## Θέμα 12673 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=12673&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $α, β$ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<α<β$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{β}<\frac{3}{α}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $α^{3}+\frac{3}{β}<β^{3}+\frac{3}{α}$.

(Μονάδες 12)

## Θέμα 12685 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=12685&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $α,β\ne 0,$ ισχύει ότι:

 $\left(α+β\right)\left(\frac{1}{α}+\frac{1}{β}\right)=4,$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{α}{β}+\frac{β}{α}=2.$

(Μονάδες 12)

β) $α=β.$

(Μονάδες 13)

## Θέμα 12922 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=12922&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $Α=α^{2}+β^{2}$ και $Β=2αβ$, $α,β\in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $α,β\in R$ για τις οποίες $Α=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $Α-Β\geq 0$ για κάθε $α,β\in R$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $α,β\in R$ ώστε να ισχύει $Α-Β=0$.

(Μονάδες 8)

## Θέμα 12943 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=12943&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $α=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $β=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $α+β$και το γινόμενο $α⋅β$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $α^{2}+β^{2}=7$

(Μονάδες 13)

## Θέμα 13053 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13053&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $α+β+γ=0$ και $αβγ\ne 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

$β+γ=-α$.

(Μονάδες 6)

$\frac{α^{2}}{β+γ}=-α$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{β^{2}}{γ+α}$, $\frac{γ^{2}}{α+β}$ και να αποδείξετε ότι

$\frac{α^{2}}{β+γ}+\frac{β^{2}}{γ+α}+\frac{γ^{2}}{α+β}=0$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 13088 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13088&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $Α=2(x+y)^{2}-(x-y)^{2}-6xy-y^{2} $

α) Να αποδείξετε ότι : Α = x2

 (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι o αριθμός $B=2∙2022^{2}-2020^{2}-6∙2021-1 $είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

 (Μονάδες 12)

## Θέμα 13177 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13177&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $α,β$ για τους οποίους ισχύει $2\leq α\leq 3$ και $-2\leq β\leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $\left|α-3\right|=3-α$ και $\left|β+2\right|=β+2$.

 (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0\leq α+β\leq 2$.

 (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\left|α+β\right|+\left|α-3\right|-\left|β+2\right|$ είναι ίση με 1.

 (Μονάδες 9)

## Θέμα 13179 - 4o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13179&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $α,β$ για τους οποίους ισχύει $1\leq β\leq 2$ και $2\leq α\leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των $α$ και $β$ είναι μικρότερη ή ίση του 3.

 (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{β}{α}\leq 1\leq \frac{α}{β}$.

 (Μονάδες 5)

ii. Nα βρείτε τους αριθμούς $α$ και $β$ για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{β}{α}\right|=\left|\frac{α}{β}-1\right|$ .

 (Μονάδες 6)

## Θέμα 13266 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13266&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $Α=α^{2}+4α+5$ και $Β=\left(2β+1\right)^{2}-1$, με $α,β\in R$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $α,β\in R$ ισχύει $Α=\left(α+2\right)^{2}+1$.

(Μονάδες 8)

β)

1. Να δείξετε ότι $Α+Β \geq 0$.

 (Μονάδες 9)

1. Για ποιες τιμές των $α,β\in R$ ισχύει $Α+Β=0$;

 (Μονάδες 8)

## Θέμα 13323 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13323&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x, y$ ισχύει:

$(x-1)^{2}+(y+4)^{2}=x^{2}+y^{2}-2x+8y+17$.

 (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $x$ και $y$ώστε: $x^{2}+y^{2}-2x+8y+17=0$.

 (Μονάδες 13)

## Θέμα 13472 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=13472&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $α^{2}=2α+β$ και $β^{2}=2β+α$.

α) Να αποδείξετε ότι:

1. $α^{2}-β^{2}=α-β$.

(Μονάδες 8)

1. $α+β=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $Α=α^{2}+β^{2}$.

(Μονάδες 9)

## Θέμα 14329 - 3o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14329&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $Α=\frac{-α}{β},Β=α^{2}.$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών $α,β$ οι αλγεβρικές παραστάσεις $Α,Β$ είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $Α,Β$ είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)

## Θέμα 14412 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14412&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $α,β$ ισχύει $α>β$, με $β>1$ και $α>1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{α-β}{\left|α-β\right|}-\frac{\left|1-α\right|}{1-α}=2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $α+β>\frac{α-β}{\left|α-β\right|}-\frac{\left|1-α\right|}{1-α}$ .

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14452 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14452&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $α=\sqrt{3}-1$ και $β=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $α^{2}+αβ+β^{2}=10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{β}{α}+\frac{α}{β}+1=5$.

(Μονάδες 10)

## Θέμα 14458 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14458&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $x, y$πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$(x+4y)(x+y)=9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$(2y-x)^{2}=0$$

(Μονάδες 8)

$y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^{2}+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^{2}=10y^{2}$.

(Μονάδες 12)

## Θέμα 14473 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14473&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς $x$ και $y$ ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^{2}+3y^{2}+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14475 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14475&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Αν $α$ και $β$ πραγματικοί αριθμοί με $2\leq α\leq 4$ και $-4\leq β\leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $α+2β$ .

(Μονάδες 12)

β) $α-β$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14489 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14489&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2α-1 και β-1$ είναι αντίστροφοι, με $α \ne 1 και β\ne 1$ να δείξετε ότι:

α) $2α+β=2αβ$ .

 (Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x=α-β$ και $y=α\left(1-2β\right)+2β$ είναι αντίθετοι.

 (Μονάδες 15)

## Θέμα 14491 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14491&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η ανίσωση |y – 3| < 1

 (Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με 1 < x < 3 και

2 < y < 4 τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

 (Μονάδες 13)

## Θέμα 14492 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14492&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7 και 2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

 (Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

 (Μονάδες 13)

## Θέμα 14555 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14555&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $x,y$ ισχύει η σχέση

 $\left(x - 2y\right)^{2} - 2\left(3 - 2xy\right)= 5y^{2} – 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^{2} - y^{2} = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P=\left(x+y\right)^{3}\left(x - y\right)^{3}$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14572 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14572&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός $x$, για τον οποίο ισχύει: $\left|x+2\right|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$*.*

(Mονάδες 10)

β) $\left|2x+4\right|<2$.

(Mονάδες 15)

## Θέμα 14599 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14599&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό $x$ ισχύει $\left|2x\right|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in \left(-1,1\right)$, ισχύει $x^{2}<1$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14602 - 3o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14602&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 3

Αν $0<α<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<α^{3}<α$.

 (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

 $0, α^{3}, 1, α, \frac{1}{α}$.

 (Μονάδες 12)

## Θέμα 14617 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14617&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $\left|x - 7\right|<1$ $\left(I\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $x\in \left(6, 8\right)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k\in \left(6, 8\right)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in \left(3, 4\right)$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14682 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14682&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $Α=(\sqrt{3})^{6 }$ και $Β=(\sqrt[3]{3})^{6}$.

α) Να δείξετε ότι: $Α-Β=18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$ , $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 14704 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14704&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

Αν 2 ≤ x ≤3 και 1 ≤ y ≤ 2, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

 α) x + y

(Μονάδες 5)

 β) 2x-3y

 (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x }{y }$

(Μονάδες 10)

## Θέμα 14774 - 2o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14774&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}=9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^{2}=6-2\sqrt{5}$

 (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}$.

 (Μονάδες 12)

## Θέμα 14801 - 1o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14801&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $α, β, γ, δ$ ισχύει η πρόταση:

 Αν $α<β$ και $γ<δ$, τότε $α⋅γ<β⋅δ$.

ii. Για κάθε $θ\in \left(0,+\infty \right)$ ισχύει: $\left|x\right|<θ⇔-θ<x<θ$.

iii. Η εξίσωση $x^{3}=5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $α>0$ και $Δ<0$, όπου $Δ$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $αx^{2}+βx+γ$, τότε το τριώνυμο $αx^{2}+βx+γ$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $x$.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης $f$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0,4\right]$.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | 0 | $$1$$ | 1 | 2 | $$4$$ |
| $$y=f(x)$$ | 0 | 1 | -1 | 2 | 0,5 |

 (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $α,β$ ισχύει η ανισότητα:

$\left|α+β\right|\leq \left|α\right|+\left|β\right|$.

 (Μονάδες 15)

## Θέμα 14931 - 4o [Ενδεικτική Απάντηση](https://trapeza.iep.edu.gr/public/showfile.php/?id=14931&filetype=solution#view=Fit&toolbar=1)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $α,β$, με $α=1+\sqrt{2}$ και $β=1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Α=α^{2}-β^{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Β=\sqrt{α^{2}}-\sqrt{β^{2}}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $Α=4\sqrt{2}$ και $Β=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{α^{2}-β^{2}}>\sqrt{α^{2}}-\sqrt{β^{2}}$.

(Μονάδες 10)