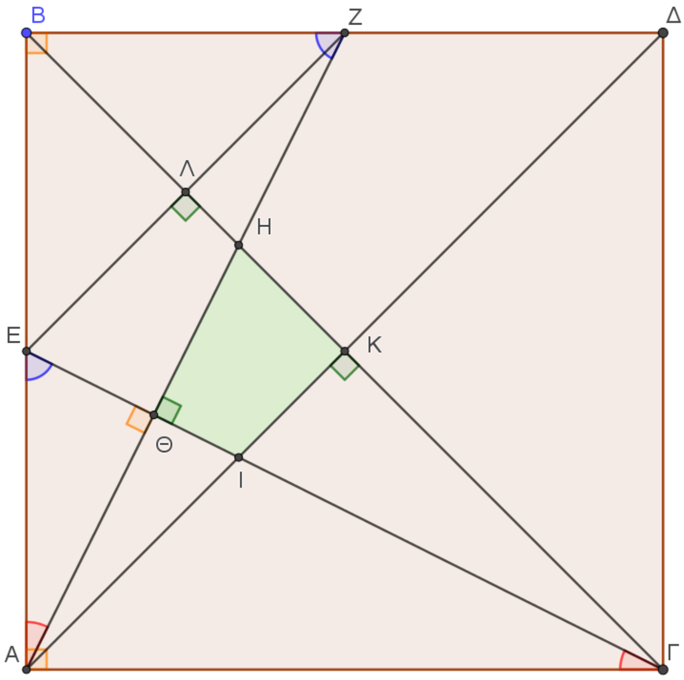
Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10 φέρνουμε τα μέσα Ε, Ζ δυο διαδοχικών πλευρών του (βλέπε σχήμα). Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σκιαγραμμένου τετραπλεύρου.



Αφού Ε, Ζ μέσα των ΑΒ, ΒΔ αντίστοιχα, έχουμε $EZ =// \frac{A\Delta}{2}$

Αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο, οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, άρα $B\Gamma \perp A\Delta \Longrightarrow B\Lambda \perp EZ$

Έχουμε $(B\Lambda E) = \frac{(BEZ)}{2} = \frac{(BA\Delta)}{8} = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{16} = \frac{100}{16} = 6{,}25$

Αφού Ε μέσο ΑΒ έχουμε $(BE\Gamma) = \frac{(BA\Gamma)}{2} = \frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{4} = \frac{100}{4} = 25$

Άρα $(\Gamma E\Lambda) = (BE\Gamma) - (B\Lambda E) = 25 - 6{,}25 = 18{,}75$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΑΕ είναι προφανώς ίσα, άρα $E\hat{A}\Theta = B\hat{A}Z = A\hat{\Gamma}E$ (κόκκινες γωνίες), $\Theta\hat{E}A = \Gamma\hat{E}A = B\hat{Z}A$ (μπλε γωνίες). Άρα τα τρίγωνα ΑΕΘ και ΑΒΖ θα έχουνε και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, άρα $E\hat{\Theta}A = A\hat{B}Z = 90^o$.

Αυτό είναι και το κλειδί της άσκησης, καθώς τώρα έχουμε τρία όμοια ορθογώνια τρίγωνα, τα ΓΕΛ, ΓΘΗ και ΓΙΚ (η Γ γωνία κοινή). Το μόνο που χρειαζόμαστε πλέον είναι τα μήκη των ΓΛ, ΓΘ και ΓΚ.

Έχουμε:

$\Gamma K = \frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma A = 5\sqrt{2}$

$\Gamma\Lambda = \Gamma B - \Lambda B = \sqrt{2}A\Gamma - \frac{\sqrt{2}}{2}EB = 10\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}5 = 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Το ΓΘ είναι πιο μπελαλίδικο.

Βρίσκω πρώτα το ΕΓ. Από Π.Θ. στο ΑΕΓ έχουμε:

$$E\Gamma = \sqrt{AE^2 + A\Gamma^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Βρίσκω μετά το (ΑΕΘ) από την ομοιότητα των ΑΕΘ και ΑΒΖ,

$$\left(\frac{AE}{AZ}\right)^2 = \frac{(AE\Theta)}{(ABZ)}$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{AB^2+BZ^2}}\right)^2 = \frac{(AE\Theta)}{(AB\Delta)/2}$$

$$\frac{25}{125} = \frac{(AE\Theta)}{(AB\Delta)/2}$$

$\frac{1}{5} = \frac{(AE\Theta)}{50/\,2}$ άρα (ΑΕΘ)=5, έχω και (ΑΕΓ)=25

Από την ομοιότητα των ορθογωνίων ΑΕΘ και ΑΕΓ (Ε κοινή) έχουμε $\left(\frac{E\Theta}{EA}\right)^2 = \frac{(AE\Theta)}{(AE\Gamma)}$

Άρα $\left(\frac{E\Theta}{5}\right)^2 = \frac{5}{25}$, άρα $E\Theta = \sqrt{5}$ άρα $\Gamma\Theta = E\Gamma - E\Theta = 4\sqrt{5}$

Συνοψίζοντας έχουμε $\Gamma K = 5\sqrt{2}, \Gamma\Lambda = 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \Gamma\Theta = 4\sqrt{5}$

Έχουμε $\frac{(\Gamma\Theta H)}{(\Gamma E\Lambda)} = \left(\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Lambda}\right)^2 \to \frac{(\Gamma\Theta H)}{18{,}75} = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \frac{80}{\frac{225}{2}} = \frac{160}{225} \to (\Gamma\Theta H) = 18{,}75 * \frac{160}{225} = \frac{40}{3}$

Έχουμε $\frac{(\Gamma\Theta H)}{(\Gamma KI)} = \left(\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma K}\right)^2 \to \frac{\frac{40}{3}}{(\Gamma KI)} = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{80}{50}$

Άρα $(\Gamma KI) = \frac{40}{3} \cdot \frac{50}{80} = \frac{25}{3}$

Άρα $(\Theta HKI) = (\Gamma\Theta H) - (\Gamma KI) = \frac{40}{3} - \frac{25}{3} = 5$

Απάντηση: $\mathbf{(\Theta HKI) = 5}$