

Τράπεζα θεμάτων Α' λυκείου – Άλγεβρα κεφάλαιο 2^ο

30 θέματα - 30/5/2022

Θέμα 12673 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

Θέμα 12685 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta$. (Μονάδες 13)

Θέμα 12922 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

Θέμα 12943 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ (Μονάδες 13)

Θέμα 13053 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\beta + \gamma = -\alpha. \text{ (Μονάδες 6)}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha. \text{ (Μονάδες 6)}$$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0. \text{ (Μονάδες 13)}$$

Θέμα 13088 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$ (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

Θέμα 13177 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.
(Μονάδες 9)

Θέμα 13179 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)

Θέμα 13266 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

Θέμα 13323 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 13472 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. (Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$. (Μονάδες 9)

Θέμα 14329 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}, B = \alpha^2$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 15)

Θέμα 14412 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$. (Μονάδες 13)

Θέμα 14452 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$. (Μονάδες 10)

Θέμα 14458 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι $(2y - x)^2 = 0$ (Μονάδες 8)

$$y = \frac{x}{2}. \text{ (Μονάδες 5)}$$

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2.$ (Μονάδες 12)

Θέμα 14473 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$. (Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14475 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$. (Μονάδες 13)

Θέμα 14489 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$. (Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι. (Μονάδες 15)

Θέμα 14491 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

- α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$ (Μονάδες 12)
- β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

Θέμα 14492 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14555 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$. (Μονάδες 13)

Θέμα 14572 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (Μονάδες 10)

β) $|2x + 4| < 2$. (Μονάδες 15)

Θέμα 14599 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$. (Μονάδες 13)

Θέμα 14602 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 3

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

Θέμα 14617 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$. (Μονάδες 13)

Θέμα 14682 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$. (Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14704 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

Θέμα 14774 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}. \quad (\text{Μονάδες 12})$$

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in 0, +\infty$ ισχύει: $x < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $0,4$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η

ανισότητα: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. (Μονάδες 15)

Θέμα 14931 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 10)