ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ένας ισχυρισμός μπορεί να καταρριφθεί, δηλαδή να αποδειχθεί ότι είναι ψευδής, με την εύρεση ενός αντιπαραδείγματος, δηλαδή μιας μόνο περίπτωσης για την οποία δεν ισχύει ο ισχυρισμός.

Τι εννοούμε όταν λέμε να βρεθεί ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή μία περίπτωση για την οποία δεν ισχύει ο ισχυρισμός;

Κάθε πρόταση έχει μία ή περισσότερες υποθέσεις και ένα συμπέρασμα. Αρχικά πρέπει να εντοπίσουμε στην πρόταση που μας δίνεται ποια είναι η υπόθεση ή οι υποθέσεις και ποιο είναι το συμπέρασμα. Αυτό είναι εύκολο αν η πρόταση είναι διατυπωμένη σαν υποθετική πρόταση της μορφής "αν … τότε …". Ότι ακολουθεί μετά το "αν" είναι η υπόθεση και ότι ακολουθεί μετά το "τότε" είναι το συμπέρασμα. Αν η πρόταση δεν είναι διατυπωμένη σε αυτή τη μορφή, τότε πρέπει να την αναδιατυπώσουμε ώστε να πάρει τη μορφή μιας υποθετικής πρότασης. Το αντιπαράδειγμα είναι μία νέα περίπτωση που πρέπει να επινοήσουμε στην οποία ισχύει η υπόθεση ή οι υποθέσεις της αρχικής πρότασης αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμά της.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η ΠΡΟΤΑΣΗ: **Αν** $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 **τότε** $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ (πρόκειται για το αντίστροφο του Θεωρήματος 1, σελ. 47 του σχολικού βιβλίου). Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η πρόταση είναι ήδη διατυπωμένη σαν υποθετική πρόταση της μορφής "αν … τότε …", οπότε είναι σαφές ότι:

η **υπόθεση** της πρότασης είναι: $f(x) > 0$ κοντά στο x_0,

και το **συμπέρασμα** της πρότασης είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$.

Το αντιπαράδειγμα που πρέπει να βρούμε είναι μία περίπτωση συνάρτησης για την οποία ισχύει η υπόθεση της αρχικής πρότασης, δηλαδή να ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, αλλά να μην ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή να μην ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, άρα να ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$ ή να ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Για να στοιχειοθετηθεί το αντιπαράδειγμα χρειάζονται τρία πράγματα:

1) Να βρεθεί ο **τύπος** της συνάρτησης που θα αποτελέσει το αντιπαράδειγμα.

2) Να διατυπωθεί η **αιτιολόγηση**, δηλαδή να δειχθεί ότι, για τη συγκεκριμένη συνάρτηση που επιλέξαμε, ισχύει η υπόθεση της πρότασης αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμά της.

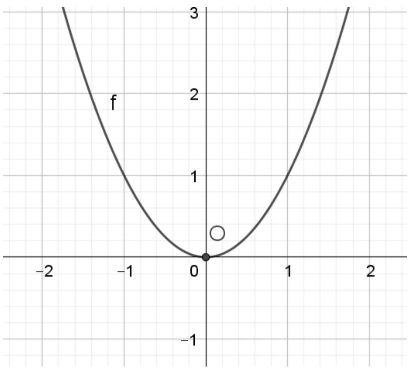
3) Συμπληρωματικά, θα μπορούσε να σχεδιαστεί η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης στην οποία να φαίνεται ότι ισχύει η υπόθεση της πρότασης αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμά της. Ειδικά στην περίπτωση που δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης που θα αποτελέσει το αντιπαράδειγμα, μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της οποίας δεν γνωρίζουμε τον τύπο αλλά έχει τα χαρακτηριστικά που είναι απαραίτητα για να αποτελέσει αντιπαράδειγμα.

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Η παραπάνω πρόταση είναι ψευδής. Μία συνάρτηση που μπορεί να αποτελέσει αντιπαράδειγμα στην παραπάνω πρόταση είναι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για την περίπτωση x_0=0.

2) Για αυτή τη συνάρτηση ισχύει η υπόθεση της αρχικής πρότασης $f(x) > 0$ κοντά στο 0, αφού ισχύει $x^2 > 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα της αρχικής πρότασης $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, αφού ισχύει $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

3) Γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 2

Δίνεται η ΠΡΟΤΑΣΗ: **Αν** $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x ενός διαστήματος Δ, **τότε** η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ (Πρόκειται για το θεώρημα της σελίδας 135 του σχολικού βιβλίου, όμως από την πρόταση που δίνεται εδώ λείπει η μία από τις δύο υποθέσεις του θεωρήματος: η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ. Αν δεν ισχύει κάποια από τις υποθέσεις ενός θεωρήματος, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το αν ισχύει ή αν δεν ισχύει το συμπέρασμά του).

Η πρόταση είναι ήδη διατυπωμένη σαν υποθετική πρόταση της μορφής “αν … τότε …”, οπότε είναι σαφές ότι:

η **υπόθεση** της πρότασης είναι: $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x ενός διαστήματος Δ,

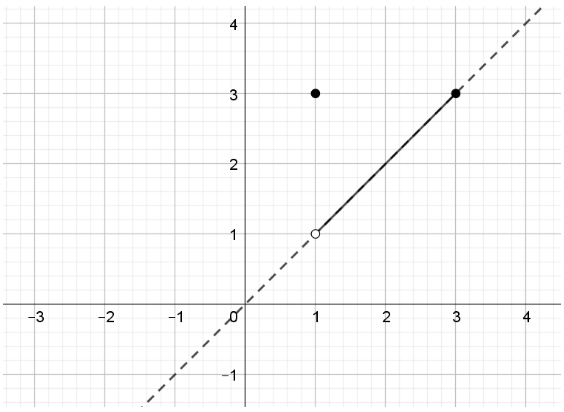
και το **συμπέρασμα** της πρότασης είναι: η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Η παραπάνω πρόταση είναι ψευδής. Μία συνάρτηση που μπορεί να αποτελέσει αντιπαράδειγμα στην παραπάνω πρόταση είναι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \alpha\nu\ x \in (1,3] \\ 3, & \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$

2) Για αυτή τη συνάρτηση ισχύει η υπόθεση της αρχικής πρότασης αφού $f'(x) = 1 > 0$ για κάθε $x \in (1,3)$, αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα της αρχικής πρότασης αφού η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$ καθώς για τα $1, 2\ \in [1,3]$ ισχύει $1 < 2$ αλλά $f(1) > f(2)$ (εφόσον $f(1) = 3$ και $f(2) = 2$).

3) Γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 3

Δίνεται η ΠΡΟΤΑΣΗ: Μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, που είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma)$ και $(\gamma, \beta]$, όπου $\gamma \in (\alpha, \beta)$, δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο γ.

Η πρόταση δεν έχει τη μορφή υποθετικής πρότασης, οπότε πρέπει αρχικά να εντοπίσουμε τι είναι υπόθεση και τι συμπέρασμα σε αυτήν.

Υπόθεση 1: Η f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Υπόθεση 2: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \gamma)$.

Υπόθεση 3: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\gamma, \beta]$.

Υπόθεση 4: $\gamma \in (\alpha, \beta)$

Συμπέρασμα: Η f **δεν μπορεί να έχει ακρότατο** στο γ.

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Η παραπάνω πρόταση είναι ψευδής. Μία συνάρτηση που μπορεί να αποτελέσει αντιπαράδειγμα στην παραπάνω πρόταση είναι η συνάρτηση
$f(x) = \begin{cases} x, & \alpha\nu\ x \in [0,1) \cup (1,3] \\ 4, & \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$

2) Για αυτή τη συνάρτηση ισχύουν όλες οι υποθέσεις της αρχικής πρότασης:

Υπόθεση 1: Η f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [0,3],

Υπόθεση 2: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 1),

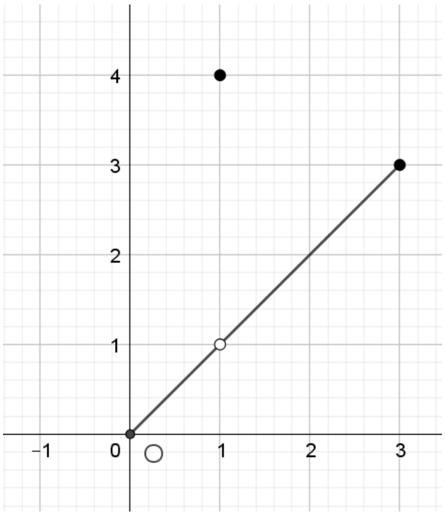
Υπόθεση 3: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1, 3],

Υπόθεση 4: $1 \in (0,3)$,

αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα της αρχικής πρότασης, αφού:

η f **έχει μέγιστο** στο 1, το $f(1) = 4$, εφόσον ισχύει $f(x) \leq f(1) = 4$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

3) Γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 4

Δίνεται η ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f(x)·g(x)=0 για κάθε x∈Δ, τότε θα ισχύει f(x)=0 για κάθε x∈Δ ή g(x)=0 για κάθε x∈Δ.

Η πρόταση είναι ήδη διατυπωμένη σαν υποθετική πρόταση της μορφής "αν … τότε …", οπότε είναι σαφές ότι:

Οι υποθέσεις της πρότασης είναι:

Υπόθεση 1: η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, Υπόθεση 2: η g είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ,

Υπόθεση 3: ισχύει f(x)·g(x)=0 για κάθε x∈Δ

και το συμπέρασμα της πρότασης είναι:

Συμπέρασμα: **f(x)=0** για κάθε x∈Δ ή **g(x)=0** για κάθε x∈Δ.

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Η παραπάνω πρόταση είναι ψευδής. Μία συνάρτηση που μπορεί να αποτελέσει αντιπαράδειγμα στην παραπάνω πρόταση είναι οι συναρτήσεις:

$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

2) Για αυτές τις συναρτήσεις ισχύουν οι υποθέσεις της αρχικής πρότασης αφού οι f και g ορίζονται στο R και ισχύει f(x)·g(x)=0 για κάθε x∈R, αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα της αρχικής πρότασης αφού ούτε η f είναι η μηδενική συνάρτηση, ούτε η g είναι η μηδενική συνάρτηση.

3) Η γραφική παράσταση δεν είναι απαραίτητη για να στοιχειοθετηθεί το αντιπαράδειγμα στις περισσότερες περιπτώσεις. Ωστόσο, αν δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο μιας ή περισσότερων συναρτήσεων για να στοιχειοθετήσουμε το αντιπαράδειγμα, θα μπορούσαμε εναλλακτικά να παραλείψουμε το (1) και να γράψουμε τα (2) και (3), δηλαδή να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας ή περισσότερων συναρτήσεων των οποίων δεν γνωρίζουμε τον τύπο (3) και να διατυπώσουμε και τη σχετική αιτιολόγηση (2), όπως στο επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 5

Δίνεται η ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν μία συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε δεν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Η πρόταση έχει τρεις υποθέσεις:

Υπόθεση 1: η f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,

Υπόθεση 2: η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β),

Υπόθεση 3: ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$

(δηλαδή, ισχύουν οι δύο πρώτες υποθέσεις του θεωρήματος Rolle αλλά δεν ισχύει η τρίτη υπόθεση του θεωρήματος)

και το συμπέρασμα της πρότασης είναι:

Συμπέρασμα: **δεν υπάρχει** $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

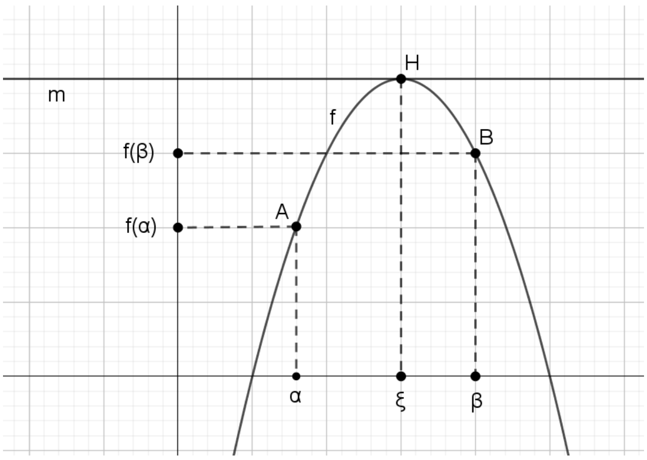
(δηλαδή, δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος)

ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γενικότερα, όταν δεν ισχύει η υπόθεση ή κάποια από τις υποθέσεις ενός θεωρήματος, τότε δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά, αν ισχύει ή όχι το συμπέρασμά του.

Η συγκεκριμένη πρόταση είναι ψευδής και θα μπορούσαμε να στοιχειοθετήσουμε ένα αντιπαράδειγμα σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, της οποίας δεν γνωρίζουμε τον τύπο και διατυπώνοντας τη σχετική αιτιολόγηση:

3) Γραφική παράσταση:



2) Αιτιολόγηση:

Στη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης βλέπουμε ότι ισχύουν και οι τρεις υποθέσεις της πρότασης, αφού η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$, όμως δεν ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης, αφού υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x, συνεπώς $f'(\xi) = 0$.