

**Τράπεζα  
θεμάτων Α'  
Λυκείου –  
Γεωμετρία  
κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>**

23 θέματα - 3/6/2022

## Θέμα 12069 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ = ΑΓ$ ) παίρνουμε στην πλευρά  $ΑΒ$  σημείο  $Δ$ , ώστε  $ΔΒ = 2ΑΔ$ , και στην πλευρά  $ΑΓ$  σημείο  $Ε$ , ώστε  $ΕΓ = 2ΑΕ$ . Το  $Μ$  είναι το μέσο της πλευράς  $ΒΓ$  του τριγώνου  $ΑΒΓ$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

Τα τμήματα  $ΔΒ$  και  $ΕΓ$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)

Το τρίγωνο  $ΜΔΕ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Αν  $Ρ$  το σημείο τομής των τμημάτων  $ΒΕ$  και  $ΓΔ$  να δείξετε ότι:

Οι γωνίες  $Γ\hat{Β}Ε$  και  $Β\hat{Γ}Δ$  είναι ίσες. (Μονάδες 6)

Το τμήμα  $ΡΜ$  διχοτομεί τη γωνία  $Β\hat{Ρ}Γ$ . (Μονάδες 7)

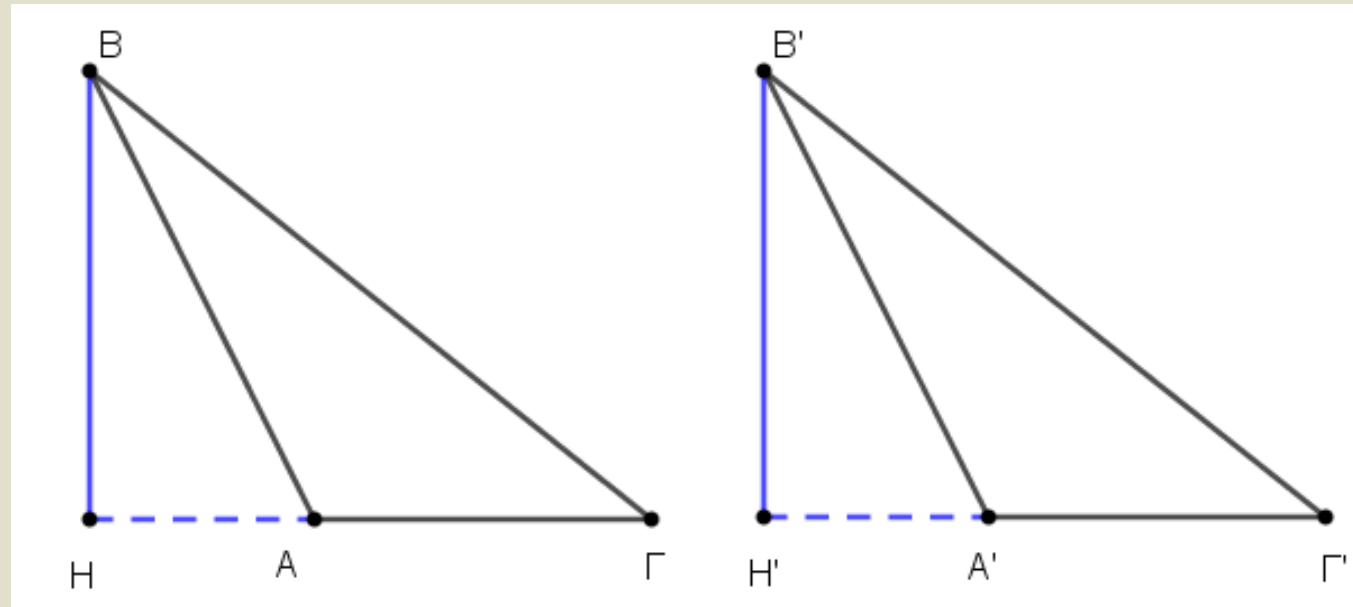
# Θέμα 12149 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} > 90^\circ$ ) και  $A'B'\Gamma'$  ( $\widehat{A}' > 90^\circ$ ) με  $\gamma = \gamma'$  και  $\beta = \beta'$ . Αν τα ύψη  $BH$  και  $B'H'$  των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α)  $B\widehat{A}H = B'\widehat{A}'H'$ . (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)



## Θέμα 12417 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Έστω δύο κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$ , με  $R=3$ ,  $r=2$  και  $K\Lambda=4$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$  τέμνονται σε δύο σημεία, έστω  $A$  και  $B$ .  
(Μονάδες 15)

β)  $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$  (Μονάδες 10)

## Θέμα 12635 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### Θέμα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $ΑΒ=ΑΓ$  και  $Μ$  είναι το μέσο της βάσης του  $ΒΓ$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  προς τα  $Β,Γ$  αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα  $ΒΔ$  και  $ΓΕ$  ώστε  $ΒΔ=ΓΕ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΜΒΔ$  και  $ΜΓΕ$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $ΜΔΕ$  είναι ίση με τη γωνία  $ΜΕΔ$ . (Μονάδες 10)

## Θέμα 12636 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

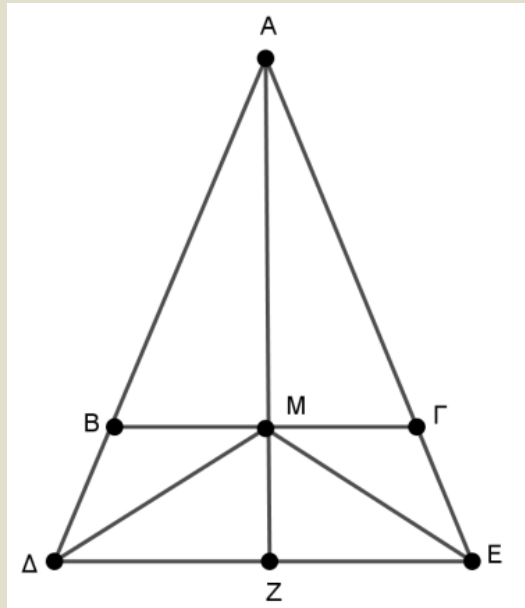
### Θέμα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $M$  είναι το μέσο της βάσης  $B\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$ ,  $AG$  παίρνουμε τα τμήματα  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  αντίστοιχα ώστε  $B\Delta=\Gamma E$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $M\Delta E$  είναι ίση με τη γωνία  $ME\Delta$ . (Μονάδες 6)

γ) Αν η  $AM$  τέμνει την  $\Delta E$  στο σημείο  $Z$  να αποδείξετε ότι η  $AZ$  είναι κάθετη στην  $\Delta E$ . (Μονάδες 7)



## Θέμα 12705 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

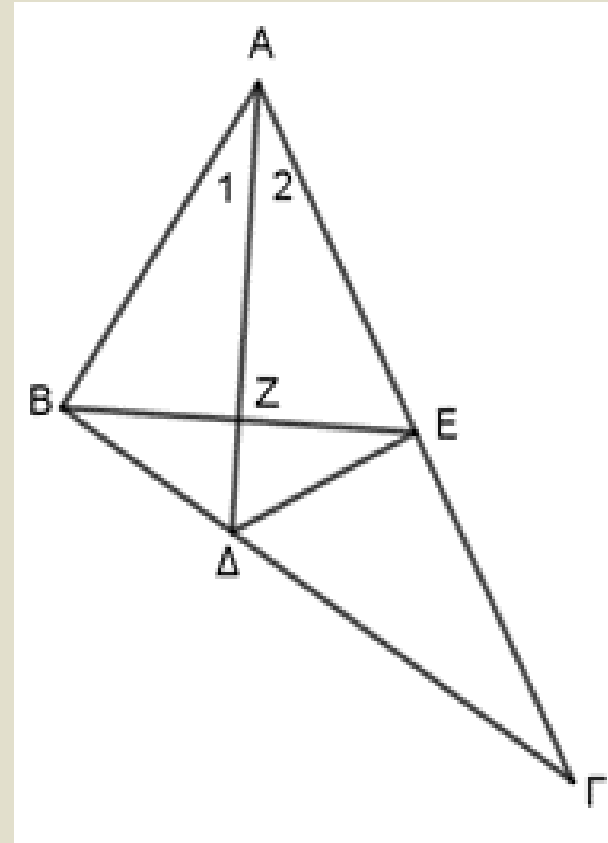
### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Gamma = 2AB$ . Η διχοτόμος του  $A\Delta$  τέμνει την διάμεσο  $BE$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 7)

β)  $\Delta B = \Delta E$ . (Μονάδες 8)

γ)  $AZ \perp BE$  (Μονάδες 10)



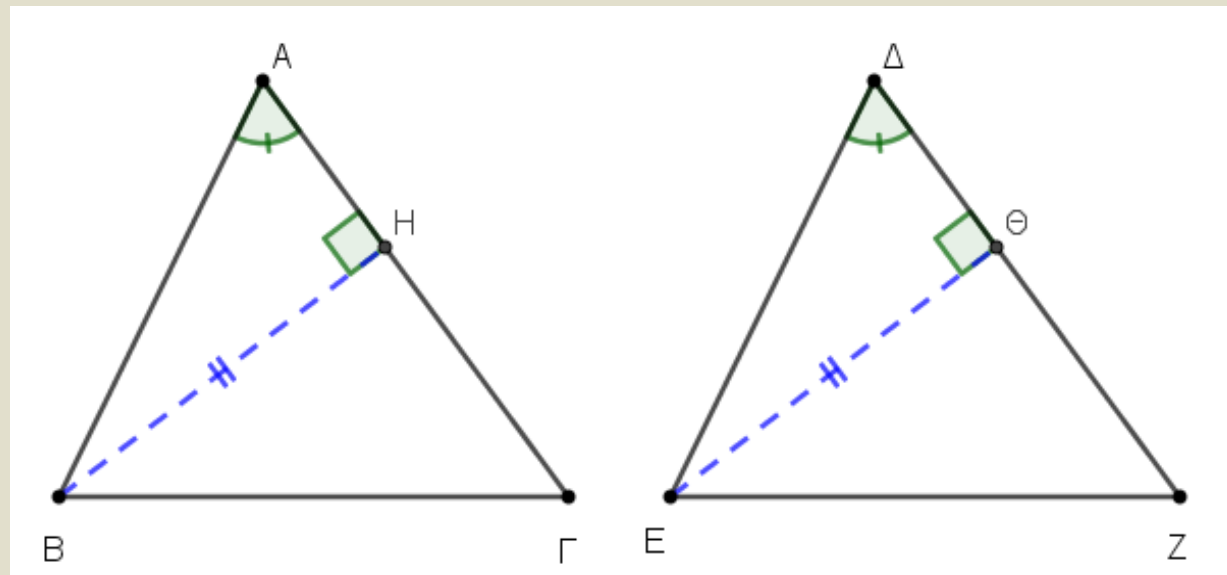
## Θέμα 13517 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $ΔΕΖ$  με  $\hat{A}=\hat{\Delta}$ ,  $ΑΒΓ = ΔΕΖ$ . Αν τα ύψη τους  $ΒΗ$  και  $ΕΘ$  είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $ΑΒ = ΔΕ$ . (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $ΔΕΖ$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)





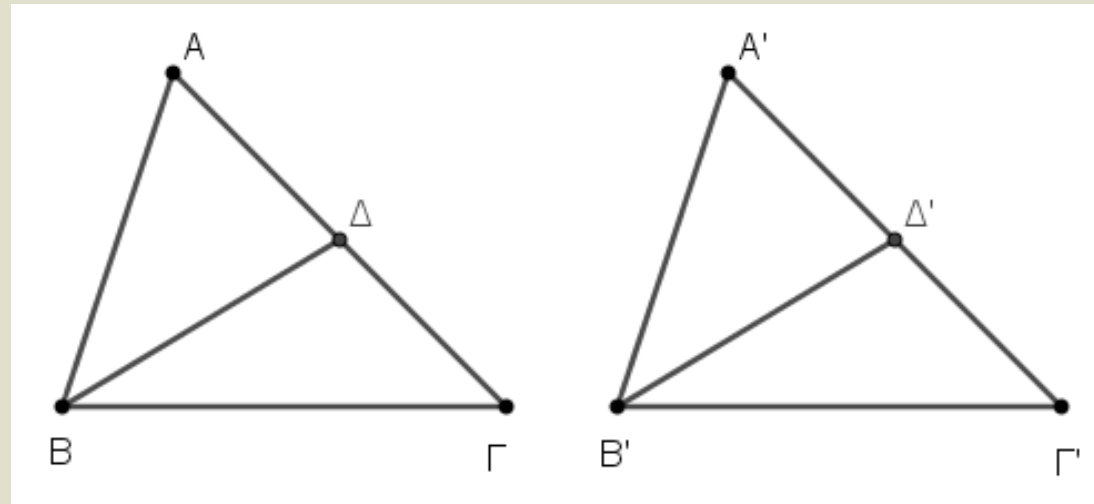
## Θέμα 13518 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $Α'Β'Γ'$  του σχήματος με  $ΑΓ = Α'Γ'$  και  $ΑΒ = Α'Β'$ . Αν οι διάμεσοι  $ΒΔ$  και  $Β'Δ'$  είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{A} = \hat{A}'$  (Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $Α'Β'Γ'$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

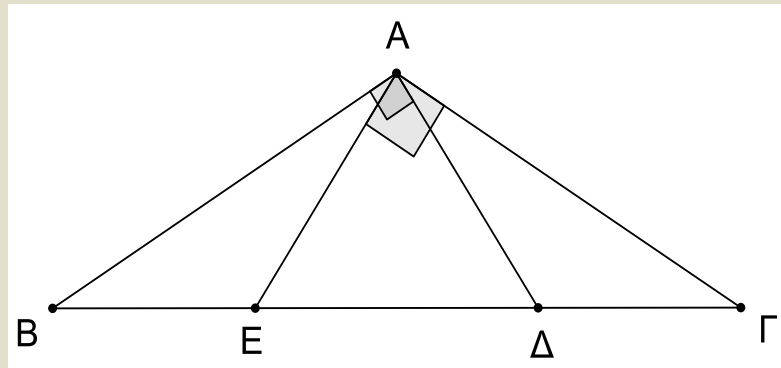


## Θέμα 13533 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $ΑΒ = ΑΓ$ . Η κάθετη στην  $ΑΒ$  στο σημείο  $Α$  τέμνει την πλευρά  $ΒΓ$  στο σημείο  $Δ$  και η κάθετη στην  $ΑΓ$  στο σημείο  $Α$  τέμνει την πλευρά  $ΒΓ$  στο σημείο  $Ε$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΑΓΕ$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- β) το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- γ)  $ΒΕ = ΓΔ$ . (Μονάδες 8)



## Θέμα 13702 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 3

Δίνονται δυο κύκλοι  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$  που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο  $A$ . Μια ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους  $A$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  σε σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  εφάπτεται στη διάκεντρο  $K\Lambda$  των κύκλων  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$ . (Μονάδες 13)

## Θέμα 13757 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι  $(K,2)$  και  $(\Lambda,5)$ .

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου  $ΚΛ$ , αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου  $ΚΛ$ , αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. (Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου  $ΚΛ$ , αν ο κύκλος  $(K,2)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $(\Lambda,5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου  $ΚΛ$ , αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

## Θέμα 13758 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι  $(K,3)$  και  $(\Lambda,8)$ . Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α)  $K\Lambda = 13$ . (Μονάδες 5)

β)  $K\Lambda = 2$ . (Μονάδες 5)

γ)  $K\Lambda = 5$ . (Μονάδες 5)

δ)  $K\Lambda = 11$ . (Μονάδες 5)

ε)  $K\Lambda = 9$ . (Μονάδες 5)

## Θέμα 13759 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho = 6$ . Έστω  $d$  η απόσταση του κέντρου  $O$  του κύκλου από μια ευθεία  $(\varepsilon)$ . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας  $(\varepsilon)$  στις εξής περιπτώσεις:

α)  $d = 3$ . (Μονάδες 9)

β)  $d = 6$ . (Μονάδες 8)

γ)  $d = 9$ . (Μονάδες 8)

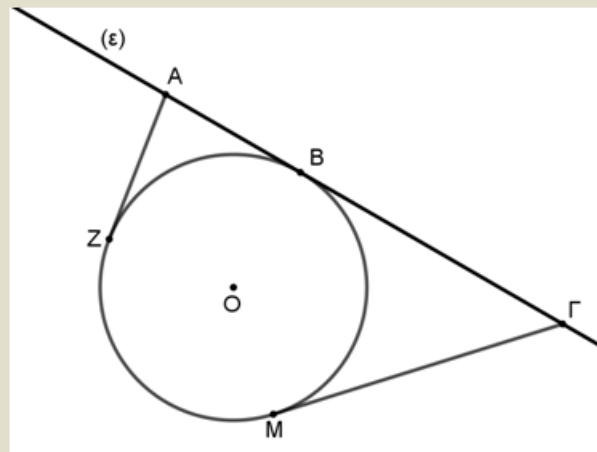
## Θέμα 13817 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Σε σημείο  $B$  του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία  $(\varepsilon)$ . Θεωρούμε στην ευθεία  $(\varepsilon)$  δύο σημεία  $A$  και  $\Gamma$  εκατέρωθεν του  $B$  έτσι ώστε  $BA < B\Gamma$  και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AZ$  και  $\Gamma M$  στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = AZ + M\Gamma$ . (Μονάδες 10)



## Θέμα 13823 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 4

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  ισχύει  $\rho < R$  και  $AB = 6$ .

i. Να αποδείξετε ότι  $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$ .

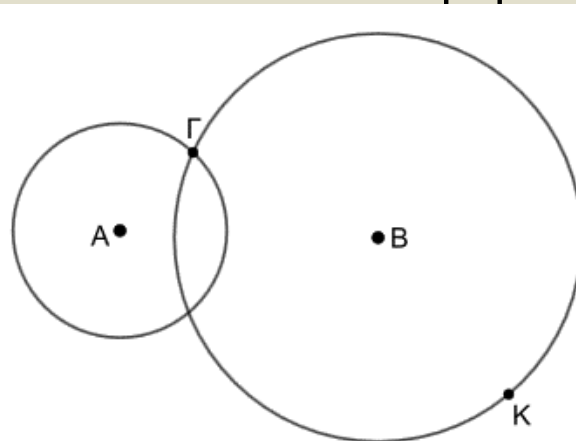
ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα  $K$  και  $\Gamma$  έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει  $R$  από το  $B$ .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει  $\rho$  από το  $A$ .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ , τα οποία απέχουν μεταξύ τους  $6$ . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει  $3$  από το  $A$  του χάρτη και  $2$  από το  $B$  του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;



(Μονάδες 9)



## Θέμα 13826 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

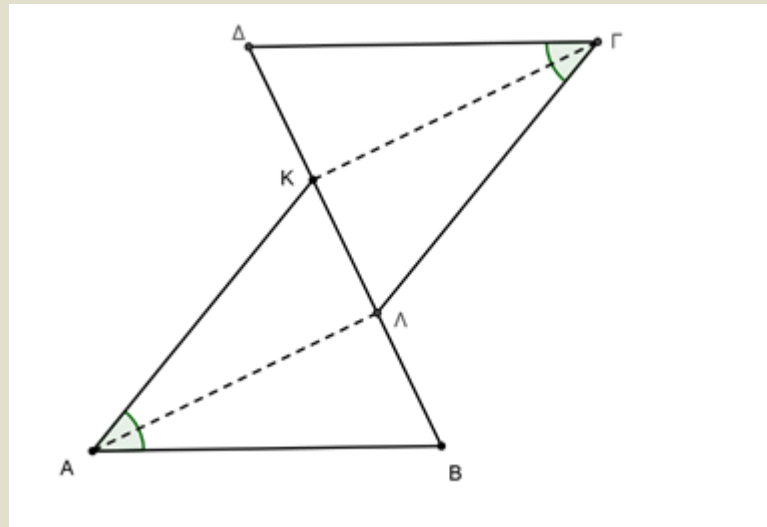
### ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα  $ΑΒΚ$  και  $ΓΔΛ$  του σχήματος έχουν  $ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ = ΓΛ$  και  $\hat{Α} = \hat{Γ}$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΑΒΚ$  και  $ΓΔΛ$  είναι ίσα και ότι έχουν  $ΒΚ = ΔΛ$ .  
(Μονάδες 12)

β) Έστω ότι  $Λ$  και  $Κ$  είναι τα μέσα των  $ΒΚ$  και  $ΔΛ$  αντίστοιχα:

- i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα  $ΒΛ$ ,  $ΛΚ$  και  $ΚΔ$  είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι οι  $ΑΛ$  και  $ΓΚ$  είναι κάθετες στην ευθεία  $ΚΛ$ . (Μονάδες 8)



## Θέμα 13835 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

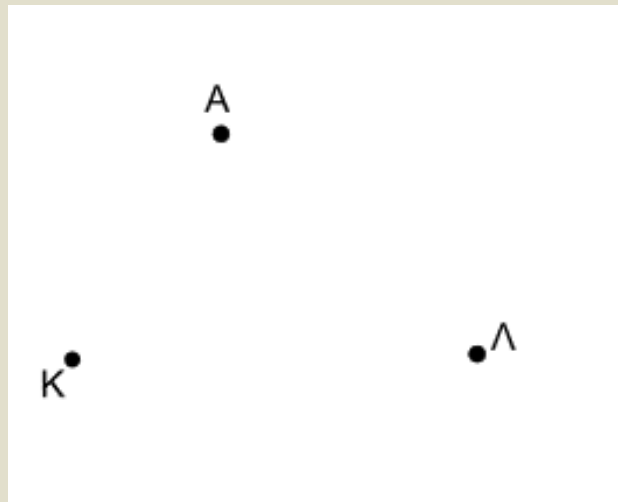
Τα σημεία  $A$ ,  $K$  και  $\Lambda$  δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Το σημείο  $A$  απέχει 4 από το  $K$  και 5 από το  $\Lambda$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $1 < K\Lambda < 9$ . (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο  $B$  του επιπέδου διαφορετικό από το  $A$ , που να απέχει 4 από το  $K$  και 5 από το  $\Lambda$ .

(Μονάδες 13)

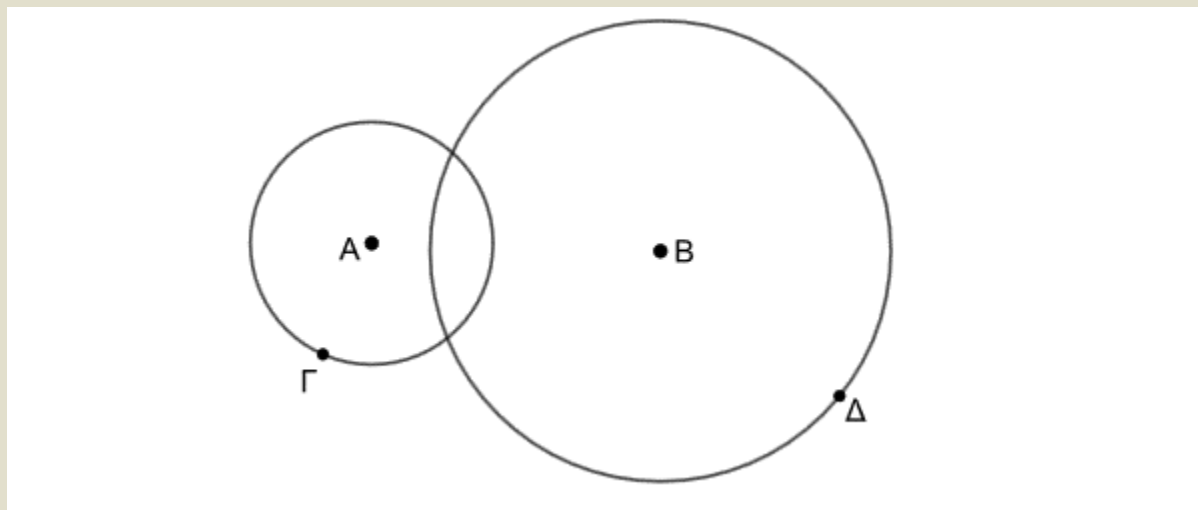


## Θέμα 13836 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  ισχύει  $\rho < R$ .

Να αποδείξετε ότι  $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$ . (Μονάδες 10) β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το  $A$  του χάρτη και 5 από το  $B$  του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός; (Μονάδες 15)



## Θέμα 13839 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

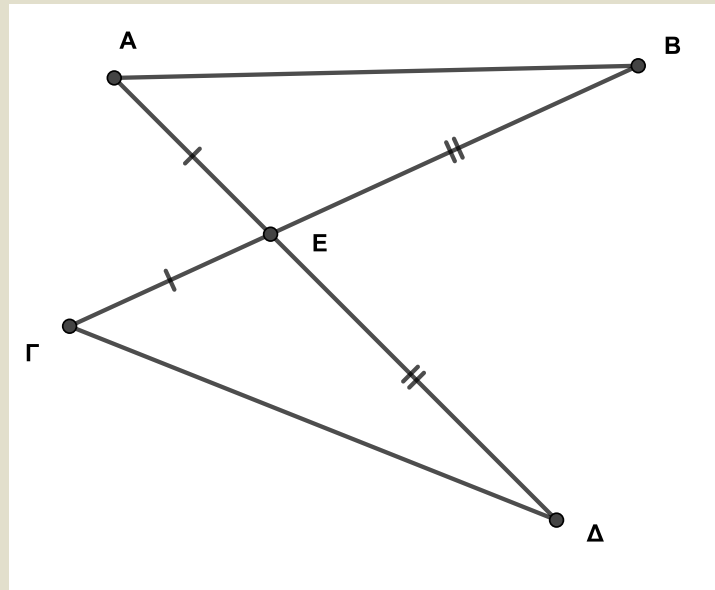
### ΘΕΜΑ 4

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $ΑΔ$  και  $ΒΓ$  τέμνονται στο σημείο  $Ε$  έτσι ώστε  $ΑΕ=ΓΕ$  και  $ΒΕ=ΕΔ$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΑΒΕ$  και  $ΓΔΕ$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις  $ΕΗ$  και  $ΕΘ$  του σημείου  $Ε$  από τις πλευρές  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$ , αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$  προς τα  $Α$  και  $Γ$  αντίστοιχα τέμνονται στο  $Ζ$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΒΔΖ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)



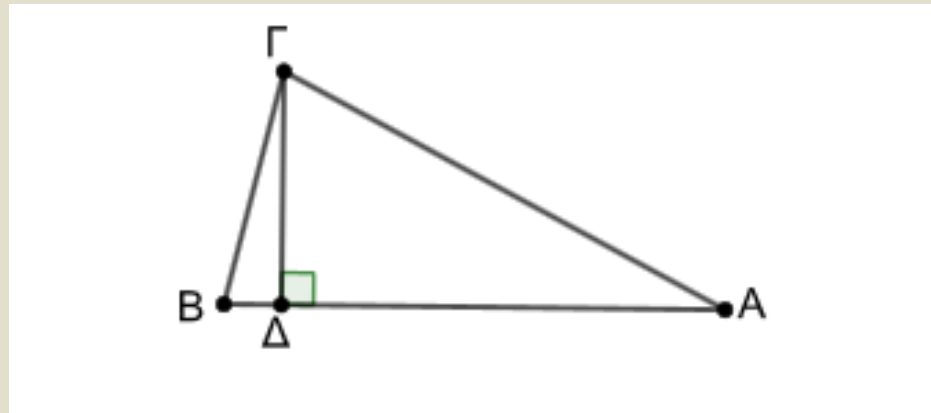
## Θέμα 13844 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 2

Στο παραπάνω σχήμα ισχύει ότι  $B\Delta < A\Delta$ ,  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma > B\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)



## Θέμα 13846 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  με  $R > \rho$ . Επίσης  $AB = 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $R + \rho < 9$ . (Μονάδες 7)

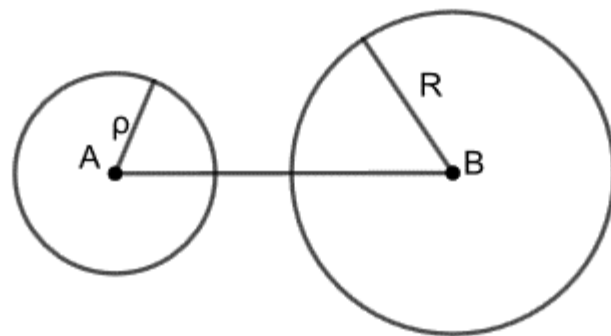
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο  $KLM$  με  $KL$  να είναι ίση με  $\rho$  και η πλευρά  $LM$  να είναι ίση με  $R$ . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9. (Μονάδες 10)

γ) Έστω το τρίγωνο  $KLM$  που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες  $I_1$  και  $I_2$  που περιγράφονται παρακάτω;

$I_1$ : «Η απόσταση των σημείων από το  $K$  είναι ίση με  $\rho$ ».

$I_2$ : «Η απόσταση των σημείων από το  $M$  είναι ίση με  $R$ ».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



# Θέμα 13854 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

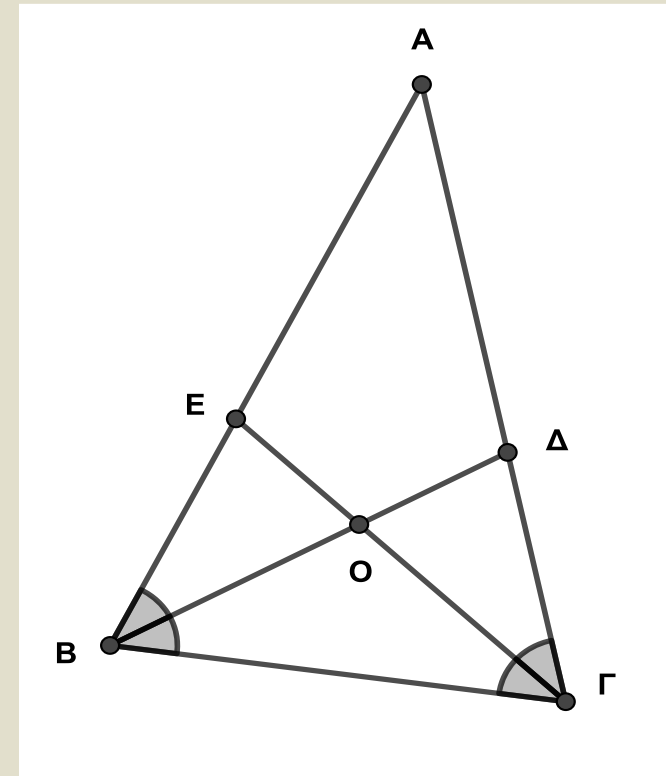
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ=ΑΓ$ ). Οι διχοτόμοι  $ΒΔ$  και  $ΓΕ$  των γωνιών  $\hat{Β}$  και  $\hat{Γ}$  αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο  $Ο$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $ΒΔ=ΓΕ$ . (Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία  $Ε$  και  $Δ$  φέρνουμε κάθετες  $ΕΛ$  και  $ΔΚ$  στις πλευρές  $ΑΓ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:  $ΔΚ=ΕΛ$ . (Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο  $Ζ$  της πλευράς  $ΒΓ$  που η απόστασή του από το σημείο  $Ε$  να ισούται με την απόσταση των σημείων  $Δ$  και  $Κ$  αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



# Θέμα 14880 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ = ΑΔ$  και  $ΓΒ = ΓΔ$ . Αν  $Ε$  είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $ΒΑ$  και  $ΓΔ$  και  $Ζ$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $ΔΑ$  και  $ΓΒ$  να αποδείξετε ότι:

α) Η  $ΓΑ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $ΒΓΔ$ . (Μονάδες 7)

β)  $ΓΖ = ΓΕ$  (Μονάδες 9)

γ)  $ΕΖ // ΒΔ$  (Μονάδες 9)

