Αφιερωμένο στην προσπάθεια όλων των μαθητών που αγωνίζονται για το καλύτερο!

Οδηγός θεωρίας

Ο οδηγός αυτός περιέχει όλη τη θεωρία (Αποδείξεις – Ορισμοί – Ερωτήσεις Σωστό ή Λάθος) μέσα από το σχολικό βιβλίο που θα πρέπει να γνωρίζει ένας άριστα προετοιμασμένος υποψήφιος. **Προσοχή** όμως! Ο οδηγός αυτός έχει καθαρά βοηθητικό – υποστηρικτικό χαρακτήρα. Σε καμία περίπτωση δεν προσπαθεί και δεν μπορεί να αντικαταστήσει το σχολικό βιβλίο στο οποίο εξετάζεται ο υποψήφιος. Πρέπει να τονιστεί πως οποιαδήποτε θεωρία είναι εντός ύλης και περιέχεται στο σχολικό βιβλίο μπορεί να αποτελέσει θέμα θεωρίας στις εξετάσεις.

Προσωπική κατάθεση:

Προφανώς ο οδηγός είναι ελεύθερος για χρήση προς όλους. Δεν βάζω ούτε υδατογράφημα ούτε το όνομα μου σε καμία από τις σελίδες εκτός της πρώτης, ώστε να διευκολύνω όσους συναδέλφους θέλουν να μοιραστούν τον οδηγό με τους μαθητές τους, αλλά και πρακτικά να είναι πιο ευκολοδιάβαστος.

Θεωρώ πως είναι θεμιτό και μας τιμά να δίνουμε στους μαθητές μας σημειώσεις άλλων συναδέλφων και πρέπει όσο μπορούμε να το ενισχύουμε. Θα εκτιμούσα λοιπόν και θα με χαροποιούσε ιδιαίτερα όταν μοιράζεστε τον οδηγό να παραμένει στην κεφαλίδα κάθε σελίδας το διακριτικό σημείωμα «παλαιοπωλείο μαθηματικών».

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Β΄ ΜΈΡΟΣ

Πηγή http://ebooks.edu.gr/

Επιμέλεια: Κανάβης Χρήστος (Διδάκτωρ Μαθηματικός)

1η έκδοση Απρίλιος 2019

Επιμέλεια για μη κερδοσκοπικούς διδακτικούς σκοπούς

Όλες οι αποδείξεις μέσα από το σχολικό!

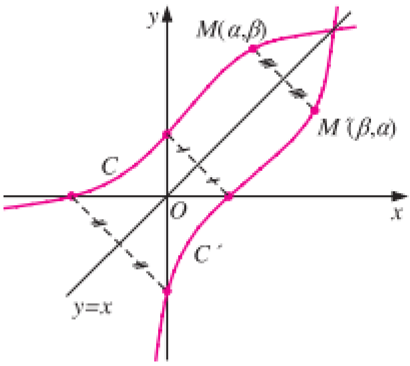
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Απόδειξη 1 σχολικού Σελ 36

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Ας πάρουμε μια 1–1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (διπλανό σχήμα). Επειδή

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x,$$



αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Απόδειξη 2 σχολικού Σελ 49

Έστω το πολυώνυμο, $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

Έστω το πολυώνυμο,

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως, $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη 3 σχολικού Σελ 49

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

Επομένως, $\lim_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$

Απόδειξη 4 σχολικού Σελ 76

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών *Απολυτήριες 2005, 2015*

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι Αν:

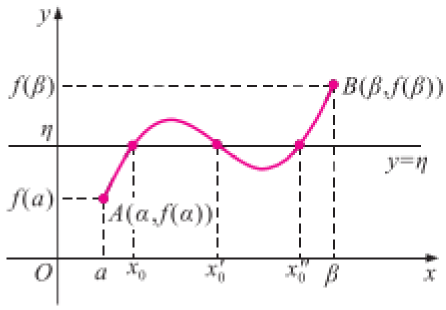
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

(Προσοχή και στην διατύπωση του)

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (σχήμα). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:



- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$,

Αφού, $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$

Παράγωγος και συνέχεια

Απόδειξη 5 σχολικού Σελ 99

Απολυτήριες 2003, Επαναληπτικές 2007, Επαναληπτικές 2013, Απολυτήριες 2018

> Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Για $x \neq x_0$ έχουμε, $$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Οπότε, $$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

Απόδειξη 6 σχολικού Σελ 105

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)' = 0}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

Απόδειξη 7 σχολικού Σελ 105

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)'=1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Απόδειξη 8 σχολικού Σελ 106

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$$

Οπότε,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

Απόδειξη 9 σχολικού Σελ 106

Επαναληπτικές 2005, Επαναληπτικές 2009

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

οπότε, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Απόδειξη 10 σχολικού Σελ 111

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή, $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη 11 σχολικού Σελ 112

Για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

$$(f(x)g(x)h(x))'=\left[\left(f(x)g(x)\right)\cdot h(x)\right]'=\left(f(x)g(x)\right)'\cdot h(x)+\left(f(x)g(x)\right)\cdot h'(x)$$

$$=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

$$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$

Απόδειξη 12 σχολικού Σελ 113 - 114

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη 13 σχολικού Σελ 114

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \text{συν}x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x\text{συν}x + \text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Απόδειξη 14 σχολικού Σελ 116

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Απόδειξη 15 σχολικού Σελ 117

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha}$$

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$$

Απόδειξη 16 σχολικού Σελ 117 *Απολυτήριες 2008*

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Πράγματι,

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Απόδειξη 17 σχολικού Σελ 133

Επαναληπτικές 2004, Απολυτήριες 2009, Απολυτήριες 2014

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1>x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$

Απόδειξη 18 σχολικού Σελ 133

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

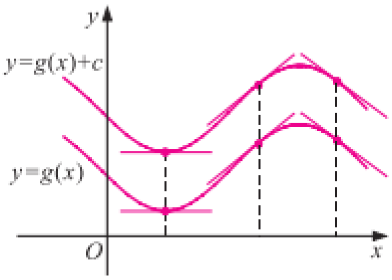
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$

Επομένως, αφού η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και $(f-g)'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, σύμφωνα θεώρημα του σχολικού βιβλίου υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



Απόδειξη 19 σχολικού Σελ 253 *Απολυτήριες 2006, 2012, 2017*

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

! Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Η απόδειξη δεν υπάρχει στο σχολικό, περιλαμβάνεται όμως στον οδηγό για εκπαιδευτικούς σκοπούς.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) < 0$, οπότε $f(x_1) > f(x_2)$

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Απόδειξη 2ο σχολικού Σελ 142 – 143

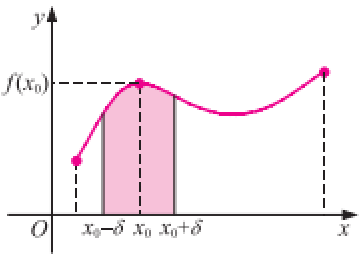
Απολυτήριες 2004, 2011 , Επαναληπτικές 2016 και 2017

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat) (Προσοχή και στη διατύπωση του)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε



$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 . \qquad (3)$$

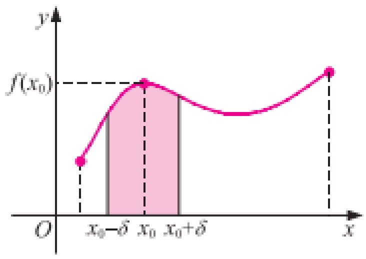
Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. Δεν υπάρχει στο σχολικό παρόλα αυτά περιλαμβάνεται για εκπαιδευτικούς στόχους.

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό ελάχιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (3). Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη 21 σχολικού Σελ 144 - 145

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχήμα. α) ***Επαναληπτικές 2012, Απολυτήριες 2016***

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. β)

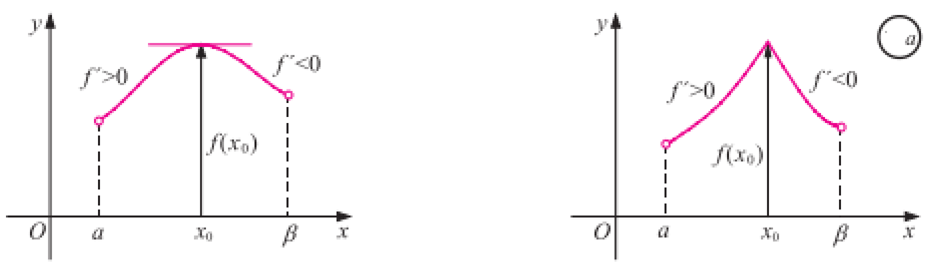
iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). (Σχ. γ) ***Επαναληπτικές 2014, Επαναληπτικές 2018***

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$

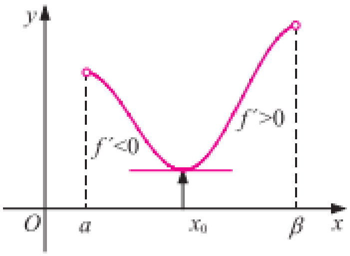


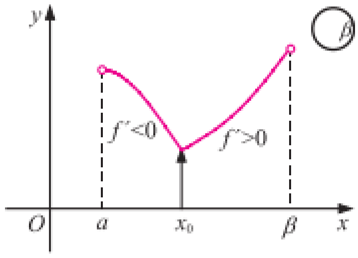
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως. Δεν υπάρχει η απόδειξη στο σχολικό μόνο το σχήμα. Παρόλα αυτά παρατίθεται και αυτή για εκπαιδευτικούς σκοπούς.



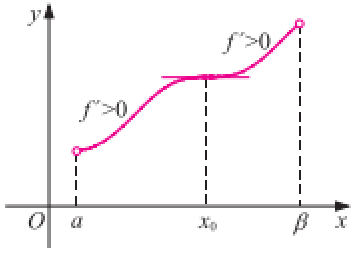


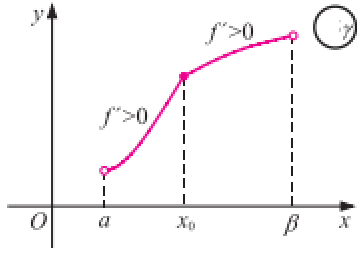
Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η *f* είναι συνεχής στο x_0, η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμ $f(x)\geq f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$ (1)

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η *f* είναι συνεχής στο x_0, η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε $f(x)\geq f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$ (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\geq f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της *f* στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$





Επειδή η *f* είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Απόδειξη 22 σχολικού Σελ 186

Επαναληπτικές 2003, Απολυτήριες 2010, Επαναληπτικές 2015

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

! Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

! Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα του σχολικού βιβλίου, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Απόδειξη 23 σχολικού Σελ 216 – 217

Απολυτήριες 2002, Επαναληπτικές 2008, Απολυτήριες 2013

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$

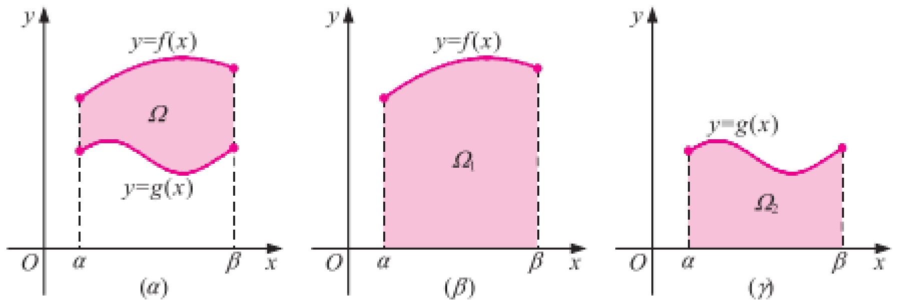
οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Απόδειξη 24 σχολικού Σελ 225

Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. α). Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$



Παρατηρούμε ότι,

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

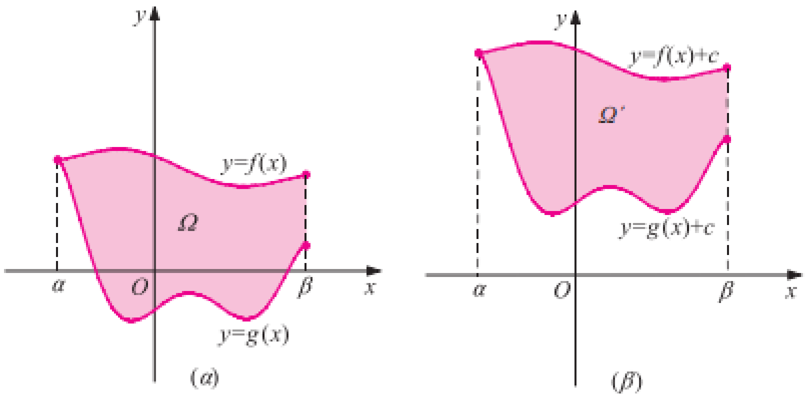
Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$$

Απόδειξη 25 σχολικού Σελ 226

Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να αποδείξετε ότι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$

Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω(Σχ. α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. β).



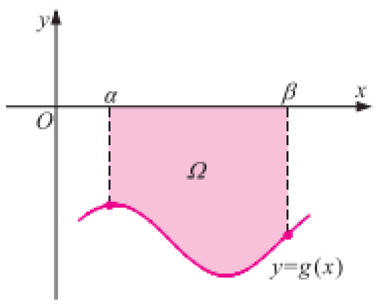
Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$, έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$$

Άρα, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$

Απόδειξη 26 σχολικού Σελ 226

Με τη βοήθεια του τύπου $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχήμα).



Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

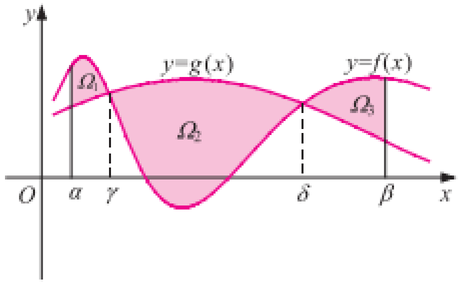
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}$$

Απόδειξη 27 σχολικού Σελ 227

Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο διπλανό Σχήμα, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3



Έχουμε,

$$\begin{aligned}E(\Omega)&=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)\\&=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\\&=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx}$$

Όλοι οι ορισμοί μέσα από το σχολικό!

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ *(Επαναληπτικές 2018)*

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

— *Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.*

— *Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:*

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in A\}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

*Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.*

Ισότητα συναρτήσεων: ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2007,2016, Επαν. 2012

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Πράξεις με συναρτήσεις

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f+g$, **διαφορά** $f-g$, **γινόμενο** fg και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g, τις συναρτήσεις με τύπους:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και $f\cdot g$ είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x \mid x\in A \quad \text{και} \quad x\in B, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0\}$$

Σύνθεση συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μονοτονία

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται(1) :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)<f(x_2)$$

- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)>f(x_2)$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης:

- (1) Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς,:
  - **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$.
  - **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ.**

Ακρότατα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Επαναληπτικές 2010 , Απολυτήριες 2014

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f.

Συνάρτηση $1-1$

ΟΡΙΣΜΟΣ Επαναληπτικές 2005, 2015

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση $1-1$**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad x_1 \ne x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \ne f(x_2).$$

Αντίστροφη συνάρτηση

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι: Έστω μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g:f(A)\to\mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0\in\mathbb{R}$

Κριτήριο παρεμβολής διατύπωση Επαναληπτικές 2016

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell$,

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Προσοχή επίσης στις διατυπώσεις των θεωρημάτων διάταξης Σελ47,48

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

ΟΡΙΣΜΟΣ *(Εντός ύλης)*

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$

ΟΡΙΣΜΟΣ *(Εντός ύλης)*

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell\in\mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\ell$, όταν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu>\nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu-\ell|<\varepsilon$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

ΟΡΙΣΜΟΣ Επαναληπτικές 2009, Απολυτήριες 2015

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

ΟΡΙΣΜΟΣ Προαγωγικές 2017

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Bolzano διατύπωση Επαναληπτικές 2014

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

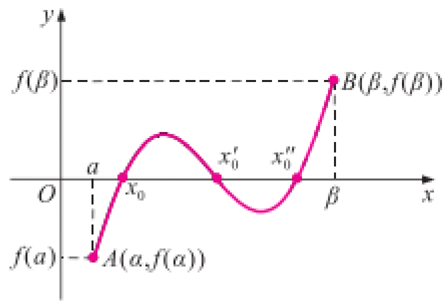
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Θεώρημα Bolzano – Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών – Διατύπωση

Το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- ✓ η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- ✓ $f(\alpha)\neq f(\beta)$

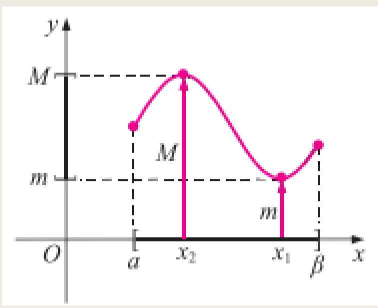
τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής) – Διατύπωση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m\leq f(x)\leq M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x\in[\alpha,\beta]}$$



ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2004, Απολυτήριες 2009

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

- *Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι*

$$\upsilon(t_0)=S'(t_0).$$

- *Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή* $\alpha(t_0)=u'(t_0)=s''(t_0)$

- *Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε είναι:*

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και ***κλίση της C_f στο A*** *ή* ***κλίση της f στο x_0***.

- *Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος Ρ εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται* ***οριακό κόστος στο x_0***. *Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες* ***οριακή είσπραξη στο x_0*** *και* ***οριακό κέρδος στο x_0***.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ -ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

- *Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:*

— *Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή απλά,* ***παραγωγίσιμη***, *όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.*

— *Η f είναι* ***παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)*** *του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.*

— *Η f είναι* ***παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$*** *του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει*

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$$

Επαναληπτικές 2010, Απολυτήριες 2013

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f' : A_1 \to R \qquad x \to f'(x)$, η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f**.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f**, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή, $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$, $\nu \geq 3$.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ROLLE - ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle) – Διατύπωση Επαναληπτικές 2012

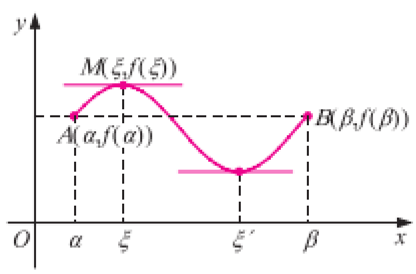
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Θεώρημα του Rolle – Γεωμετρική ερμηνεία Επαναληπτικές 2007

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.) – Διατύπωση Απολυτήριες 2013, 2016

Αν μια συνάρτηση f είναι:

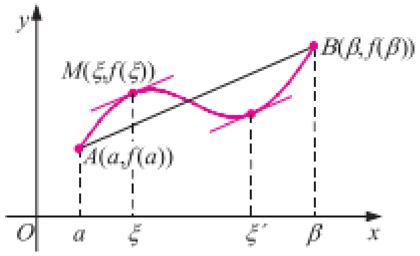
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Θεώρημα Μέσης τιμής – Γεωμετρική ερμηνεία Επαναληπτικές 2008

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2012

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2015

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat) – Διατύπωση Επαναληπτικές 2013

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης:

*Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων.** Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.*

ΣΧΟΛΙΟ

Οι *π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς τ ω ν τ ο π ι κ ώ ν α κ ρ ο τ ά τ ω ν* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**
2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *ε σ ω τ ε ρ ι κ ά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Επαναληπτικές 2013

2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κοίλα - κυρτά συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2006, 2010, 2014

Έστω μία συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα Δ και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ.

Σημεία καμπής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι: i) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**

ii) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''**

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ασύμπτωτες

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2010

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2007, Επαναληπτικές 2016

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

ΟΡΙΣΜΟΣ Απολυτήριες 2005, 2011

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια.**

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

Αντιστοίχως, αν $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Κανόνες – Θεωρήματα De l' Hospital (Διατύπωση)

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ Επαναληπτικές 2006 , 2011 , 2014

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Θεμελιώδης θεώρημα ολοκληρωτικού Λογισμού (ΘΜΤΟΛ) Διατύπωση

Προαγωγικές 2018

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Πρέπει να γνωρίζεις επίσης ότι:

Ορισμός εμβαδού

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

Το νέο Θέμα: Αιτιολόγηση με Αντιπαραδείγματα!

Από το 2017 και μετά εκτός από τις αποδείξεις, τους ορισμούς και τις ερωτήσεις κλειστού τύπου (Σ ή Λ) υπάρχει και ένα ερώτημα αντίστοιχης ερώτησης Σ ή Λ με επεξήγηση. Παραθέτουμε όσα τέτοια θέματα θεωρούμε πως θα μπορούσαν να τεθούν μέσα στο σχολικό βιβλίο ή στις οδηγίες του υπουργείου! Το θέμα αυτό διατυπώνεται κυρίως ως εξής:

ΘΕΜΑ 1

Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Κάθε (συνεχής) συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τουλάχιστον ένα μέγιστο και τουλάχιστον ένα ελάχιστο.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση:

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

β) Για παράδειγμα,

- Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 1$ παρουσιάζει μόνο μέγιστο στο 0 το $f(0) = 1$ αφού $f(x) \le f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η συνάρτηση $f(x) = |x-1|$ παρουσιάζει μόνο ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$ αφού $f(x) \ge f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 2

Κάθε (συνεχής) συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ακριβώς ένα μέγιστο και ακριβώς ένα ελάχιστο.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

β) Για παράδειγμα,

- Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο το $y=1$ σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ και ελάχιστο το $y=-1$ σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$, αφού $-1\leq\eta\mu x\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 3

Κάθε (συνεχής) συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατα.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής

β) Για παράδειγμα,

- Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 4

Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, όταν για ένα τουλάχιστον $x_1, x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν}\quad x_1\neq x_2,\quad \text{τότε}\quad f(x_1)\neq f(x_2)$$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Δώστε ένα παράδειγμα αν θεωρείτε τον ισχυρισμό Α ή ένα αντιπαράδειγμα για να δικαιολογήσετε αν είναι Ψ

α) Ο ισχυρισμός είναι Αληθής

β) Για παράδειγμα,

- Η συνάρτηση $f(x)=\beta$ δεν είναι $\mathbf{1-1}$ αφού $f(x_1)=f(x_2)=\beta$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ δεν είναι $\mathbf{1-1}$ αφού $f(-1)=f(1)=1$ αν και $-1 \neq 1$

ΘΕΜΑ 5 ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

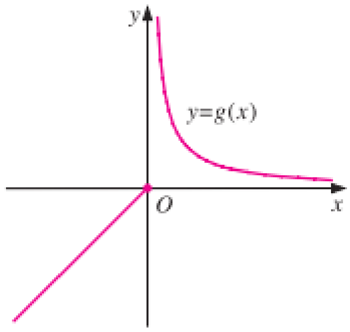
Κάθε συνάρτηση $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδ σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είν ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής

β) Για παράδειγμα,



Προαιρετικά το σχήμα

η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x \ , \ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} \ , \ x>0 \end{cases}$, είναι $1-1$ αλλά όχι γνησίως μονότονη.

ΘΕΜΑ 6

Κάθε συνάρτηση έχει όριο στο μηδέν.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής

β) Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

Αφού για $x<0$ είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{x}{x}=-1$ ενώ

για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{x}=1$

Δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

ΘΕΜΑ 7

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0), τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας και να δώσετε ένα παράδειγμα στην περίπτωση που η πρόταση είναι ψευδής.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής

β) Υπάρχει και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ στο $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 8

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α,x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας και να δώσετε ένα παράδειγμα στην περίπτωση που η πρόταση είναι ψευδής.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής

β) Υπάρχει και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{-x}=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0 \text{ στο } (-\infty,0)$$

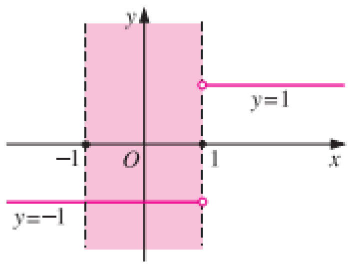
ΘΕΜΑ 9 Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα άκρα α,β των διαστημάτων (α,x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας και να δώσετε ένα παράδειγμα στην περίπτωση που η πρόταση είναι ψευδής.

α) Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

β) Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,1)=(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$



Επομένως, όπως φαίνεται και από το σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

Το ίδιο θα ίσχυε αν περιοριζόμασταν στο υποσύνολο $(-2,2)=(-2,0)\cup(0,2)$

ΘΕΜΑ 10

Υπάρχει το όριο της $f(x)=\frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής

β) Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $(\nu=0)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ΘΕΜΑ 11 (ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Αν για δύο συναρτήσεις f,g ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\mp\infty$ (αντίστοιχα), τότε ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής

β) Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

ενώ, $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

ΘΕΜΑ 12

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

1) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

2) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Οι ισχυρισμοί 1) και 2) είναι ψευδείς

β) Για παράδειγμα:

1) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0\\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0\end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1\,,\qquad \text{ενώ} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(2-x)=2\,,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

2) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1\\ 3, & \text{αν} \quad x=1\end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\,,\quad \text{ενώ} \quad f(1)=3\,.$$

ΘΕΜΑ 13 **ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017**

Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

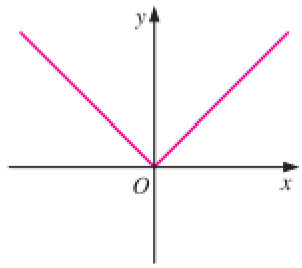
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$



Προαιρετικά το σχήμα

ΘΕΜΑ 14

Το θεώρημα

> Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
>
> - η f είναι συνεχής στο Δ και
> - $f'(x)=0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,
>
> τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ισχύει όχι μόνο σε όταν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα αλλά και σε ένωση διαστημάτων.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Το παραπάνω θεώρημα (καθώς και το πόρισμά του) ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1\ ,\ x<0\\ \ \ 1\ ,\ x>0\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 15

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

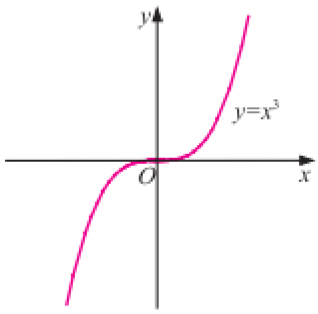
α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Παράδειγμα φθίνουσας η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=-x^3}$)



Προαιρετικό το σχήμα

ΘΕΜΑ 16

1) Ένα τοπικό ελάχιστο (αντίστοιχα τοπικό μέγιστο) δεν μπορεί να είναι ολικό ελάχιστο (αντίστοιχα ολικό μέγιστο)

2) Κάθε τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο) είναι και ολικό μέγιστο (αντίστοιχα ολικό ελάχιστο)

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

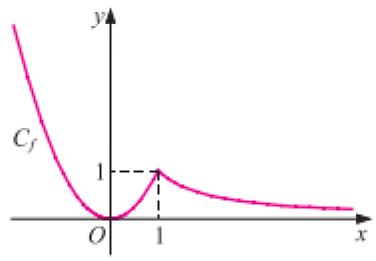
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Και οι δύο προτάσεις είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \text{ αν } x>1 \end{cases}$$

παρουσιάζει:



Προαιρετικό το σχήμα

1) στο $x=0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0)=0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και

2) στο $x=1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1)=1$. Η συνάρτηση f αν και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

ΘΕΜΑ 17

Όλα τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης αποτελούν θέσεις τοπικών ακροτάτων .

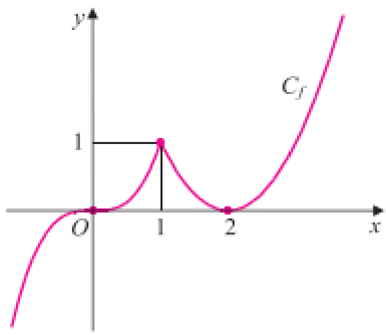
α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , x<1 \\ (x-2)^2 & , x\ge 1 \end{cases}$$



Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & , x<1 \\ 2(x-2) & , x>1 \end{cases}$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2. Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως από το σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

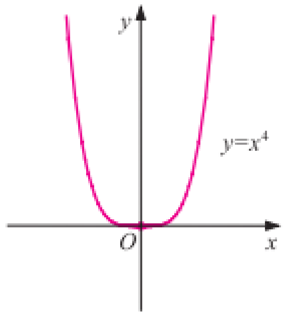
(**Σχόλιο:** Παραθέτουμε ολόκληρη την επεξήγηση μαζί με το σχήμα αλλά θεωρούμε πως στην περίπτωση τέτοιου θέματος θα αρκούσε μόνο ο τύπος της συνάρτησης)

ΘΕΜΑ 18

Αν η f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη), η δεύτερη παράγωγός της **είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική)

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.



α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$

Προαιρετικό το σχήμα

Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$.

(Παράδειγμα κοίλης $\mathrm{f(x)=-x^4}$)

ΘΕΜΑ 19 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙ 2017 το i)

i) όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται , και

ii) όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''

Αποτελούν θέσεις σημείων καμπής.

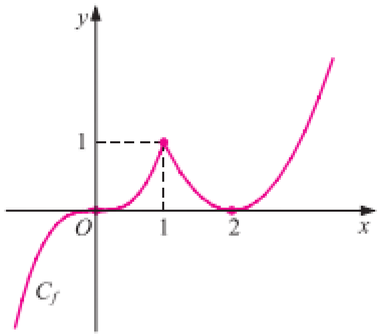
α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \ x<1 \\ (x-2)^4 & , \ x\geq 1 \end{cases}$$



Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με

$$f''(x)=\begin{cases}6x & ,\ x<1\\ 12(x-2)^2 & ,\ x>1\end{cases}$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0 , 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0, f(0))$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0 , εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο.

(<u>Σχόλιο:</u> Παραθέτουμε ολόκληρη την επεξήγηση μαζί με το σχήμα αλλά θεωρούμε πως στην περίπτωση τέτοιου θέματος θα αρκούσε μόνο ο τύπος της συνάρτησης)

Μια ακόμα απάντηση είναι η συνάρτηση $f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}$ (βλέπε θέμα 17) όπου,

η C_f δεν έχει σημείο καμπής. Όμως $f''(x)=12x^2\geq 0$ με $f''(0)=0$

<u>ΘΕΜΑ 20</u> Ερώτηση κατανόησης 3 από τα όρια, σχολικό βιβλίο.

Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x)>1$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{Bmatrix}x^2+1, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{Bmatrix}$

<u>ΘΕΜΑ 21</u> Ερώτηση κατανόησης 9 από τα όρια, σχολικό βιβλίο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{|x|}{x},\ \text{αφού}\ \lim_{x\to 0}|f(x)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{|x|}{x}\right|\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|}=1,\ \text{ενώ το}\lim_{x\to 0}f(x)\ \text{δεν υπάρχει}$$

ΘΕΜΑ 22 Ερώτηση κατανόησης 7 από τις παραγώγους, σχολικό βιβλίο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Παράδειγμα οι συνάρτησεις $f(x)=x^3,\ g(x)=x^5$

Οι f'' και g'' μηδενίζονται στο $x_0 = 0$ και αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν αυτού, άρα παρουσιάζουν καμπή στο 0.
Αλλά $h(x) = x^8 \Rightarrow h'(x) = 8x^7$ και $h''(x) = 56x^6$
Οπότε η h'' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$, αλλά δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Άρα δεν παρουσιάζει καμπή στο 0.

ΘΕΜΑ 23 Ερώτηση κατανόησης 2 από τα ολοκληρώματα, σχολικό βιβλίο

Ισχύει πάντα $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=1,\ g(x)=1$

Πράγματι,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1dx = \beta-\alpha, \text{ αλλά}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} 1dx = (\beta-\alpha)^2$$

ΘΕΜΑ 24 Ερώτηση κατανόησης 4 από τα ολοκληρώματα, σχολικό βιβλίο

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Αντιπαράδειγμα:

$$\int_0^{2\pi} \text{ημ}x dx = [-\text{συν}x]_0^{2\pi} = -\text{συν}2\pi + \text{συν}0$$

Αλλά δεν ισχύει $\text{ημ}x = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

ΘΕΜΑ 25 Ερώτηση κατανόησης 6 από τα ολοκληρώματα, σχολικό βιβλίο

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Αντιπαράδειγμα:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \text{ημ}x dx = [-\text{συν}x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\text{συν}\frac{3\pi}{2} + \text{συν}0 = 1 > 0$$

Αλλά $\text{ημ}x < 0$ για $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Προσοχή: Τις επόμενες ερωτήσεις τις αναφέρουμε προαιρετικά. Είναι ερωτήσεις βγαλμένες μέσα από τις οδηγίες – διαχείριση της ύλης του υπουργείου (βλέπε πηγή στο τέλος των ερωτήσεων).

ΘΕΜΑ 26 Ερώτηση από τις οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου

Εάν το γινόμενο δύο συναρτήσεων f, g είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν τότε μία από τις δύο συναρτήσεις θα είναι αναγκαστικά ίση με τη συνάρτηση μηδέν.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Αντιπαράδειγμα: Οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $f(x) = x - |x|$

ΘΕΜΑ 27 Ερώτηση από τις οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου (Προαιρετική)

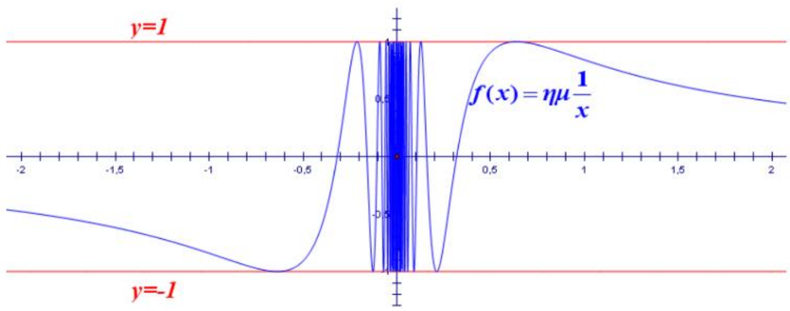
Μια συνάρτηση δεν έχει όριο μόνο όταν τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν υπάρχουν τα πλευρικά τους όρια. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$



ΘΕΜΑ 28 **Ερώτηση από τις οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου (Προαιρετική)**

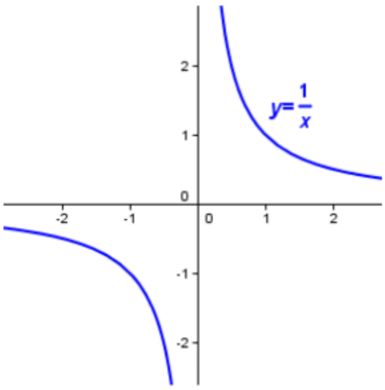
Η γραφική παράσταση κάθε συνεχής συνάρτησης δεν διακόπτεται.

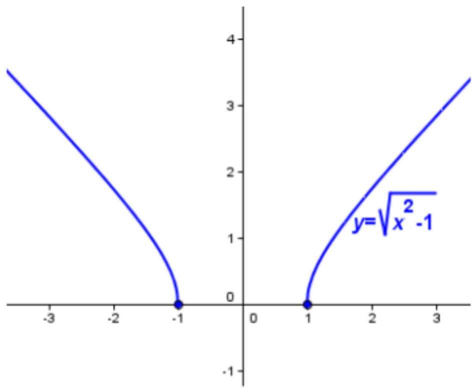
α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-1}$, ενώ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους (που είναι ένωση διαστημάτων) το γράφημα τους διακόπτεται.





ΘΕΜΑ 29 **Ερώτηση από τις οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου (Προαιρετική)**

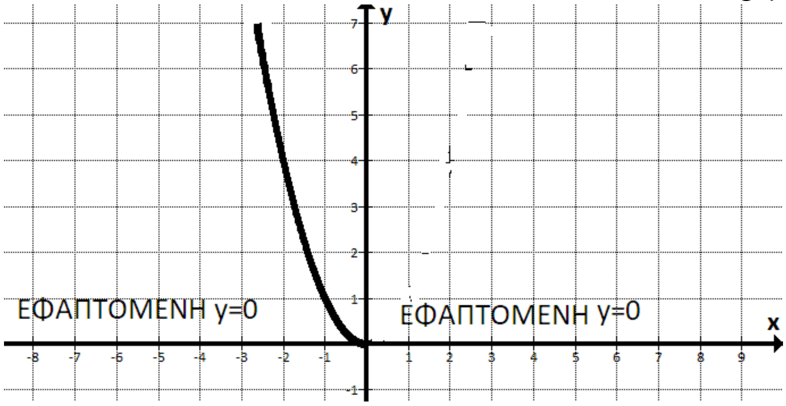
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης οποιασδήποτε συνάρτησης την τέμνει σε ένα και μόνο σημείο.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{Bmatrix} x^2, & x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{Bmatrix}$



Σχόλιο:

- Μπορεί μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης.
- Επίσης η εφαπτομένη μιας ευθείας συμπίπτει με την ευθεία σε κάθε σημείο της.

<u>ΘΕΜΑ 29</u> Ερώτηση από τις οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου (Προαιρετική)

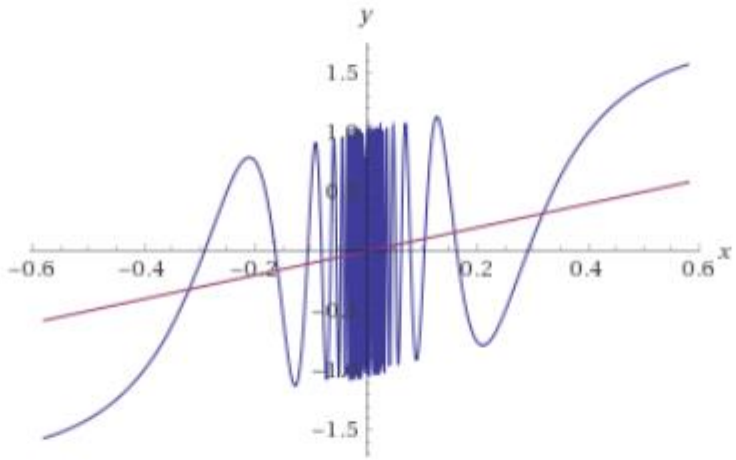
Δεν υπάρχει γραφική παράσταση συνάρτησης που να έχει σημεία τομής με την ασύμπτωτη της (πλάγια ή οριζόντια).

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ που έχει ασύμπτωτη την y=x (αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης) η οποία τέμνει την γραφική παράσταση της *f* σε άπειρα σημεία.



Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ακόμα κάποιες βασικές παρατηρήσεις μέσα από τις οδηγίες που είναι κυρίως σχετικές με τη σχολική ύλη.

1.

Το θεώρημα Bolzano θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

2.

Να τονιστεί ότι οι κανόνες De l' Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι . Αν έχουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ και επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)''}{(x)''}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο. Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$

3.

Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορουν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις :

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow x_1<x_2$.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow x_1>x_2$.

4.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο :

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

5.

να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

- Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$.
- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, με $f(\xi)\neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$»

6.

Η εισαγωγή της συνάρτησης $\int_a^x f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό δε θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται στη συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$ και γενικότερα στη συνάρτησης $\int_a^{g(x)} f(t)dt$».

Επισήμανση:

Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

Παρατηρήσεις

- Η διδακτέα - εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων.
- Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
- Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
- Εξαιρούνται από την εξεταστέα - διδακτέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10.

Πηγή:
https://www.minedu.gov.gr/aei-9/nomothesia-aei/1404-main-grid/lykeio/didaktea-yli-lyk/30547-03-09-17-diaxeirisi-didakteas-ylis-mathimatikon-g-imerisiou-lykeiou-kai-d-esperinoy-lykeiou-2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ «ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ»

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1

I.

1. Ψ, Α **2.** Α **3.**Ψ **4.** Ψ **5.** Α, Ψ **6.** Α **7.** Ψ
8. Ψ **9.** Ψ **10.** Α **11.** Α **12.** Α

II.

1. Β **2.** Ε **3.** Ε **4.** Δ

III.

1. Γ **2.** Α, Γ, Ε **3.** Ε

Κεφάλαιο 2

I.

1. Α **2.** Α **3.** Α **4.** Ψ, Α **5.** Α, Ψ **6.** Α
7. Ψ **8.** Α **9.** Ψ, Α **10.** Ψ, Ψ, Ψ, Α **11.** Ψ, Α, Ψ **12.** Α

II.

1. Β **2.** Γ **3.** Ε **4.** Γ **5.** Γ **6.** Γ **7.** Ε **8.** Γ

III.

1. $\alpha \to E \quad \beta \to \mathrm{A}, \quad \gamma \to \mathrm{B}, \quad \delta \to \Delta$
2. $1 \to \Delta, \quad 2 \to \Gamma, \quad 3 \to \mathrm{A}$

Κεφάλαιο 3

I.

1. Α **2.** Ψ **3.** Α **4.** Ψ **5.** Α **6.** Ψ **7.** Α
8. Α **9.** Α **10.** Α **11.** Α **12.** Α **13.** Α **14.** Ψ

II.

1. Δ **2.** Δ **3.** Δ **4.** Α **5.** Γ **6.** Β **7.** Δ
8. Β **9.** Γ **10.** Γ **11.** Δ

III.

1. Δ **2.** Β, Δ

3. Αν F είναι μία παράγουσα της $f(x)=\frac{1}{x}$, τότε η σχέση $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$ γράφεται $F(x)+c_1 = 1 + F(x) + c_2$, οπότε $c_1 - c_2 = 1$ και **όχι,** $0=1$. Επομένως δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής για την πρόσθεση αόριστων ολοκληρωμάτων.

4. Επειδή το *x* παίρνει και την τιμή 0, δεν μπορούμε να θέσουμε $x=\frac{1}{u}\neq 0$.

5. $F(0)=0$, $F(2)=2$, $F(3)=4$, $F(4)=6$, $F(6)=12$

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄

ΘΕΜΑ Α1

Α) Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α;
Β) Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f και πως συμβολίζεται;
Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y.
2. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
3. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f το πολύ ένα κοινό σημείο.
4. Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα των x, είναι οι λύσεις τις εξίσωσης $f(x)=0$.
5. Ο κύκλος αποτελεί γράφημα συνάρτησης.

ΘΕΜΑ Α2

Α) Πότε δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες;
Β) Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fog και πότε αυτή ορίζεται;
Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Αν f,g δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof, fog, τότε είναι πάντα gof = fog
2. Αν f,g,h τρεις συναρτήσεις και ορίζονται οι ho(gof),(hof)og τότε ισχύει πάντα ho(gof)=(hof)og.
3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A_f και τα σημεία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$
4. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A_f και τα σημεία $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε αναγκαστικά $x_1 = x_2$
5. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A_f και τα σημεία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2$ τότε πάντα ια ισχύει και $f(x_1) \neq f(x_2)$

ΘΕΜΑ Α3

Α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Γ) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Έστω συνάρτηση f και με πεδίο ορισμού A_f. Αν η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση ως προς $x \in A_f$ τότε το y ανήκει στο σύνολο τιμών της f.
2. Αν $f(x)=\ln x,\ g(x)=\frac{1}{e^x}$ τότε $gof(x)=\frac{1}{x},\ x \in R^*$
3. Αν $f(x)=\ln x,\ g(x)=\frac{1}{e^x}$ τότε $fog(x)=-x,\ x \in R$
4. Η συνάρτηση fog ορίζεται όταν $f(A) \cap B \neq \varnothing$, όπου A πεδίο ορισμού της f, f(A) σύνολο τιμών της f και B πεδίο ορισμού της g
5. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως μονότονη.

ΘΕΜΑ Α4

Α) Πότε μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται 1-1;

Β) Πότε μια συνάρτηση f αντιστρέφεται;

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη
2. Κάθε 1-1 συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη
3. Οι γραφικές παραστάσεις των αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του δεύτερου και τέταρτου τεταρτημορίου.
4. Αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.
5. Αν κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα των x τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f το πολύ σε ένα σημείο τότε η συνάρτηση είναι 1-1 και αντίστροφα.

ΘΕΜΑ Α5

Α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Γ) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

Ε) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι 1-1 τότε ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x \in A$
2. Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι 1-1 τότε ισχύει $f(f^{-1}(y))=y$, για κάθε $y \in A$

3. Η αντίστροφη μιας συνάρτησης γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση με το ίδιο είδος μονοτονίας.
4. Υπάρχουν συναρτήσεις όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τη γραφική παράσταση της αντίστροφης της έχουν άπειρα κοινά σημεία εκτός της διχοτόμου y=x
5. Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την y=x, είναι ίδια με τα κοινά σημεία της f^{-1} με την y=x.

ΘΕΜΑ Α6

Α) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
Β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$
Γ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ *τότε* $f(x)>0$ *για κάθε* x_0
2. *Αν* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-l\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$
3. *Αν υπάρχει το όριο της f και g στο* x_0 *τότε είναι* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. *Είναι* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=0$
5. *Είναι* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

ΘΕΜΑ Α7

Α) Να γράψετε όσες ιδιότητες ορίων γνωρίζετε.
Β) Να διατυπώσετε το 1ο θεώρημα της διάταξης.
Γ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$ *τότε* $f(x)>0$ *κοντά στο* x_0.
2. *Αν υπάρχει το όριο της f στο* x_0 *τότε είναι* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x^{\nu}),\ \nu\in \mathbb{N}^*$
3. *Αν υπάρχει το όριο της f και g στο* x_0 *τότε είναι* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. *Είναι* $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$

ΘΕΜΑ Α8

Α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

Β) Με τι ισούνται τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$, *και* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0
2. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$
3. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x\cdot c)=\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)$.
4. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x_0$
5. Αν $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ κοντά στο x_0

ΘΕΜΑ Α9

Α) Τι ονομάζεται ακολουθία a_ν ;

Β) Με τι ισούνται τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$, και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$

Γ) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τα παρακάτω:

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=l$.
2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 1} f(x_0\cdot h)=l$.
3. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
4. Τα όρια τα μελετάμε μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης.
5. Η τιμή της f στο x_0 όταν υπάρχει ισούται με το όριο της στο x_0.

ΘΕΜΑ Α10

Α) Ποιες απροσδιόριστες μορφές γνωρίζετε;

Β) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τα παρακάτω:

1. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής (a,x_0) τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
4. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $f(x)>0$.
6. Η μορφή $\frac{0}{\infty}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή και ισούται με 0.

ΘΕΜΑ Α11

Α) Να εξηγήσετε γιατί το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in N$ *δεν υπάρχει.*

Β) Έστω $P(x)=a_\nu x^\nu+....+a_1x+a_0$, $a_\nu\neq 0$. *Με τι ισούνται τα όρια* $\lim_{x\to+\infty}P(x), \lim_{x\to-\infty}P(x)$

Γ) Να χαρακτηρίσετε με ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *τα παρακάτω:*

1. *Για a>1 είναι* $\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$
2. *Είναι* $\lim_{x\to+\infty}x^\nu=+\infty$
3. *Αν* $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ *και* $f(x)<0$ *κοντά στο* x_0 *τότε* $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
4. *Είναι* $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in N$
5. *Αν* $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ *τότε* $f(x)>0$ *κοντά στο* x_0.

ΘΕΜΑ Α12

Α) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 *του πεδίου ορισμού της.*

Β) Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ανοιχτό διάστημα (α,β);

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο R*
2. *Εξετάζουμε μια συνάρτηση ως προς τη συνέχεια μόνο στα σημεία όπου αυτή ορίζεται.*
3. *Μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής όταν δεν υπάρχει το όριο της στο* x_0
4. *Ισχύει ότι* $\lim_{x\to x_0}\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi x_0$ *για κάθε* $x_0\in R$.
5. *Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχής στο* x_0 *τότε η σύνθεση τους gof θα είναι συνεχής στο* x_0.

ΘΕΜΑ Α13

Α) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα [α,β].

Β) Να διατυπωθεί και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Αν υπάρχει μια τουλάχιστον λύση της εξίσωσης* $f(x)=0$ *στο ανοιχτό (α,β), τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο* x_0.
2. *Αν υπάρχει μια τουλάχιστον λύση της εξίσωσης* $f(x)=0$ *στο ανοιχτό (α,β), τότε* $f(a)\cdot f(\beta)<0$

3. *Μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής όταν υπάρχει το όριο της στο* x_0 *αλλά είναι διαφορετικό από τη τιμή της* $f(x_0)$ *στο σημείο* x_0.
4. *Ισχύει ότι* $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ *για κάθε* $x_0 \in R$.
5. *Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο* x_0 *του πεδίου ορισμού της όταν η γραφική παράσταση της δε διακόπτεται στο* x_0.
6. *Μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) λέγεται συνεχής σε ένα σημείο* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *όταν η γραφική παράσταση της δε διακόπτεται στο* x_0.

ΘΕΜΑ Α14

Α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.
Β) Να αποδείξετε το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.
Γ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία α και β αλλά είναι συνεχής στο [α,β].*
2. *Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει ότι η εξίσωση* $f(x)=0$ *έχει ακριβώς μια λύση στο (α,β).*
3. *Έστω μια συνάρτηση* $f: A \to R$, *για την οποία ισχύει* $|f(x)| = g(x)$, *για κάθε* $x \in A$. *Τότε* $f(x)=g(x)$, *για κάθε* $x \in A$ *ή* $f(x)=-g(x)$, *για κάθε* $x \in A$.
4. *Αν μια συνάρτηση παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές τότε είναι συνεχής.*
5. *Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ, δεν μηδενίζεται σε αυτό τότε θα είναι* $f(x)>0$ *για κάθε* $x \in \Delta$ *ή* $f(x)<0$ *για κάθε* $x \in \Delta$.
6. *Για κάθε* $x_0 \in R$ *ισχύει πάντα* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ΘΕΜΑ Α15

Α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.
Β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.
Γ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει ότι η εξίσωση* $f(x)=0$ *έχει τουλάχιστον μια λύση στο [α,β].*
2. *Αν* ρ_1, ρ_2 *διαδοχικές ρίζες μιας συνεχούς συνάρτησης f με* $\rho_1 < \rho_2$, *τότε* $f(x)>0$ *στο* (ρ_1, ρ_2).
3. *Το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών εξασφαλίζει μια τουλάχιστον λύση της εξίσωσης* $f(x)=\eta$ *στο (α,β).*
4. *Το θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών εξασφαλίζει ότι η* C_f *τέμνει την ευθεία* $y=\eta$ *σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη* $x_0 \in (a, \beta)$.
5. *Η εικόνα* $f(\Delta)$ *ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.*

ΘΕΜΑ Α16

Α) Τι γνωρίζετε για το σύνολο τιμών μιας γνησίως μονότονης και συνεχούς συνάρτησης;

Β) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:(a,\beta)\to R$ είναι συνεχής και 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.

Γ) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τα παρακάτω:

1. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $m \leq f \leq M$ τότε είναι m, η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.
2. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε το σύνολο τιμών της είναι μονοσύνολο ή διάστημα.
3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(a)\cdot f(\beta)\leq 0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[a,\beta]$.
4. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Α=(α,β) τότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$
5. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[a,\beta)$ τότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x), f(\beta)\right)$

ΘΕΜΑ Α17

Α) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Β) Τι ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0;

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Μια συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
2. Μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής στο x_0 δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
3. Μια συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 δεν είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
4. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή $u(t_0)=S'(t_0)$
5. Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ όπου $f'(x_0)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ Α18

Α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε κλειστό διάστημα [α,β]

Β) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει ότι $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
3. Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.
4. Είναι $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x\in[0,+\infty)$.
5. Είναι $(\eta\mu x)'=-\sigma\upsilon\nu x$ για $x\in R$.

ΘΕΜΑ Α19

Α) Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.

Β) Να αποδείξετε ότι $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$, $\nu\in \mathrm{N}-\{0,1\}$, $x\in R$.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Είναι $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$, $x\in R$
2. Είναι $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in R$
3. Είναι $(c\cdot f(x))'=(c)'\,f'(x)$, $x\in R$
4. Είναι $(\varepsilon\phi(x))'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x\in R$
5. Είναι $\left(e^x\right)'=e^x$, $x\in R$

ΘΕΜΑ Α20

Α) Να αποδείξετε ότι $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Β) Να αποδείξετε ότι $\left(x^{a}\right)'=ax^{a-1}$, $a\in R-Z$, $x\in(0,+\infty)$.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Είναι $\left(e^u\right)'=e^u$, $u=f(x)$
2. Είναι $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dz}$ (κανόνας αλυσίδας)

3. Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$.
4. Είναι $(\ln u)' = \frac{1}{\ln u} \cdot u', \quad u = f(x)$
5. Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά τότε κοντά στο t_0 είναι $u(t_0) \geq 0$.

ΘΕΜΑ Α21

Α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο R τότε η f' είναι περιττή.

Β) Να αποδείξετε ότι $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, για κάθε $x \in R - \{x / \eta\mu x = 0\}$

Γ) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τα παρακάτω:

1. Είναι $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, για κάθε $x \in R - \left\{x / x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in Z\right\}$.
2. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε το σύνολο τιμών της είναι μονοσύνολο ή διάστημα.
3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό $f'(x_0)$.
4. Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $(f_1 + f_2 + \ldots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_1'(x) + \ldots + f_k'(x)$.
5. Ισχύει ότι $f^{(\nu)} = \left(f^{(\nu-1)}\right)'$, $\nu \geq 3$

ΘΕΜΑ Α22

Α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο R τότε η f' είναι άρτια.

Β) Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, για κάθε $x \in R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

Γ) Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τα παρακάτω:

1. Είναι $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, για κάθε $x \in R - \{x / x = \kappa\pi, \ \kappa \in Z\}$.
2. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος της θέσης $x = S(t)$, τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή $u(t_o) = S'(t_0)$.

3. Η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ισούται με $a(t_0)=u'(t_0)=S'(t_0)$, όπου $u(t_0)$ η ταχύτητα και $S(t_0)$ η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0.
4. Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, ..., f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $(f_1\cdot f_2\cdot .....\cdot f_k)'(x)=f_1'(x)\cdot f_1'(x)\cdot .....\cdot f_k'(x)$.
5. Το κέρδος ισούται με τα Έσοδα μείον τα Έξοδα.

ΘΕΜΑ Α23

Α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.
Β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.
Γ) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η συνάρτηση θα είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και σε ένωση διαστημάτων.
2. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$ τότε αναγκαστικά θα είναι $f(\alpha)=f(\beta)$.
3. Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ όπου Δ_1,Δ_2 διαστήματα και ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε είναι $f(x)=\begin{Bmatrix} g(x)+c_1, & x\in\Delta_1 \\ g(x)+c_2, & x\in\Delta_2 \end{Bmatrix}$..
4. Είναι $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
5. Είναι $f(x)\cdot f'(x)=\left(f^2(x)\right)'$.

ΘΕΜΑ Α24

Α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής.
Β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης Τιμής.
Γ) Έστω f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν οι f,g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x)=g'(x)+c$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)=g(x)+c$

Δ) Να αποδείξετε ότι $(c)'=0$ και $(x)'=1$
Ε) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και σε ένωση διαστημάτων.
2. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$ τότε αναγκαστικά θα είναι $f(\alpha)=f(\beta)$.
3. Αν στο θεώρημα Μέσης τιμής είναι επιπλέον $f(a)=f(\beta)$ τότε προκύπτει το θεώρημα Rolle.

4. *Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το* $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ *όπου* Δ_1, Δ_2 *διαστήματα και ισχύει* $f'(x) = 0$ *για κάθε* $x \in \Delta$ *εκτός ίσως από τα άκρα των* Δ_1, Δ_2, *τότε είναι* $f(x) = \begin{cases} c_1, & x \in \Delta_1 \\ c_2, & x \in \Delta_2 \end{cases}$.
5. *Είναι* $xf'(x) - f(x) = (xf(x))'$

ΘΕΜΑ Α25

Α) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.
Β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης Τιμής.
Γ) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in R$ *τότε είναι* $f(x) = c \cdot e^x$.
Δ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και σε ένωση διαστημάτων.*
2. *Είναι* $xf'(x) - f(x) = \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
3. *Είναι* $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$
4. *Είναι* $f'(x) + xf''(x) = (xf'(x))'$
5. *Είναι* $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

ΘΕΜΑ Α26

Α) Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν* $f'(x) > 0$ *για κάθε εσωτερικό σημείο* x *του Δ, τότε η συνάρτηση* f *είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.*
Β) Έστω μια συνάρτηση f *με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο* $x_0 \in A$ *τοπικό ελάχιστο; Πότε έχουμε ολικό ελάχιστο;.*
Γ) Τι ονομάζουμε τοπικά και τι ολικά ακρότατα μια συνάρτησης;
Δ) Να χαρακτηρίσετε ως ***Σωστά*** *ή* ***Λάθος*** *τα ακόλουθα:*

1. *Ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.*
2. *Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και παραγωγίσιμη στο Δ τότε* $f'(x) \leq 0$ *στο εσωτερικό του Δ.*
3. *Αν μια συνάρτηση* f *είναι γνησίως μονότονη τότε η εξίσωση* $f(x) = 0$ *έχει μοναδική λύση*
4. *Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αλλά όχι ολικό μέγιστο*

5. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι ολικό μέγιστο της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ Α27

Α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Β) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; Πότε έχουμε ολικό μέγιστο;

Γ) Να αποδείξετε ότι $\left(x^{-\nu}\right)' = -\nu \cdot x^{\nu-1},\ \ \nu \in \mathrm{N}^*,\ \ x \in R^*$

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.
2. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο Δ τότε $f'(x)\geq 0$ στο εσωτερικό του Δ.
3. Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αλλά όχι ολικό ελάχιστο.
4. Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
5. Το ελάχιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

ΘΕΜΑ Α28

Α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του FERMAT.

Β) Ποια ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f;

Γ) Να αποδείξετε ότι $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,\ \ a>0,\ x \in R$.

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος .
2. Οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$ αποτελούν πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.
3. Το θεώρημα του FERMAT μιας συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα Δ ισχύει μόνο στα εσωτερικά σημεία x_o του Δ και όχι στα άκρα του διαστήματος Δ.
4. Κάθε ολικό ακρότατο της f είναι και τοπικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
5. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0=3$, ίσο με 5, τότε ισχύει $f(3)=5$ και $f'(3)=0$.

ΘΕΜΑ Α29

Α) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,β), με εξαίρεση ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η συνάρτηση είναι συνεχής. Να αποδείξετε Α) Αν $f'(x)>0$ στο (a,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Β) Αν $f'(x)<0$ στο (a,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. Γ) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο (a,β)

Β) Να περιγράψετε πως βρίσκουμε τα ακρότατα μιας συνεχής συνάρτησης σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Γ) Να αποδείξετε ότι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \in R^*$.

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Τα κρίσιμα σημεία είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτάτων.
2. Τα άκρα κλειστού διαστήματος είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτάτων.
3. Κάθε τοπικό ακρότατο είναι και ολικό.
4. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a,\beta]$, τότε τα α,β είναι θέσεις τοπικών ακρότατων.
5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=c, \quad x\in R$. Τότε η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού της ίσο με c

ΘΕΜΑ Α30

Α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Β) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ όταν ένα κινητό που κινείται πάνω στη C_f για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική φορά.
2. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f κυρτή στο Δ.
3. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f κοίλη στο Δ τότε $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
4. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
5. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Τότε αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ η f είναι κοίλη.

ΘΕΜΑ Α31

Α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Β) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f κυρτή στο Δ.
2. Αν μια συνάρτηση είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
3. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f κυρτή στο Δ τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
4. Όταν η f είναι κυρτή τότε καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στρέφεται κατά τη θετική φορά.
5. Αν η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ είναι κυρτή τότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

ΘΕΜΑ Α32

Α) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής;

Β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f διαπερνά την καμπύλη.
2. Οι λύσεις της εξίσωσης $f''(x)=0$ είναι πάντα σημεία καμπής.
3. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f τότε $f''(x)=0$.
4. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f δυο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x)=0$.
5. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (a,β) και $x_0\in(a,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε το $A(x_0, f(x_0))$, είναι σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ Α33

Α) Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης $x=x_0$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $R-\{x_0\}$.

Β) Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης $y=l$ στο $+\infty$ και στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το R.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Η ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ είναι οριζόντια αν $\lambda=0$.
2. Η ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ είναι πλάγια αν $\lambda=0$.
3. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

4. Οι δευτέρου βαθμού πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες.
5. Η σταθερή συνάρτηση έχει ασύμπτωτες.

ΘΕΜΑ Α34

Α) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$;

Β) Που αναζητούμε ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό $P(x)$ μικρότερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
2. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει διαφορετική οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ από ότι στο $-\infty$.
3. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει το πολύ δύο οριζόντιες ασύμπτωτες, μία στο $+\infty$ και μία στο $-\infty$.
4. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε μπορεί να έχει και πλάγια στο $+\infty$.
5. Ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΜΑ Α35

Α) Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας μιας άρτιας συνάρτησης και ποιο το κέντρο συμμετρίας μια περιττής συνάρτησης; Ποιο είναι το όφελος για τη χάραξη της γραφικής τους παράστασης;

Β) Να αποδείξετε τις ανισότητες $\ln x\le x-1,\ x\in(0,+\infty)$ και $e^x\ge x+1,\ x\in R$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει στο $+\infty$ οριζόντια και στο $-\infty$ πλάγια ασύμπτωτη.
2. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που τέμνουν την πλάγια ή την οριζόντια ασυμπτωτή τους σε ένα ή περισσότερα σημεία.
3. Ο κανόνας de l' hospital ισχύει και για πλευρικά όρια αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις του.
4. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de l' hospital.

5. Σύμφωνα με τον κανόνα de l′ hospital αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε δεν υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

ΘΕΜΑ Α36

Α) Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής ή παράγουσας μια συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ.

Β) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε να αποδείξετε ότι α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\quad c\in R$ είναι παράγουσες της F στο Δ και β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\quad c\in R$.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και όταν το Δ είναι ένωση διαστημάτων.
2. Μια αρχική συνάρτηση της $e^{f(x)}\cdot f'(x)$ είναι η $e^{f(x)}$.
3. Μια αρχική συνάρτηση της $\frac{a}{x^2}$ είναι η $\frac{a}{x}$.
4. Μια αρχική συνάρτηση της a^x είναι η $\frac{a^x}{\ln x}$.
5. Μια αρχική συνάρτηση της x^a είναι η $\frac{x^{a+1}}{a+1},\quad a\neq -1$.

ΘΕΜΑ Α37

Α) Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής ή παράγουσας μια συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ.

Β) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε να αποδείξετε ότι α) της οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\quad c\in R$ είναι παράγουσες της F στο Δ και β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\quad c\in R$.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ένας πραγματικός αριθμός .
2. Αν $a<\beta$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$
3. Αν $a=\beta$ τότε $\int_\beta^\beta f(x)dx=0$.
4. Αν $a<\beta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$.
5. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=a,\ x=\beta$.

ΘΕΜΑ Α38

Α) Τι εκφράζει γεωμετρικά το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$;

Β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Γ) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η συνάρτηση θα είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,\beta]$. Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq 0$.
2. Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx$.
3. Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$ και $\lambda\in R$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda\cdot f(x)dx=\lambda+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.
4. Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$ και $\lambda,\mu\in R$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}\mu g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx$.
5. Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx-\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$.

ΘΕΜΑ Α39

Α) Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Β) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.

2. Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx-\int_\beta^\gamma f(x)dx$
3. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$. Αν $f(x)-g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$.
4. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,\beta]$ και δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a,\beta]$. Τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$.
5. Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $f(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'$ για κάθε $x\in\Delta$

ΘΕΜΑ Α40

Α) Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Β) Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστά** ή **Λάθος** τα ακόλουθα:

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, η g παραγωγίσιμη και ορίζεται η fog τότε ισχύει ότι $\int_a^{g(x)} f(t)dt=f(g(x))g'(x),\ \ a\in\Delta$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και F μια παράγουσα της, τότε $\int_a^\beta f(x)dx=F(\beta)+F(a)$
3. Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$
4. Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)=\int_\alpha^\beta (x)'f(x)=\left[x\cdot f(x)\right]_a^\beta-f(\beta)+f(a)$
5. Το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, συν το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

<u>**ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**</u>