

Τράπεζα θεμάτων Α' λυκείου – Άλγεβρα κεφάλαιο 5^ο

24 θέματα - 30/5/2022

Θέμα 12694 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

- α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 3 + 4)
- β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι. (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. (Μονάδες 6)
- δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι; (Μονάδες 6)

Θέμα 12731 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, ($\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$. (Μονάδες 7)

Θέμα 12763 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Θέμα 2

Δίνεται μία πρόοδος a_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

- α) Να εξετάσετε αν η a_n είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η a_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο. (Μονάδες 13)

Θέμα 12764 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θέμα 4

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

- α) Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω . (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα. (Μονάδες 9)
- γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα. (Μονάδες 7)

Θέμα 12787 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο. (Μονάδες 15)

Θέμα 12945 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. (Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των 2n πρώτων όρων της (α_n) είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n. (Μονάδες 10)

Θέμα 12998 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (a_n) :

$$\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$. (Μονάδες 5)

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (a_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ...και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

			.	
.	.	.	. .	
	. .	. .	. . .	...
		. . .		
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_v = \frac{v(v+1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

- α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό. (Μονάδες 6)
- β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. (Μονάδες 10)

Θέμα 13089 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

- i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
- ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_n = \beta_{8-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$. (Μονάδες 5)

Θέμα 13171 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι

$$S_n = 2n^2 + 3n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1, \quad n \geq 2$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n + 1, \quad n \geq 1$ (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω και τον πρώτο όρο a_1 . (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν $p \in \mathbb{N}^*$, τότε όλοι οι όροι της μορφής $a_{p(p+1)}$ είναι τέλεια τετράγωνα περιπτών φυσικών αριθμών. (Μονάδες 5)

Θέμα 13173 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ακολουθία (a_n) με γενικό τύπο $a_n = 10 + 3n$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.
(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της a_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (a_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

Θέμα 13319 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $1 - x, \frac{x}{2}, 2x - 1, x \in R$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5. (Μονάδες 12)

Θέμα 14375 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2), f(1), f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ . (Μονάδες 7)

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

Θέμα 14476 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 . (Μονάδες 13)

Θέμα 14512 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. (Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου(a_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . (Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (a_n). (Μονάδες 7)

Θέμα 14573 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει: $a_4 - a_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου. (Μονάδες 15)

Θέμα 14574 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.
(Μονάδες 13)

Θέμα 14597 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

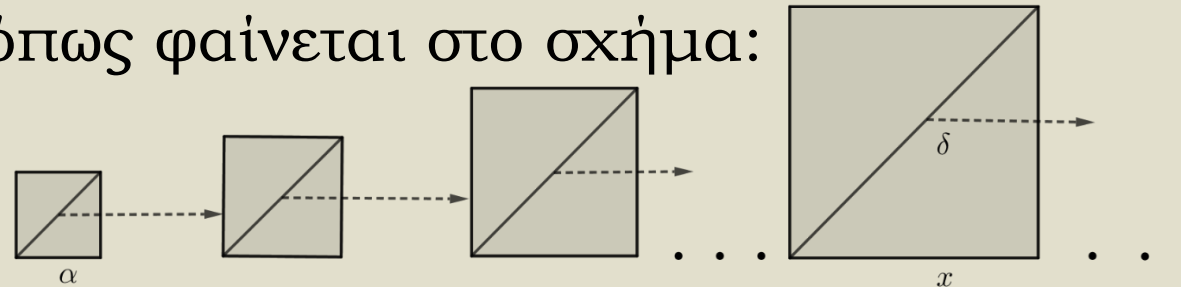
- α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. (Μονάδες 8)
- γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά. (Μονάδες 9)

Θέμα 14645 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:

α)



- i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$. (Μονάδες 4)
 - ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $a_n = \alpha^2 2^{n-1}$. (Μονάδες 7)
- β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

- i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου. (Μονάδες 8)
- ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ. (Μονάδες 6)

Θέμα 14656 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$. (Μονάδες 13)

Θέμα 14758 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου; (Μονάδες 6)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 6)
- γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια; (Μονάδες 6)
- δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

Θέμα 14809 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για $23^{\text{η}}$ φορά το γράμμα Β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^{\text{η}}$ θέση στην παραπάνω διαδοχή. (Μονάδες 9)

Θέμα 14927 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_n) .

α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $a_n = 107n + 1210$. (1) (Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1). (Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (Μονάδες 6)

Θέμα 14935 - 1ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) , γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
- ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.
- iii. Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με v περιττό φυσικό και $\alpha < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[v]{|\alpha|}$.
- iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, 5)$ ισχύει $f(5) = 3$.
- v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$. (Μονάδες 10 (5×2))

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$ (Μονάδες 15)