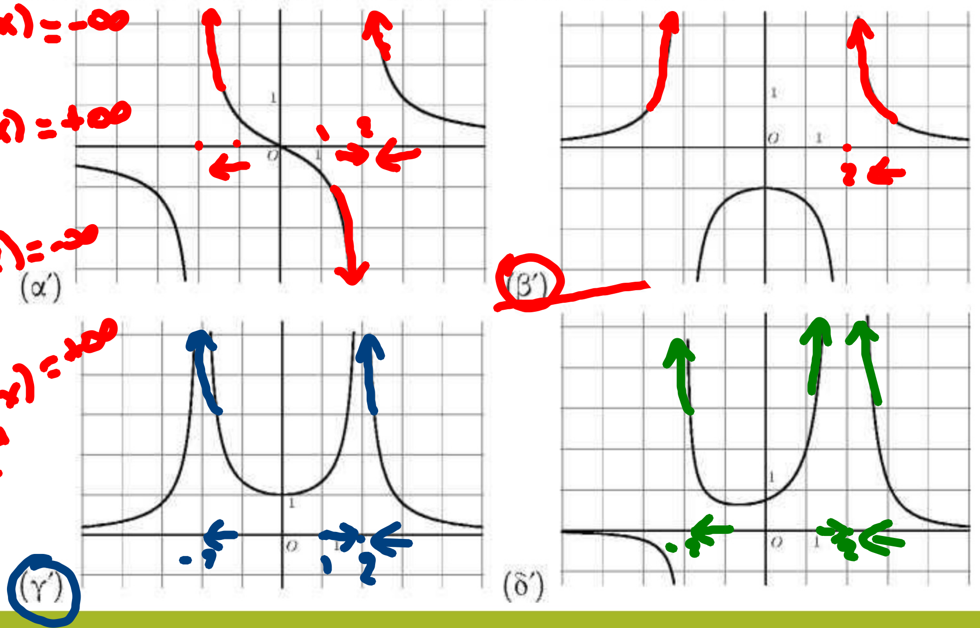
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

Όρια Συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις

Στα σχήματα που ακολουθούν υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να βρείτε κάθε ένα από τα όρια

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \ldots \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \ldots \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \ldots \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \ldots$

με δεδομένο ότι σε κάθε περίπτωση είναι $+\infty$ ή $-\infty$.



$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

$x\to -2^+ = -\infty$

$x\to 2^- = -\infty$

$x\to 2^+ = +\infty$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} = +\infty \quad x\to 2^+ = +\infty$

$x\to -2^- \quad f\to -\infty$

$x\to -2^+ \quad +\infty$

$x\to 2^- \quad +\infty$

$x\to 2^+ \quad +\infty$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$x \to x_0$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

A. Ρητή της μορφής (0/0), με παραγοντοποίηση εμφανίζουμε το $(x-x_0)$ σε αριθμητή και παρονομαστή, απλοποιούμε και στη συνέχεια κάνουμε αντικατάσταση σε ό,τι έμεινε!

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-5x-3}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+7x+8}{x^3+1}$ iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^6-64}{x^4+2x^3-8x-16}$ (απ: 1, 10/3, 12)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^6-64}{x^4+2x^3-8x-16}=\frac{(-2)^6-64}{(-2)^4+2(-2)^3-8(-2)-16}=\frac{+64-64}{+16+2\cdot(-8)+\cancel{16}-\cancel{16}}=\frac{0}{0}$$

$$x^4+2x^3+0x^2-8x-16=(x+2)(x^3-8)=(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -8 & -16 & -2 \\ & -2 & 0 & 0 & +16 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & \end{array}$$

$$x^6-64=(x^3)^2-8^2=(x^3-8)\cdot(x^3+8)$$

$$=(x-2)(x^2+2x+4)\cdot(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x^2+2x+4)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x^2+2x+4)}}$$

$$=(-2)^2-2\cdot(-2)+4=4+4+4=12.$$

$3-\sqrt{x}$ συζυγή $3+\sqrt{x}$ $\qquad$ $\sqrt{2x+3}-3$ συζ. $\sqrt{2x+3}+3$

$x \to x_0$ $\quad \sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}$ συζ $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}$

B. Όριο άρρητης (0/0) με τετραγωνικές ρίζες. Συζυγή παράσταση όπου υπάρχουν παραστάσεις με ρίζες που μηδενίζονται, εμφανίζουμε και πάλι τον παράγοντα $(x-x_0)$, απλοποιούμε, αντικαθιστούμε με x_0.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-3x}-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-2x+8}-\sqrt{x^3+24}}$ (απ: -2/3, 12/5, -1/9)

$\frac{\sqrt{x^2-3x}+2}{\sqrt{}+2}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)\cdot(\sqrt{2x+3}+3)}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5})}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5})}{(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim\frac{\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}}{\frac{x+1-(3x-5)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}}} = \lim\frac{\frac{2x-6}{\sqrt{2x+3}+3}}{\frac{-2x+6}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\overset{-1}{\cancel{(2x-6)}}\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5})}{\cancel{(-2x+6)}\cdot(\sqrt{2x+3}+3)} = \frac{-1\cdot(\sqrt{3+1}+\sqrt{3\cdot 3-5})}{\sqrt{2\cdot 3+3}+3} = \frac{-1\cdot(2+2)}{3+3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$\boxed{3}$ $$\lim_{x\to -2}\frac{(2-\sqrt{2-x})}{(\sqrt{x^2-2x+8}-\sqrt{x^3+24})}\cdot\frac{(2+\sqrt{2-x})}{2+\sqrt{2-x}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+8}+\sqrt{x^3+24}}{(\sqrt{x^2-2x+8}+\sqrt{x^3+24})}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{4-(2-x)}{x^2-2x+8-(x^3+24)}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+8}+\sqrt{x^3+24}}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\boxed{x^2-2x+8-x^3-24}}\cdot \quad >>$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\overset{1}{\cancel{2+x}}}{\cancel{(x+2)}\cdot(-x^2+3x-8)}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+8}+\sqrt{x^3+24}}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{1}{-4-6-8}\cdot\frac{\sqrt{4+4+8}+\sqrt{-8+24}}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{-18}\cdot\frac{4+4}{4} = -\frac{1}{18}\cdot 2 = -\frac{1}{9}.$$

$x \to x_0$

Γ. Όριο άρρητης (0/0) με κυβικές ρίζες. Συζυγή παράσταση όπου απαιτείται, ενεργούμε στη συνέχεια όπως και στο βήμα Β.

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^2-3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2-\sqrt[3]{1-7x}}{\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{3-5x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2-\sqrt[3]{6-x}}{\sqrt{x^2-2x+8}-\sqrt{-8x}}$ (απ: 1/36, 7/6, 1/3)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^2-3x} = \frac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{8}}{x(x-3)} = \frac{\dfrac{x+5-8 \text{ ή } \cancel{x-3}\ 1}{\sqrt[3]{x+5}^2+\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}^2}}{x\cancel{(x-3)}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}^2+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}^2}}{3} = \frac{\dfrac{1}{4+2\cdot 2+4}}{3} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt[3]{\alpha}^2+\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\beta}^2}}$$

$x \to x_0$

Δ. Όριο άρρητης (0/0) με ριζικά διαφόρων τάξεων ή παραστάσεις όπου απαιτείται διάσπαση. Προσοχή, τα όρια στα οποία θα «σπάσουμε» το αρχικό, πρέπει να διατηρούν τη μορφή (0/0).

1. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+6}+\sqrt{x+2}-6}{x^2-4}$ 2. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt[3]{1-7x}}{x+1}$ 3. $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt[3]{6-x}-1}{x^2+2x}$ (απ: 7/32, 1/3, 1/24)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+6}+\sqrt{x+2}\boxed{-6}}{x^2-4}=\frac{\sqrt{16}+\sqrt{4}-6}{4-4}=\frac{\boxed{4}+\boxed{2}-6}{0}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{5x+6}\boxed{-4})+(\sqrt{x+2}\boxed{-2})}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(\sqrt{5x+6}-4)}{x^2-4}\cdot\frac{\sqrt{5x+6}+4}{\sqrt{5x+6}+4}+\frac{(\sqrt{x+2}-2)}{x^2-4}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{5x+6-16}{(x^2-4)(\sqrt{5x+6}+4)}+\frac{x+2-4}{x^2-4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{5x-10}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{1}{(\sqrt{5x+6}+4)}+\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x+2)(\sqrt{5x+6}+4)}+\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{5}{4\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot(2+2)}=\frac{5}{32}+\frac{1}{16}=7/32 \checkmark$$

2. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2+2-\sqrt[3]{1-7x}}{x+1}=$ $2=\sqrt[3]{8}$ $2^3=8$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+1}+\frac{\underset{\sqrt[3]{8}}{2}-\sqrt[3]{1-7x}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+2}\checkmark$$

$$+\frac{8-(1-7x)}{(x+1)\cdot\left(\underset{4}{\sqrt[3]{8}^2}+\underset{2}{\sqrt[3]{8}}\sqrt[3]{1-7x}+\underset{2^2}{\sqrt[3]{1-7x}^2}\right)}$$

$=8-1+7x$

$-x-1=-(x+1)$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3-x-4}{(x+1)(\sqrt{3-x}+2)}+\frac{7+7x}{(x+1)\cdot(\ \ldots\ )}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(\sqrt{3-x}+2)}+\frac{7(\cancel{1+x})}{(\cancel{x+1})\cdot(\ \ldots\ )}\to\ldots\checkmark$$

$$\sqrt[3]{8}^2=2^2=4.$$

$|x^2-3x+1| = -(x^2-3x+1)$ $x \to x_0$ $|x^3-7| = x^3-7$

Ε. Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή , όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο δεν μηδενίζεται. Βγάζουμε την απόλυτη τιμή κρίνοντας το πρόσημο της παράστασης μέσα σε αυτό, προχωρούμε όπως στο βήμα Α.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ τοτε κοντά στο x_0, $f(x) > 0$

1. $\lim_{x\to 3} \frac{|x^2-4|-5}{|1-x|-2}$ 2. $\lim_{x\to 2} \frac{|x^2-3x+1|-|x^3-7|}{|x^3+x|-10}$ (απ: 6, -1)

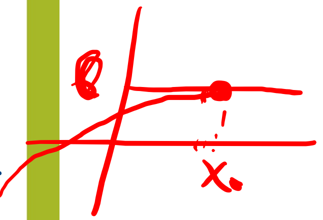
-1 $4-6+1$ $1>0$ x^3+x 5

$1.\ \lim_{x\to 3} \frac{|x^2-4|-5}{|1-x|-2} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4-5}{-(1-x)-2} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{-1+x-2} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$

όταν $x \to 3$, τοτε $x^2-4 \to 5 > 0$

κοντά στο 3, $x^2-4>0$

άρα $|x^2-4| = x^2-4$



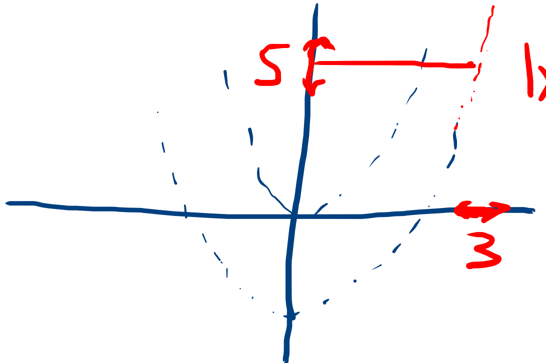
όταν $x \to 3$, $1-x \to -2 < 0$

$\lim_{x\to 3} 1-x = -2 < 0$

κοντά στο 3 $1-x < 0$

$|1-x| = -(1-x)$

$\alpha < 0$ $|\alpha| = -\alpha$



$x^2-4>0$

$|x^2-4| = x^2-4$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 5 \overset{>0}{} \Rightarrow$ κοντά στο 3 $f(x) > 0$

$$x \to x_0$$

ΣΤ. Όριο παράστασης με απόλυτη τιμή, όπου αυτό που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο μηδενίζεται. Ελέγχουμε μήπως ο όρος που μηδενίζεται με το απόλυτο, μπορεί να βγει κοινός παράγοντας σε αριθμητή και παρονομαστή. Αν όχι, φτιάχνουμε πινακάκια για το πρόσημο των παραστάσεων που μηδενίζονται και παίρνουμε πλευρικά όρια.

1. $\lim_{x\to 3} \frac{|x^2+x-12|}{|2x^2-5x-3|}$ 2. $\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|^3+x+1}{|x^2+5x+4|}$ 3. $\lim_{x\to -2} \frac{|x^2+x-2|-|x^3+8|}{|x^2-4|}$ (απ: 1, -1/3 και 1/3 δεν υπάρχει, -9/4)

2. $\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|^3+x+1}{|x^2+5x+4|} = \lim_{x\to -1} \frac{|x+1|^3+x+1}{|(x+1)(x+4)|}$

i) $x>-1 \to x+1>0, |x+1|=x+1$

$x+4>0 \quad |x+4|=x+4$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)^{\cancel{3}\,2}+\cancel{x+1}\,1}{\cancel{(x+1)}(x+4)} = \frac{(x+1)^2+1}{x+4} \xrightarrow[x\to -1]{} \frac{1}{3}$

ii) $x<-1$