

**Τράπεζα Θεμάτων  
Β' Λυκείου –  
μαθηματικά  
προσανατολισμού**

179 θέματα - 22/5/2022

# **Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : διανύσματα**

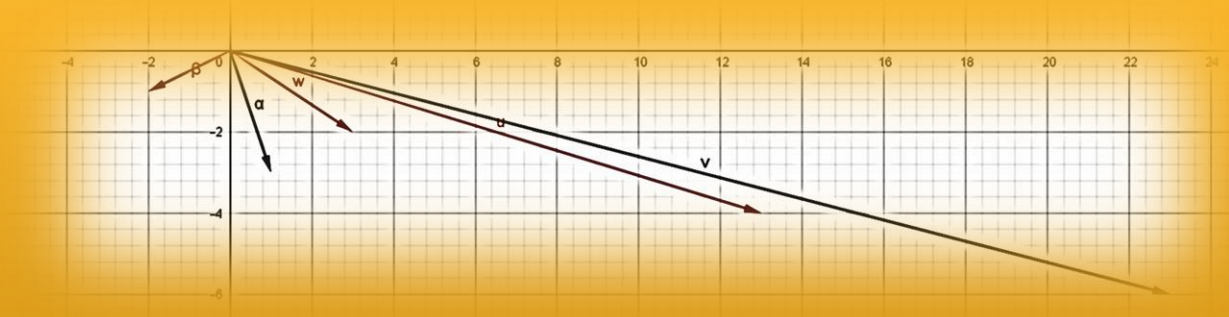
## Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, -3)$  και  $\vec{\beta} = (-2, -1)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$  (Μονάδες 9)

β) Αν  $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ , να γράψετε το  $\vec{w}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν τα  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{u}$  είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

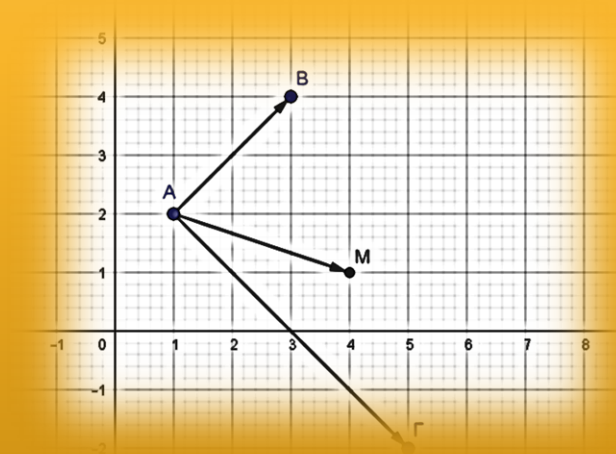


## ΑΣΚΗΣΗ 2-14586

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$ ,  $B(3,4)$  και  $\Gamma(5,-2)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{A\Gamma}$  και να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- β) Αν  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ , να βρείτε τα μέτρα των  $\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να γραφεί το  $\overrightarrow{B\Gamma}$  ως γραμμικός συνδυασμός των  $\overrightarrow{A\Gamma}$  και  $\overrightarrow{AM}$ . (Μονάδες 8)

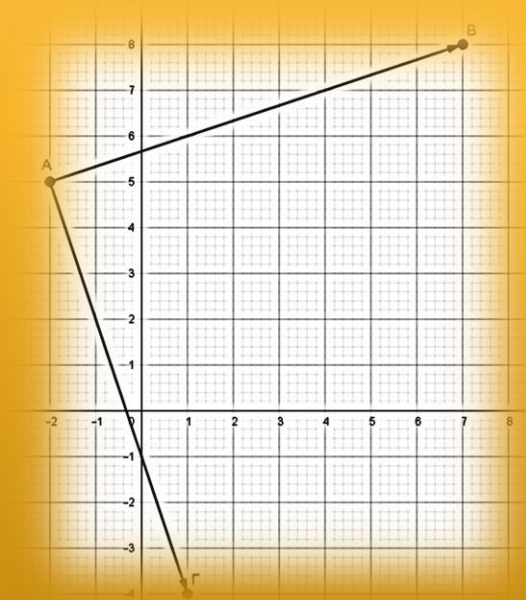


## ΑΣΚΗΣΗ 2-14953

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-2,5)$ ,  $B(7,8)$ ,  $\Gamma(1,-4)$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ . (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ . (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία  $\widehat{BA\Gamma}$ . (Μονάδες 5)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-15010

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου  $A, B, \Gamma$  και τα διανύσματα  $\overrightarrow{B\Delta}$  και  $\overrightarrow{\Gamma E}$  τέτοια ώστε  $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}$  και  $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}$ .

- α) i. Να δείξετε ότι  $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$  και  $\overrightarrow{A E} = \overrightarrow{\Gamma B}$ . (Μονάδες 8)
- ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\overrightarrow{A\Delta}$  και  $\overrightarrow{A E}$  είναι αντίθετα. (Μονάδες 8)
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία  $A, \Delta$  και  $E$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15038

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  τέτοια ώστε  $|\vec{\alpha}| = 3$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ .

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ . (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τα  $\vec{\alpha}^2$  και  $\vec{\beta}^2$ . (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$ . (Μονάδες 10)

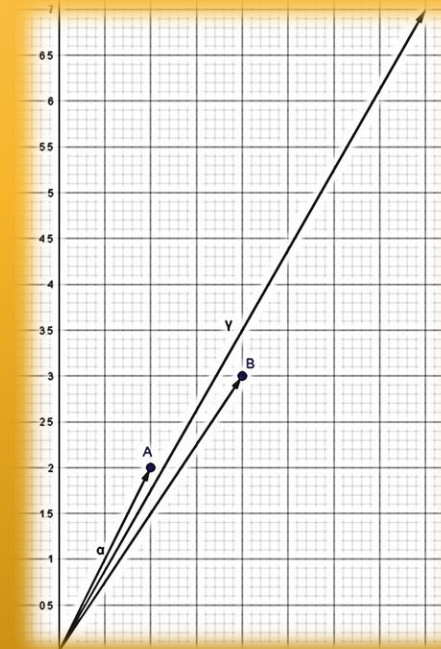


## ΑΣΚΗΣΗ 2-15073

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1,2)$  και  $\vec{\beta} = (2,3)$ .

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ . (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ . (Μονάδες 8)
- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ . (Μονάδες 9)

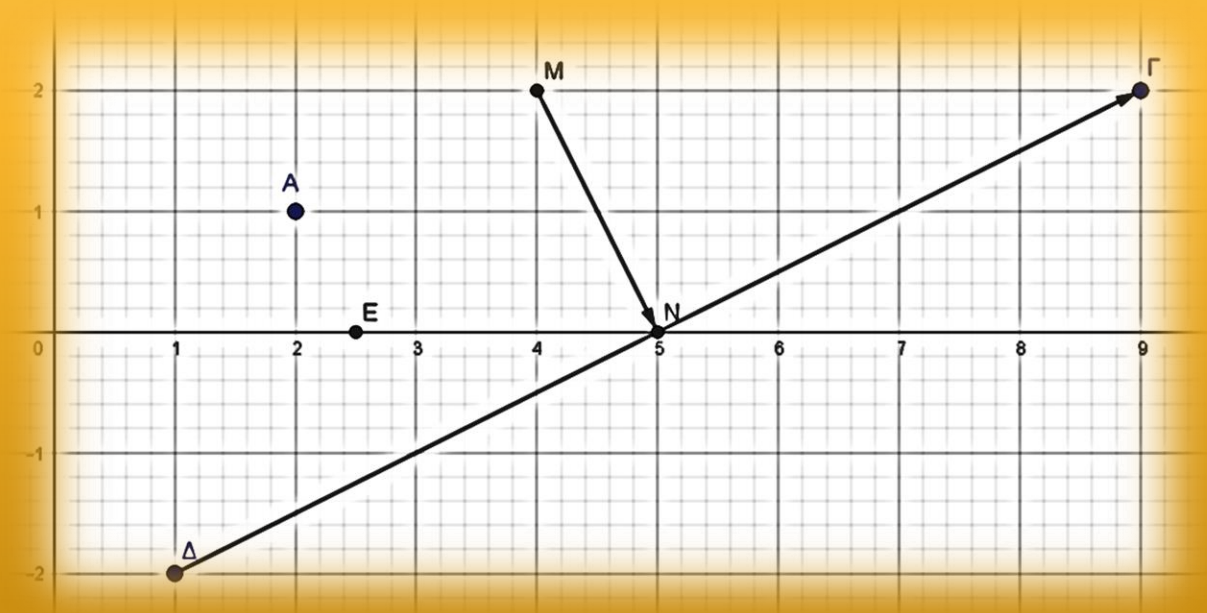


## ΑΣΚΗΣΗ 2-15186

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(2,1)$ ,  $B(6,3)$ ,  $\Delta(1,-2)$  και  $\Gamma(9,2)$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το μέσο  $M$  του τμήματος  $AB$  έχει συντεταγμένες  $(4,2)$  και το μέσο  $N$  του τμήματος  $\Gamma\Delta$  έχει συντεταγμένες  $(5,0)$ . (Μονάδες 8)
- β)  $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$  και  $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$ . (Μονάδες 8)
- γ)  $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 9)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-15317

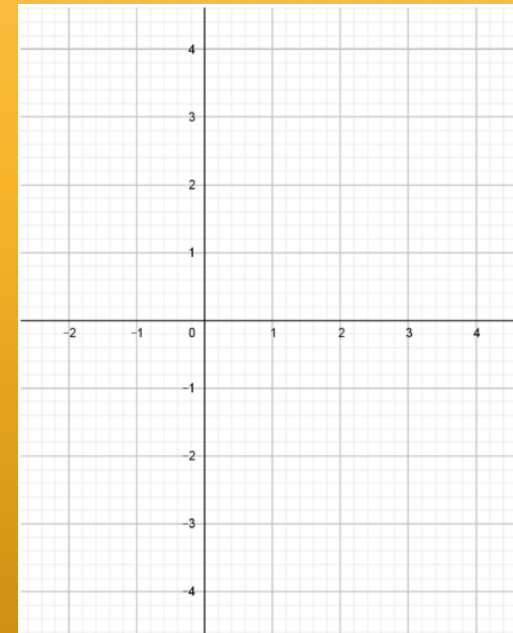
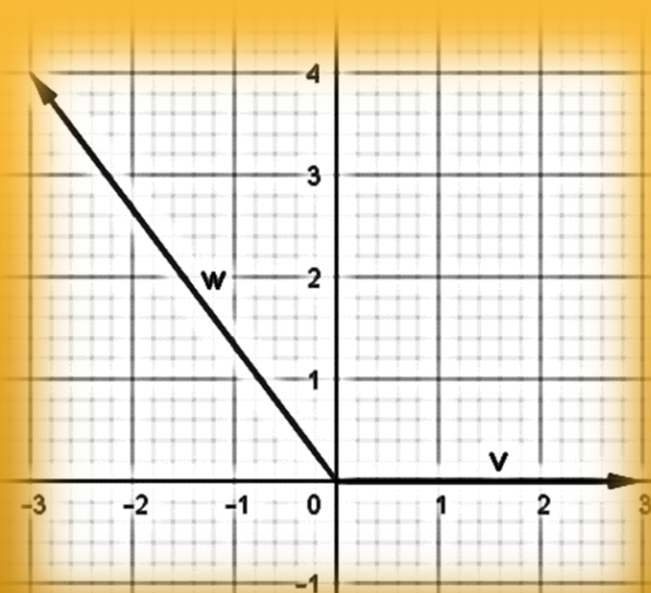
### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{v} = (3, 0)$  και  $\vec{w} = (-3, 4)$ .

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

β) i) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$ . (Μονάδες 10)

ii) Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζουν τα διανύσματα (Μονάδες 3)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-15379

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1,3)$ ,  $\vec{\beta} = (3,-1)$ . Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 13)
- β) το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ . (Μονάδες 12)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15463

[Ενδεικτική Απάντηση](#)

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB} = (2,1)$  και  $\vec{AG} = (3,-1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{BG} = (1,-2)$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\vec{AB} \perp \vec{BG}$ . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι  $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$ . (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15825

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$  και το  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$  (Μονάδες 10)

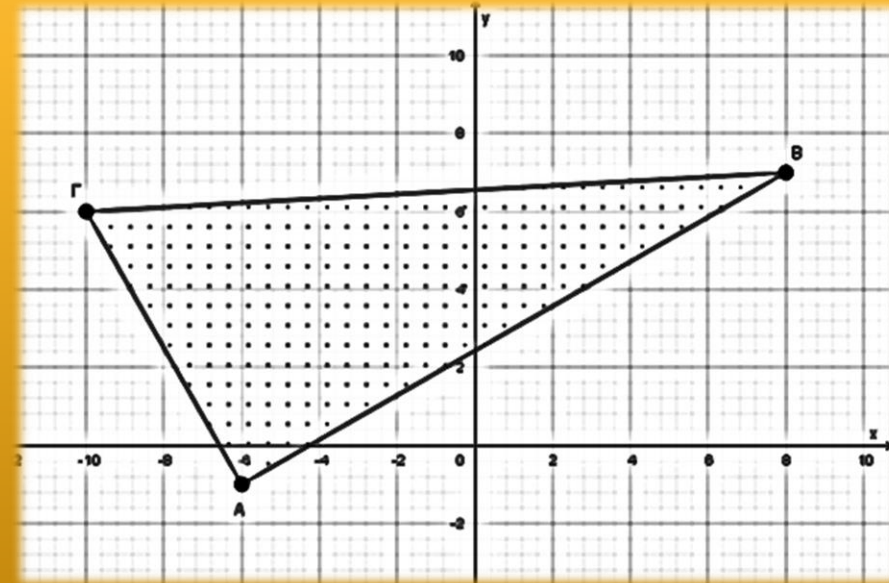
γ) Να βρείτε την  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})}$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15996

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(-6,-1)$ ,  $B(8,7)$ ,  $\Gamma(-10,6)$ , τα οποία ορίζουν τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{B\Gamma}$  και του αθροίσματος τους  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$  (Μονάδες 10)
- β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. (Μονάδες 15)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-16141

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς 10 και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

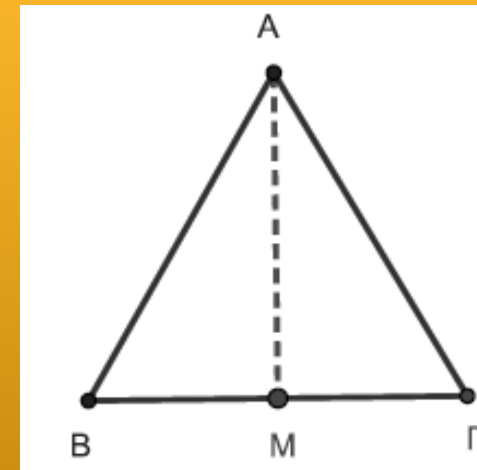
α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i)  $(\widehat{AB, AG})$     ii)  $(\widehat{AM, BG})$     iii)  $(\widehat{AM, GA})$

iv)  $(\widehat{BM, GM})$     v)  $(\widehat{GM, GB})$     (Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG}$     ii)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}$     iii)  $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB}$     (Μονάδες 15)





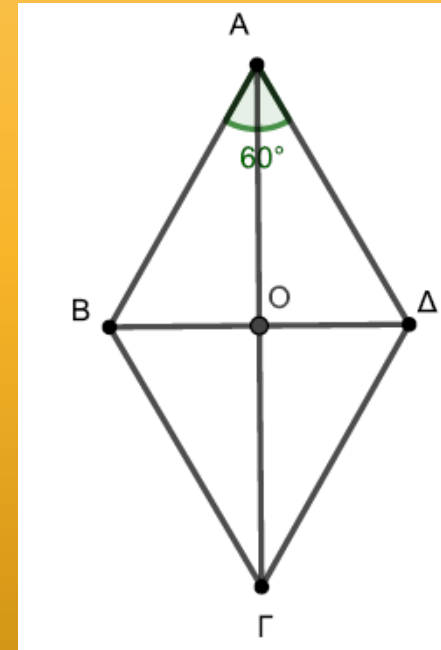
## ΑΣΚΗΣΗ 2-16144

## Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ρόμβος  $ΑΒΓΔ$  με κέντρο  $Ο$ , πλευρά  $4$  και  $\widehat{Α} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- α)  $\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$     β)  $\overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΒΓ}$     γ)  $\overrightarrow{ΟΔ} \cdot \overrightarrow{ΑΟ}$   
δ)  $\overrightarrow{ΟΔ} \cdot \overrightarrow{ΟΒ}$     ε)  $\overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΓΔ}$

(Μονάδες 25)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-16147

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$ ,  $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$ ,  $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$  και  $\vec{\delta} = (-1,1)$ .

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\delta}$ . (Μονάδες 9)
- β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\delta}$  με το θετικό ημιάξονα Οx. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\gamma}$ . (Μονάδες 6)

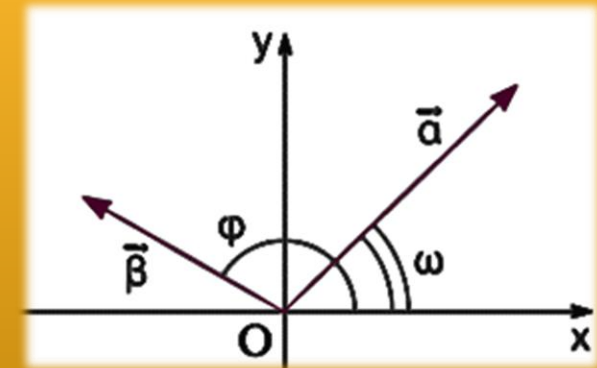
## ΑΣΚΗΣΗ 2-16151

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3,3)$  και  $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$ .

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ . (Μονάδες 9)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-16426

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, -1)$  και  $\vec{\beta} = (-3, 2)$ .

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο  $\vec{\alpha}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (x, y)$  όταν  $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$  και  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$ . (Μονάδες 15)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16427

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(-2,3)$ ,  $B(0,8)$ ,  $\Gamma(5,3)$  και  $\Delta(10,5)$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ . (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$  με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 13)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16428

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  με:  $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$  και  $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$ . (Μονάδες 15)

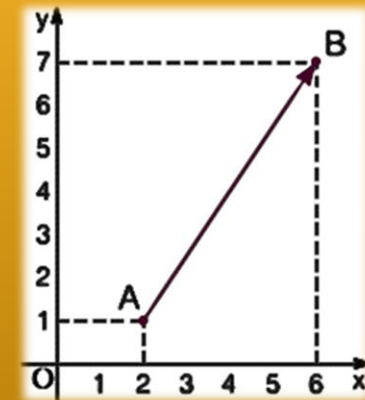
β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16579

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(2,1)$  και  $B(6,7)$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$ . (Μονάδες 7)
- β) Αν  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{v}$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{u} = (-8, -12)$  και  $\vec{v}$  του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)



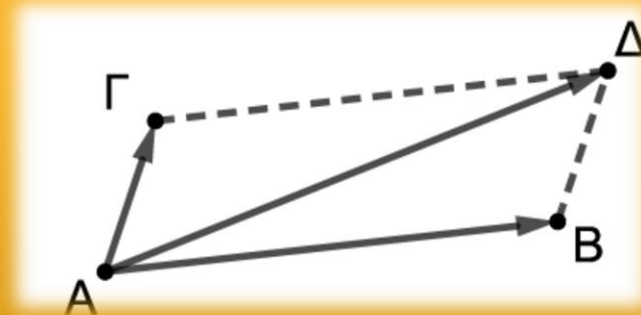
## ΑΣΚΗΣΗ 2-16580

## Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(2,4)$ ,  $B(11,5)$ ,  $\Gamma(3,7)$  και ένα σημείο  $\Delta$  ώστε το  $\overrightarrow{A\Delta}$  να είναι ίσο με το άθροισμα των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

- των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ . (Μονάδες 12)
- του διανύσματος  $\overrightarrow{A\Delta}$ . (Μονάδες 8)
- του σημείου  $\Delta$ . (Μονάδες 5)





## ΑΣΚΗΣΗ 2-16581

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία  $A(-1,6)$ ,  $B(1,2)$  και  $\Gamma(3,-2)$ .

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

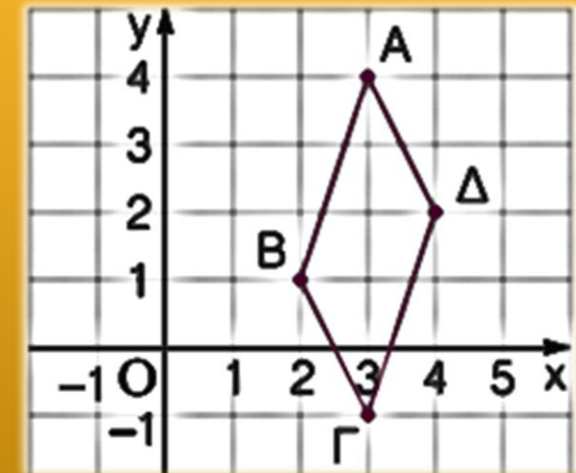
- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$ . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι το  $B$  είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $A\Gamma$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-17070

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία  $A(3,4)$ ,  $B(2,1)$ ,  $\Gamma(3,-1)$  και  $\Delta(4,2)$ .

- Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$ . (Μονάδες 8)
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)



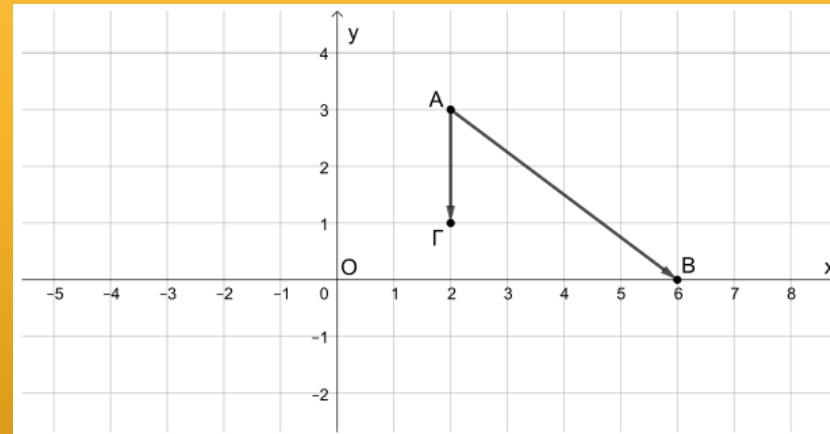
## ΑΣΚΗΣΗ 2-17075

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AG}$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$  και  $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AG}$ . (Μονάδες 13)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-18243

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$  και τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

- α) Να βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ . (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε το  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$ . (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τα  $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$ . (Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε τη γωνία  $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\delta}})$ . (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-19038

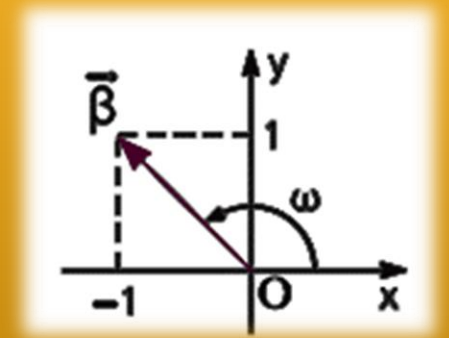
### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2,3)$ ,  $\vec{\beta} = (-1,1)$  και  $\vec{\gamma} = (-5,-5)$ .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\beta}$  με τον άξονα  $x'$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$ ,  $\mu$  ώστε το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  να γραφεί στη μορφή  $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ . (Μονάδες 8)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-20685

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{w} = (-10, 2)$  και τα σημεία  $A(-1, 2)$ ,  $B(\beta, 0)$ ,  $\Gamma(0, \gamma)$ . Τα διανύσματα  $\vec{u}$ ,  $\vec{AB}$  είναι κάθετα και το διάνυσμα  $\vec{w}$  είναι παράλληλο στο διάνυσμα  $\vec{A\Gamma}$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{AB}$  και να αποδείξετε ότι  $\beta = 1$  (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{A\Gamma}$  και να αποδείξετε ότι  $\gamma = \frac{9}{5}$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-20888

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ , για τα οποία ισχύουν:  $|\vec{\alpha}| = 4$ ,  $|\vec{\beta}| = 5$ ,  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$  και  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ .

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ . (Μονάδες 15)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21165

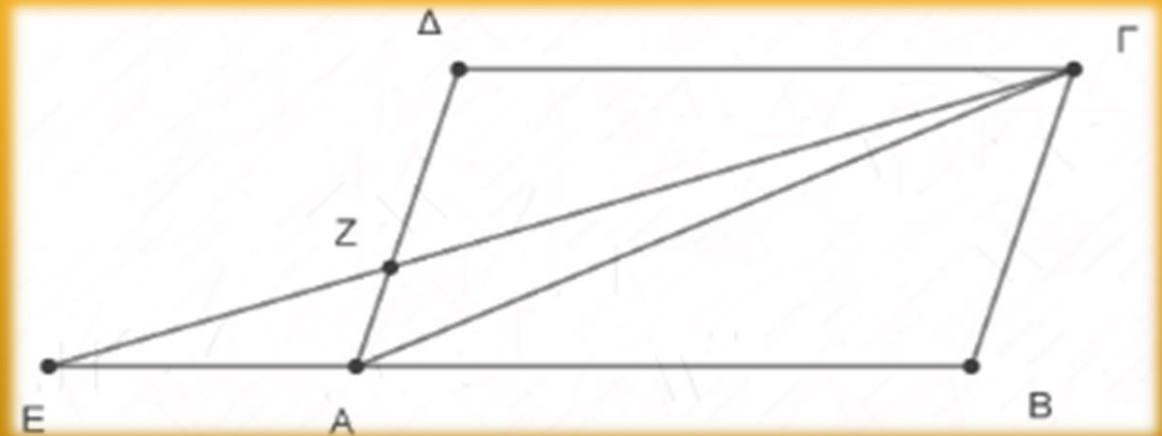
### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και έστω  $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{\beta}$ . Τα σημεία  $Ε$  και  $Ζ$  είναι τέτοια ώστε  $\overrightarrow{ΑΕ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΒ}$  και  $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΔ}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $\overrightarrow{ΕΖ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$  και  $\overrightarrow{ΖΓ} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:  $\overrightarrow{ΖΓ} = 2\overrightarrow{ΕΖ}$ . (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία  $Ζ$ ,  $Ε$  και  $Γ$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)





## ΑΣΚΗΣΗ 2-21662

## Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: -x + y - 2 = 0$  και τα σημεία  $A(-5,1)$  και  $B(-3,5)$ .

- α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς το σημείο  $B$ . (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε:
  - i. την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon'$  που διέρχεται από το  $B$  και είναι κάθετη στην  $\varepsilon$ . (Μονάδες 5)
  - ii. το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$ . (Μονάδες 5)
  - iii. το συμμετρικό του σημείου  $B$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22554

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$ , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$ ,  $y'y$  τα  $\vec{i}, \vec{j}$  αντίστοιχα, τα σημεία  $A$  και  $B$  έχουν διανύσματα θέσεως  $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  και  $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$ . Έστω  $M$  ένα σημείο τέτοιο ώστε

$$\vec{OM} = \frac{1}{5} (2\vec{OA} - \vec{OB}).$$

**α) Να αποδείξετε ότι:**

**i.**  $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$  (Μονάδες 8)

**ii.**  $\vec{OM} = \vec{j}$  (Μονάδες 8)

**β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$ . (Μονάδες 9)**

# Θέμα 4<sup>ο</sup>

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15042

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο του επιπέδου  $M$ , τέτοιο ώστε:  $\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{A\Gamma} = \vec{0}$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $B, \Gamma, M$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ . (Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$  τέτοιοι ώστε  $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = \kappa$  και  $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = \lambda$ .

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα  $\vec{A\Gamma}, \vec{AB}$  ισχύει ότι  $\kappa\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{AB}$ , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι  $\kappa = \lambda = 0$ . (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-17076

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(-3,-1)$ ,  $B(0,3)$  και  $M(x,y)$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AM}, \vec{MB}$  και  $\vec{AB}$ . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{AM}, \vec{MB}$  και  $\vec{AB}$ . (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι  $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$ . (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών  $(x,y)$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$ ». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-17077

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  τα σημεία  $A$  και  $B$  έχουν διανύσματα θέσεως  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$  και  $\overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$ . (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  ως συνάρτηση του  $\lambda$ . (Μονάδες 7)
- γ) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\lambda$  τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18547

Δίνονται τα σημεία  $A(0,-1)$ ,  $B(\lambda,1)$  και  $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε:

- i) Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)
- ii) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ . (Μονάδες 7)

β) Για  $\lambda = -2$ , να βρείτε:

- i) Το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ . (Μονάδες 4)
- ii) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-21885

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Delta, E$  σημεία εσωτερικά των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$ , όπου  $\kappa$  και  $\lambda$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ , τότε:

- α) Να εκφράσετε τα διανύσματα  $\overrightarrow{\Delta E}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 8)
- β) i. Αν  $\kappa = \lambda$ , να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Delta E}$  και  $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{\Delta E}|$ . (Μονάδες 10)
- ii. Αν  $\kappa = \lambda = 2$ , να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα  $\overrightarrow{\Delta E}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$  και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)



**Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1,3)$ ,  $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$  και  $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ .**

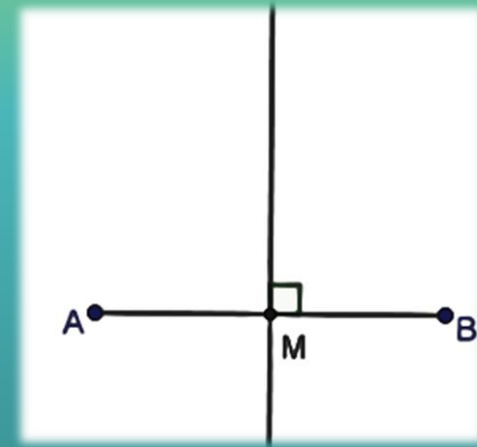
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ . (Μονάδες 7)**
- β) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους τα διανύσματα  $\vec{u} = (3,4)$  και  $\vec{v}$  είναι κάθετα. (Μονάδες 9)**
- γ) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{\beta}$  είναι συγγραμμικά; (Μονάδες 9)**

**κεφάλαιο 2ο :**  
**η ευθεία στο επίπεδο**

## Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα σημεία  $A(1,-1)$  και  $B(3,5)$  όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $AB$ . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 10)



## **ΑΣΚΗΣΗ 2-15044**

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(0,5)$  και  $B(6,-1)$ .

- α) i) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ .  
(Μονάδες 5)
- ii) Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ , είναι το σημείο  $M(3,2)$  (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας ( $\epsilon$ ) του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 15)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15152

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,3)$ ,  $B(-2,2)$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου  $A$  από το σημείο  $B$ . (Μονάδες 5)
- β) Για ποιες τιμές του  $\alpha$ , η απόσταση  $AB$  είναι ίση με την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 8)
- γ) Για  $\alpha = 4$  να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Gamma$  το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον άξονα  $y'y$ . (Μονάδες 12)

Δίνονται τα σημεία  $A(-3,2)$ ,  $B(1,6)$  και  $\Gamma(-13,-7)$ .

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα  $A, B$ . (Μονάδες 7)**
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα  $A, B$  έχει εξίσωση  $y = x + 5$ . (Μονάδες 8)**
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο  $\Gamma$  δεν είναι πάνω στην  $AB$ . (Μονάδες 10)**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15440

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(0,2)$ ,  $B(3,0)$  και  $\Gamma(1,1)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ . (Μονάδες 9)
- β) i) Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ορίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-15657

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon_1: 2x + y = 6$  και  $\varepsilon_2: x - 2y = -2$ .

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3: 3x - y = 4$  διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 10)

Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(2,3)$ .

- α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα  $A, B$ .  
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $AB$  είναι η  $(\varepsilon): y = 2x - 1$ . (Μονάδες 12)  
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο  $\Gamma(2^{100}, 5)$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 13)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16002

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(3,-2)$  και  $\Gamma(5,2)$ . Αν το σημείο  $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι  $B(1,-1)$ . (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$ . (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AG$ . (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16194

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες:  $(\varepsilon_1): 8x + y - 28 = 0$ ,  $(\varepsilon_2): x - y + 1 = 0$ ,  $(\varepsilon_3): 3x + 4y + 5 = 0$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $M$  των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ . (Μονάδες 9)

β) Αν το σημείο τομής είναι το  $M(3,4)$  να υπολογίσετε:

i) Το μέτρο του διανύσματος  $\overrightarrow{OM}$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 8)

ii) Την απόσταση του σημείου  $M$  από την ευθεία  $(\varepsilon_3)$ . (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16425

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$  και  $\varepsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . (Μονάδες 13)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16759

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  και  $(\varepsilon_3)$  με εξισώσεις  $x - 2y = -1$ ,  $2x + y = 4$  και  $y = -1$  αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  είναι κάθετες. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  τέμνονται στο σημείο  $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $(\varepsilon_3)$ . (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16766

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  με εξισώσεις  $x - 3y = 4$  και  $9x + 3y = 6$  αντίστοιχα.

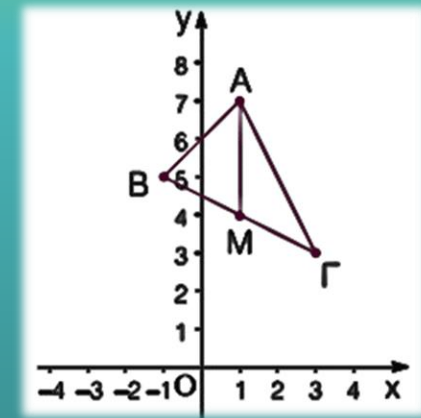
- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  είναι κάθετες. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  τέμνονται στο σημείο  $A(1, -1)$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16769

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(1,7)$ ,  $B(-1,5)$  και  $\Gamma(3,3)$ .

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)
- β) Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , τότε να υπολογίσετε:
- i) Τις συντεταγμένες του  $M$ .
- ii) Την εξίσωση της διαμέσου  $AM$ . (Μονάδες 16)





Δίνονται τα σημεία  $A(2,1)$ ,  $\Gamma(4,-1)$  και το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$ .

α) Να βρεθεί το σημείο  $B$ . (Μονάδες 9)

β) Αν  $B(5,0)$ :

i) Να δείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16774

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(2,5)$ ,  $B(3,6)$  και  $\Gamma(-1,-2)$ .

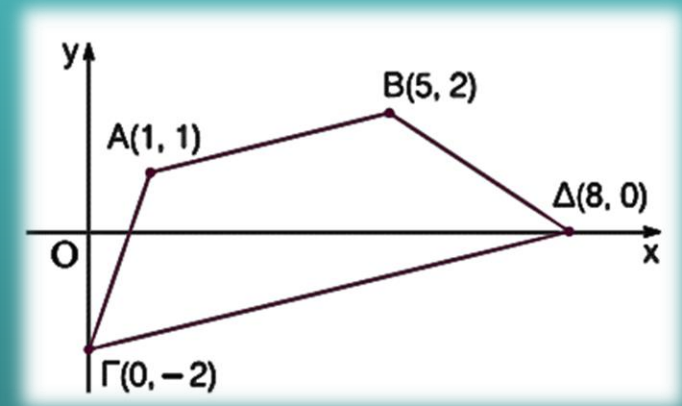
- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το  $A$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $AB$  με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16810

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία  $A(1,1)$ ,  $B(5,2)$ ,  $\Gamma(0,-2)$  και  $\Delta(8,0)$ .

- α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

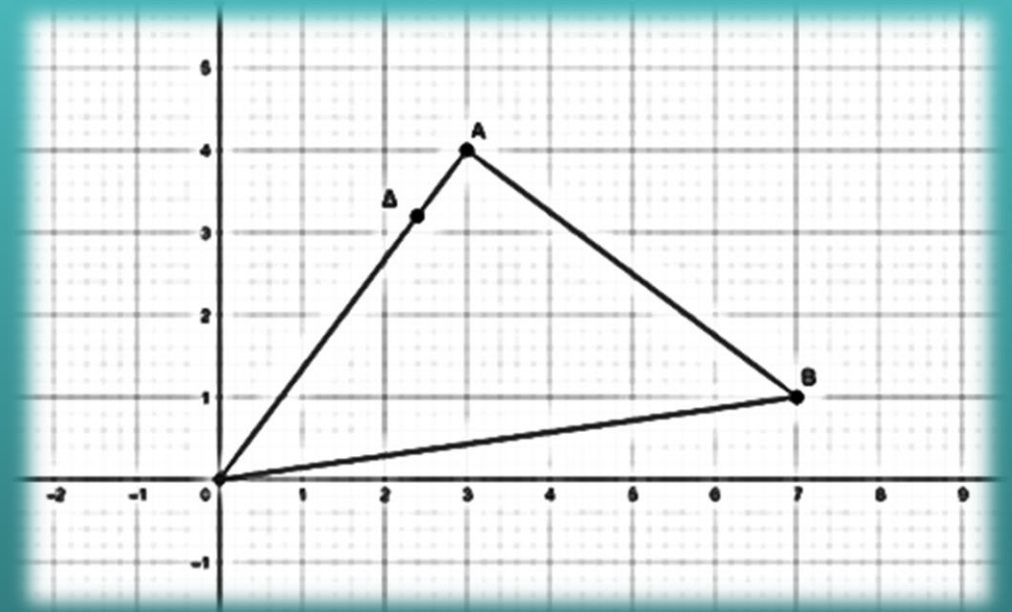


## ΑΣΚΗΣΗ 2-17805

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται το τρίγωνο  $AOB$  με  $A(3,4)$ ,  $B(7,1)$ ,  $O$  η αρχή των αξόνων και το σημείο  $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$  της πλευράς  $AO$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{OA}$  και  $\overrightarrow{AD}$ . (Μονάδες 7)
- β) Να δείξετε ότι αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$ . (Μονάδες 9)
- γ) Δίνεται ότι  $(OAB) = \frac{25}{2}$  τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι  $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$ . (Μονάδες 9)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-18236

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(-1,5)$  και  $B(2,1)$ . Αν οι πλευρές  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  βρίσκονται πάνω στις ευθείες

$\varepsilon_1: y = -x + 4$  και  $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$  αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\Gamma(4,0)$ . (Μονάδες 12)

β) να βρείτε:

i) το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $A\Gamma$ . (Μονάδες 6)

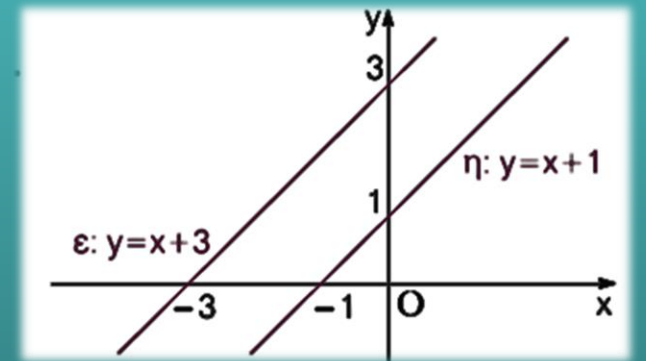
ii) την εξίσωση του ύψους  $B\Delta$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-18240

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται το σημείο  $A(1,2)$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = x + 3$ .

- Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 7)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\eta)$  που διέρχεται από το  $A$  και είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 8)
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες  $(\eta)$ ,  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 10)



Δίνονται τα σημεία  $A(-1,5)$ ,  $B(3,3)$ . Να υπολογίσετε:

- α) Τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 8)
- β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $AB$ . (Μονάδες 8)
- γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου ( $\eta$ ) του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-18979

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$  και  $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$ .

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A(1,1)$  είναι σημείο της ευθείας  $\varepsilon_1$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $\varepsilon_2$ . (Μονάδες 10)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-20885

### Ενδεικτική Απάντηση

Η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $A(-3,-1)$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{3\pi}{4}$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ , είναι:  $E = 8$ . (Μονάδες 13)

Δίνονται τα σημεία  $A(3,2)$  και  $B(-1,-6)$  . Να βρεθούν:

- α) Οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 8)
- β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ . (Μονάδες 8)
- γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας ( $\epsilon$ ) του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21963

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,-4)$ ,  $B(-3,-4)$  και  $\Gamma(1,4)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{\Gamma B}$  και  $\overrightarrow{\Gamma A}$ . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  δεν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 11)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21964

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται το σημείο  $A(4, -2)$  και η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  με εξίσωση:  $x - y + 2 = 0$ . Να βρείτε:

- α) την ευθεία  $(\varepsilon_2)$  που διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon_1)$ . (Μονάδες 6)
- β) το σημείο τομής  $B$ , των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $y = -x + 2$ . (Μονάδες 8)
- γ) το συμμετρικό  $\Gamma$  του σημείου  $A$ , ως προς την ευθεία  $(\varepsilon_1)$ . (Μονάδες 11)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21965

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(2,-4)$  και  $B(0,-2)$

- α) Να βρείτε το μέσο  $M$  του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 4)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ( $\zeta$ ) του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 5)
- γ) Αν ( $\zeta$ ):  $y = x - 4$  και ( $\epsilon$ ):  $y = 2x - 6$ , τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ( $\zeta$ ), ( $\epsilon$ ). (Μονάδες 9)
- δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία ( $\epsilon$ ) είναι η  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ . (Μονάδες 7)

**Οι πλευρές  $AB$  και  $AD$  ενός παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$  έχουν εξισώσεις  $x + 2y + 1 = 0$  και  $2x + y + 5 = 0$  αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο  $K(1,2)$ .**

**α) Να αποδείξετε ότι:**

**i. Η κορυφή  $A$  του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες  $A(-3,1)$ . (Μονάδες 8)**

**ii. Η κορυφή  $Γ$  του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες  $Γ(5,3)$ . (Μονάδες 7)**

**β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του  $BΓ$  και  $ΓΔ$ . (Μονάδες 10)**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22072

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι εξισώσεις (1):  $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$  και (2):  $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 15)
- β) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.  
(Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22092

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  με κορυφή  $A(1,4)$ . Η πλευρά  $ΑΔ$  έχει εξίσωση  $3x - 2y + 5 = 0$  και η διαγώνιος  $ΒΔ$  έχει εξίσωση  $y = x + 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή  $Δ$  έχει συντεταγμένες  $Δ(-1,1)$ . (Μονάδες 12)

β) Αν οι διαγώνιοι  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου  $ΑΓ$ . (Μονάδες 13)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-22171

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: 3x - y = 5$  και  $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$ .

- α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους  $M$ . (Μονάδες 10)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $M(3,4)$  και είναι κάθετη στην  $(\varepsilon_2)$ . (Μονάδες 10)
- γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην  $(\varepsilon_1)$ . (Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ 2-22173**Ενδεικτική Απάντηση

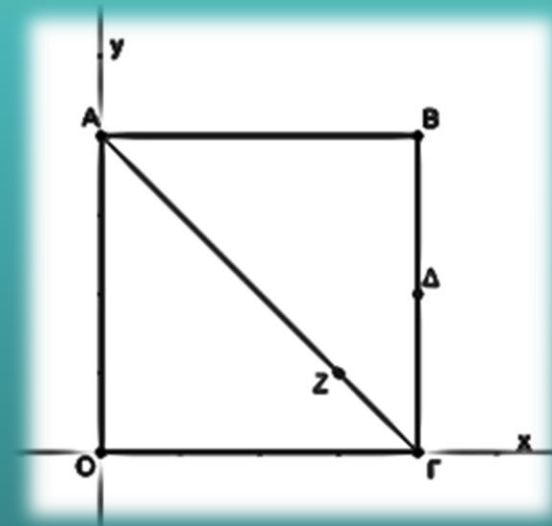
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε  $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ . Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 7)

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ. (Μονάδες 9)

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (Μονάδες 9)



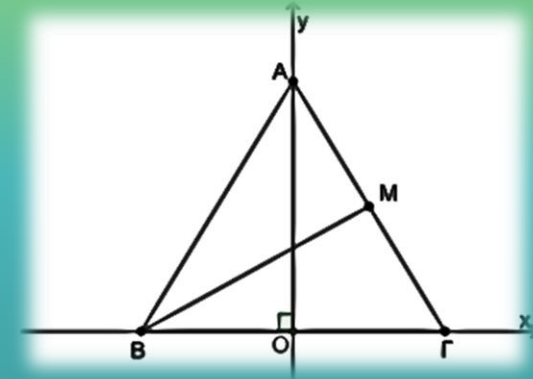
Το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει βάση  $B\Gamma$  και ύψος  $AO$ . Η κορυφή  $A$  είναι σημείο του θετικού ημιάξονα  $Oy$  και οι κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  είναι σημεία του άξονα  $x'x$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω  $(B\Gamma)=12$ ,  $(AO)=8$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $A(0,8)$ ,  $B(-6,0)$  και  $\Gamma(6,0)$ . (Μονάδες 9)

ii.  $M(3,4)$  (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου  $BM$ . (Μονάδες 7)



**⊕EMA 4°**

## ΑΣΚΗΣΗ 4-14970

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο  $M(2,1)$ .

α) Μια ευθεία ( $\varepsilon$ ) με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  διέρχεται από το  $M$ . Να βρείτε:

i) Την εξίσωσή της.

ii) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 6) (2+4)

β) Έστω ότι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $A, B$  αντίστοιχα.

i) Να βρείτε, με τη βοήθεια του  $\lambda$ , τα μήκη των τμημάτων  $OA, OB$ .

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii) Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 19) (6+7+6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-14978

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$ ,  $B(3,3)$ .

- α) Αν  $M(x,y)$  σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις  $d_1, d_2$  του  $M$  από τα  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
- β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι  $d_1, d_2$  ώστε το σημείο  $M$  να ανήκει στη μεσοκάθετο του  $AB$ . (Μονάδες 4)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του  $AB$ . (Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε σημείο  $\Sigma$  τέτοιο ώστε το τρίγωνο  $\Sigma AB$  να είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-14984

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τα σημεία  $A(-2,-3)$  και  $B(7,9)$ . Έστω  $S$  το σύνολο των σημείων  $M$  που είναι κορυφές των τριγώνων  $AMB$  ώστε  $(AMB) = 12$  τ.μ.

α) Να αποδείξετε ότι το  $S$  αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών  $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$  και  $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $AB$  είναι η μεσοπαράλληλη των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ . (Μονάδες 9)

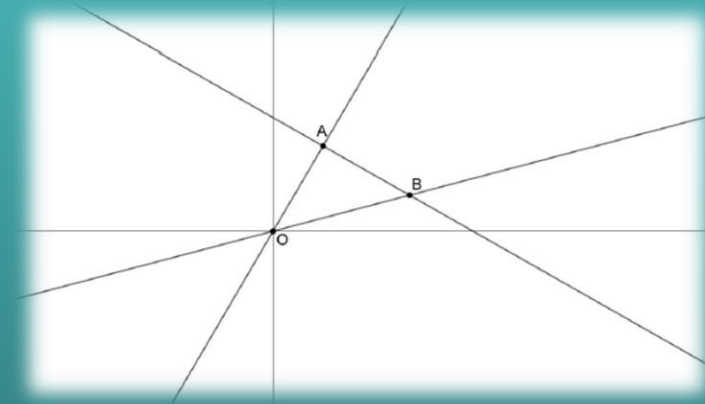
γ) Θεωρούμε ένα σημείο  $M_1$  στην  $(\varepsilon_1)$  και ένα σημείο  $M_2$  στην  $(\varepsilon_2)$  ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο  $AM_1BM_2$ . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα  $AXBY$  υπάρχουν, αν το  $X$  πρέπει να είναι σημείο της  $(\varepsilon_1)$  και το  $Y$  σημείο της  $(\varepsilon_2)$ , που έχουν το ίδιο εμβαδόν με το  $AM_1BM_2$ ; Εξηγήστε. (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15029

## Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(1,3)$ ,  $B(3+1,3-1)$ .

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $OA$  καθώς και τη γωνία  $\omega$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 6)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AB$  καθώς και τη γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 6)
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $OAB$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με  $A=90^\circ$ . (Μονάδες 7)
- Να δείξετε ότι  $\varepsilon\varphi 15^\circ = 3-13+1$ . (Μονάδες 6)





Δίνονται τα σημεία του επιπέδου **A(1,1)**, **B(4,4)** και **Γ (3,1)**.

**α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)**

**β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία (ε):  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ . (Μονάδες 9)**

**γ) Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε  $(KA) = (KB)$ . Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ; (Μονάδες 9)**

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15253

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$  (1), όπου  $\mu \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$  η (1) παριστάνει ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 5)

β) Αν βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu$  οι ευθείες  $\varepsilon$ :

i) είναι παράλληλες στον  $x'x$ . (Μονάδες 4)

ii) είναι παράλληλες στον  $y'y$ . (Μονάδες 4)

iii) διέρχονται από το  $(0,0)$ . (Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες  $\varepsilon$  που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.  
(Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15273

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία  $A(3,4)$ ,  $B(2,5)$  και  $\Gamma(-2,2)$  και το μεταβλητό σημείο  $M(4a-1,3a+1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $B\Gamma$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$  κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το  $A$  και είναι παράλληλη στην  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου  $M$  ισχύει  $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$ . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

**Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο  $M(2,1)$ .**

**α) Μια ευθεία ( $\varepsilon$ ) με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  διέρχεται από το  $M$ . Να βρείτε:**

**i) Την εξίσωσή της. (Μονάδες 2)**

**ii) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 5)**

**β) Έστω ότι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $A, B$  αντίστοιχα.**

**i) Να βρείτε, με τη βοήθεια του  $\lambda$ , τα μήκη των τμημάτων  $OA, OB$ . (Μονάδες 6)**

**ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.  
(Μονάδες 6)**

**iii) Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.  
(Μονάδες 6)**

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15380

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,3)$ ,  $B(-2,2)$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha$ , η απόσταση του σημείου  $A$  από το σημείο  $B$  είναι ίση με την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 8)
- β) Για  $\alpha = 4$
- i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Gamma$  το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον άξονα  $y'y$ . (Μονάδες 8)
- ii) Να βρείτε το σημείο της ευθείας  $\varepsilon$  που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15433

### Ενδεικτική Απάντηση

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία  $A(-1,-2)$  και  $B(3,1)$ . Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση  $\delta: x + y - 1 = 0$ .

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου  $\delta$ :

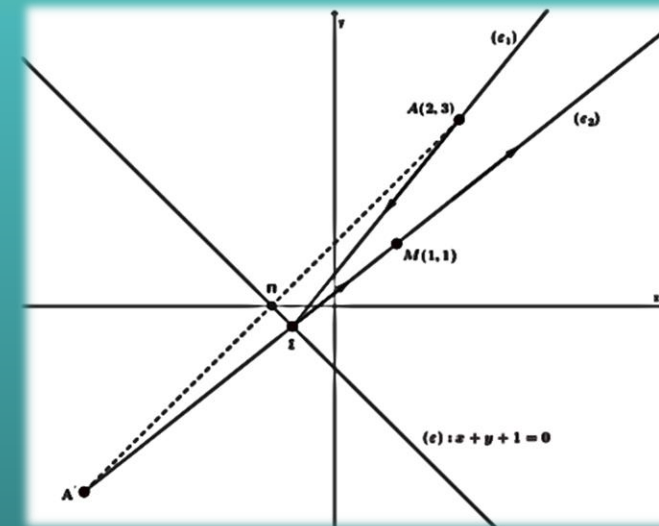
- i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)
- ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 4-15439**Ενδεικτική Απάντηση

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο  $A(2,3)$  και προσπίπτουσα στην ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $x+y+1=0$ , μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο  $M(1,1)$ .

- α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου  $A$  πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι το σημείο  $\Pi(-1,0)$ . (Μονάδες 7)  
ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$ , είναι το σημείο  $A'(-4,-3)$ . (Μονάδες 5)
- β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία  $(\varepsilon_2)$ , η οποία διέρχεται από τα σημεία  $A'$ ,  $\Sigma$ ,  $M$ , τότε να βρείτε την εξίσωσή της. (Μονάδες 4)  
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης  $\Sigma$  της φωτεινής ακτίνας  $(\varepsilon_1)$  πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 5)
- γ) Αν  $\Sigma(-2, -1)$ , τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας  $(\varepsilon_1)$ . (Μονάδες 4)



Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες  $A(2,1)$ ,  $B(4,3)$ , βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 8)
- β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση  $\epsilon: y=2x-7$ , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 10)
- γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι  $N(4,1)$ , να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό. (Μονάδες 7)





## ΑΣΚΗΣΗ 4-15658

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, -2)$  και  $\vec{\beta} = (1, 1)$  τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο  $K(2, 1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα. (Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο  $A$  είναι το πέρας του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ ,  $B$  είναι το πέρας του διανύσματος  $\vec{\beta}$  και  $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$  ένα τυχαίο σημείο της ευθείας  $AB$ ,

i) να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$  είναι  $A(4, -1)$  και  $B(3, 2)$ . (Μονάδες 5)

ii) να δείξετε ότι  $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$ . (Μονάδες 6)

iii) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ , αν ισχύει ότι το  $\Gamma$  είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  και  $|\overrightarrow{K\Gamma}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|$ . (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15681

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(a,0)$ ,  $B\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right)$  και  $M\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ , όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

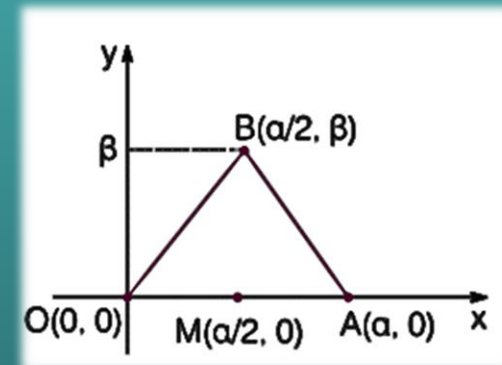
α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές και το σημείο  $M$  είναι το μέσο της βάσης του  $OA$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών  $OB$  και  $AB$  είναι  $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$  και  $AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$  αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν  $d_1$  είναι η απόσταση του σημείου  $M$  από την ευθεία  $OB$  και  $d_2$  η απόσταση του σημείου  $M$  από την ευθεία  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $d_1 = d_2$ . (Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-15987

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(2,3)$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $AB$  είναι η  $(\varepsilon): y = 2x - 1$ . (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο  $\Gamma(2^{100}, 5)$  ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία  $(\varepsilon)$  και την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ . (Μονάδες 8)

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου  $AOB$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-16003

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών  $\varepsilon_\alpha: (\alpha - 4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν  $\alpha = 0$  και όταν  $\alpha = 1$  και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο  $M$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το  $M$ . (Μονάδες 6)
- γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.
- i) Να αποδείξετε ότι  $0 < \alpha < 4$ . (Μονάδες 6)
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha$  ισχύει  $(OA) = 2(OB)$ . (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-16057

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(2,0)$ ,  $B(3,4)$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) i) Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο  $A$  και έχουν κλίση  $\lambda$ . (Μονάδες 5)
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο  $A$ , έχει κλίση  $\lambda$  και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο  $B$ , έχει εξίσωση  $(\varepsilon): 15x - 8y - 30 = 0$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία  $(\zeta)$ , εκτός από την  $(\varepsilon)$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $A$  και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο  $B$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\zeta)$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-16477

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας  $\varepsilon_\lambda: \lambda x + (1 - \lambda)y + 2 = 0$ , όπου  $\lambda$  αριθμός που μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ , παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος  $\Phi$ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο  $O(0,0)$ .

α) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ . (Μονάδες 10)

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. (Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο  $P$  βρίσκεται βόρεια του φάρου  $\Phi$ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το  $P$  έχει εξίσωση  $x + y + 4 = 0$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $P$  όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους. (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-17078

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(3,2a)$ ,  $B(4,a)$ ,  $\Gamma(a+1,1-a)$  και  $\Delta(a,1)$ , με  $a \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$  έχει εξίσωση  $y = -\alpha x + 5\alpha$ . (Μονάδες 6)

ii) Τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  ανήκουν στην ευθεία  $AB$  αν και μόνο αν  $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ . (Μονάδες 7)

iii) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο όταν  $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ . (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός  $a$  ώστε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  να είναι τετράγωνο.». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-17694

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο χάρτη μιας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες  $A(3,6)$  και  $B(7,-2)$ .

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)

β) Πάνω στη σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A, B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-17695

### Ενδεικτική Απάντηση

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία **A** και **B**. Κάθε χρονική στιγμή  $t$  με  $t \geq 0$  η θέση του πρώτου σημείου είναι  $A(t - 1, 2t - 1)$  και του δεύτερου  $B(3t - 1, -4t - 1)$ .

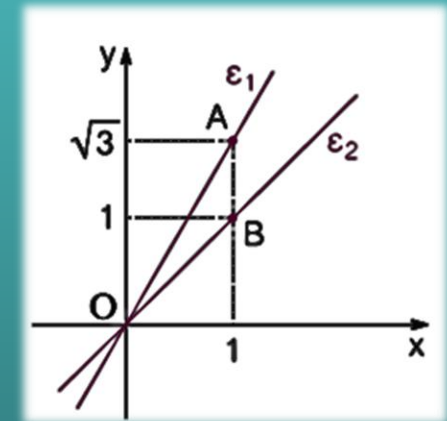
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
- β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή  $t = 2$ . (Μονάδες 5)
- δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή  $t$  κατά την οποία η απόσταση του σημείου **A** από την ευθεία  $\varepsilon: 4x + 3y + 7 = 0$  ισούται με 6. (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18244

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x$  και  $\varepsilon_2: y = x$ .

- Να σχεδιάσετε τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με τον άξονα  $x'$ . (Μονάδες 6)
- Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι  $15^\circ$ . (Μονάδες 3)
- Να αποδείξετε ότι  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$  (Μονάδες 10)

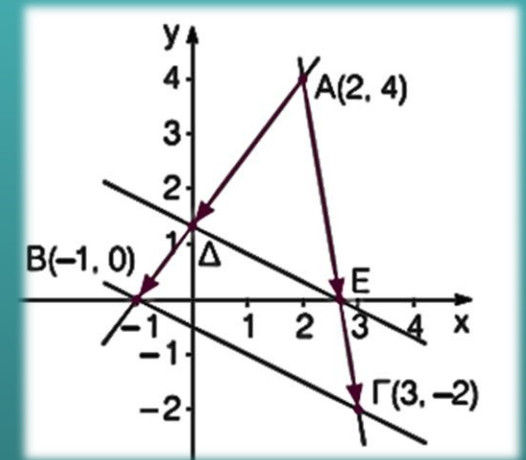


## ΑΣΚΗΣΗ 4-18568

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(2,4)$ ,  $B(-1,0)$  και  $\Gamma(3,-2)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  αποτελούν κορυφές τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 4)
- β) Αν η ευθεία  $AB$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  σε ένα σημείο  $\Delta$  και η ευθεία  $A\Gamma$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα σημείο  $E$ , τότε:
  - i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $\Delta$  και  $E$ . (Μονάδες 10)
  - ii) Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$  και  $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$ . (Μονάδες 6)
  - γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\Delta E$  είναι παράλληλη της  $B\Gamma$ . (Μονάδες 5)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-21160

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $B(\kappa,0)$  και  $\Gamma(0,2\kappa)$  όπου  $\kappa$  θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου  $OB\Gamma$  κατασκευάζουμε τετράγωνα  $OB\Delta E$  και  $OGZH$ , τότε:

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma\Delta$  και  $BZ$ .  
(Μονάδες 10)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου  $OB\Gamma$  που διέρχεται από το  $O$ . (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\Gamma\Delta$ ,  $BZ$  και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 8)

Σε κάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο  $\Lambda(2,6)$  και η θέση ενός πλοίου με το σημείο  $\Pi(\lambda-1,2+\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 7)  
ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 5)
- β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
- i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 6)  
ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22262

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τα σημεία  $A(-2,1)$ ,  $B(1,5)$  και  $\Gamma(5,-1)$ .

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $B\Gamma$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή  $A$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο  $\Delta$  της ευθείας  $B\Gamma$ , από το οποίο, το  $A$  απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22265

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία  $A(1,-1)$ ,  $B(2,2)$  και  $\Gamma(\mu-1, 3\mu-2)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι καθώς το  $\mu$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ , το σημείο  $\Gamma$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon: y = 3x + 1$ .  
(Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι καθώς το  $\mu$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ , τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου.  
(Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι σταθερό. (Μονάδες 5)
- δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο  $B$  και από τις οποίες το σημείο  $A$ , απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22266

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$  (E) με  $\lambda \in \mathbb{R}$  και η ευθεία (ζ) με εξίσωση:  $6x - 8y + 3 = 0$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα  $\lambda \in \mathbb{R}$ , διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M(1,3)$  από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)



# **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 30 : ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ**

## **§3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ**

# Θέμα 2<sup>ο</sup>

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15028

### Ενδεικτική Απάντηση

Έστω κύκλος  $C$  με κέντρο  $K(1,2)$  και ακτίνα  $\rho = 2$  και ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $3x + 4y - 1 = 0$ .

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου  $K(1,2)$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)
- γ) Να δείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται στον κύκλο  $C$ . (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-15680

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  με κέντρο  $K(1,2)$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου  $C$  είναι  $\rho = 2$ . (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου  $K$  από την ευθεία  $\varepsilon$  είναι  $\frac{12}{5}$ . (Μονάδες 10)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία  $\varepsilon$  και ο κύκλος  $C$  δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)

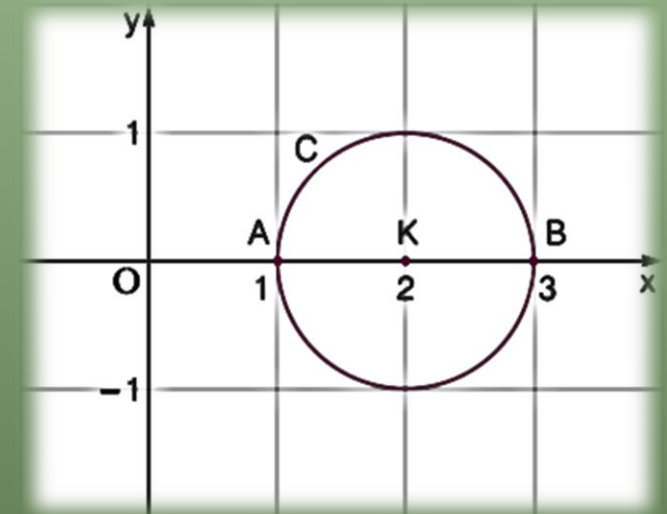
## ΑΣΚΗΣΗ 2-15994

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (C) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-16773

### Ενδεικτική Απάντηση

- α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το  $O(0,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$ .  
(Μονάδες 8)
- β) Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 5$ .
- i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο  $A$ . (Μονάδες 9)
- ii) Να βρεθεί το σημείο  $B$ , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του  $A$  σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 8)

## **ΑΣΚΗΣΗ 2-16808**

### Ενδεικτική Απάντηση

**Τα σημεία  $A(-8,1)$ ,  $B(4,5)$  και  $\Gamma(-4,9)$  είναι σημεία ενός κύκλου  $C$ .**

**α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)**

**β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 10)**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-17317

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ο κύκλος  $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x - 4y = 8$ .

- α) Να βρείτε το κέντρο  $K$  του κύκλου  $C$  και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)
- β) Αν  $K(1,2)$ , να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου  $C$  από την ευθεία  $\varepsilon$  είναι  $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}$ . (Μονάδες 13)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. (Μονάδες 10)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-18238

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,3)$  και  $B(-3,5)$ .

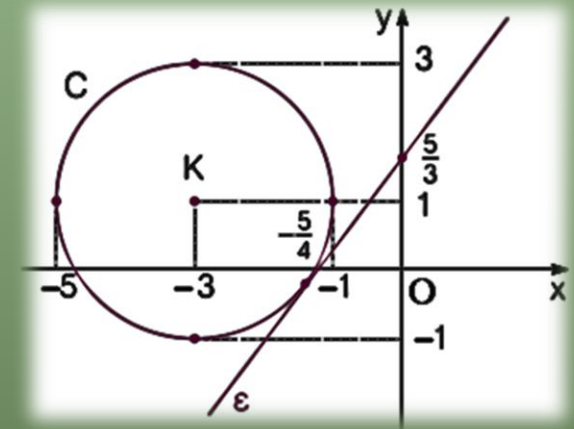
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $K$  του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι  $(KA) = \sqrt{5}$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-18239

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται το σημείο  $K(-3,1)$  και η ευθεία  $(\varepsilon): 4x - 3y + 5 = 0$ .

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου  $K$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι ίση με 2. (Μονάδες 6)
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$  που έχει κέντρο το σημείο  $K$  και εφάπτεται στην ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 9)
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο  $C$  και την ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 10)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-18241

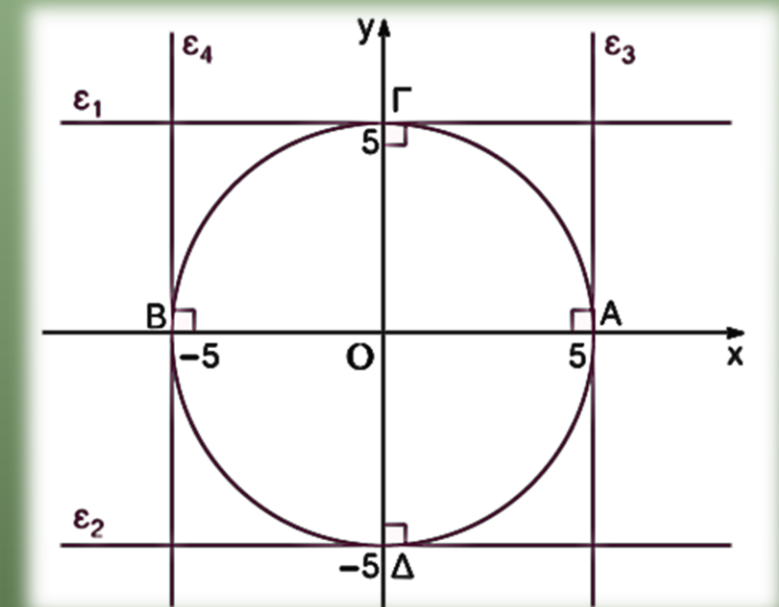
### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ο κύκλος  $C$  με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 25$ . Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο  $C$ . (Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του  $C$  που διέρχονται από τα σημεία τομής του  $C$  με τον  $yy'$  και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του  $C$  που διέρχονται από τα σημεία τομής του  $C$  με τον  $xx'$  και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

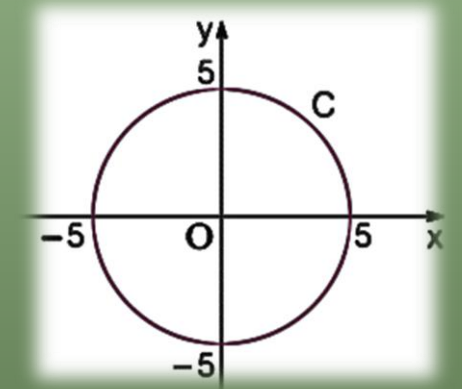


## ΑΣΚΗΣΗ 2-18700

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται κύκλος  $C$  με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου  $C$  και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)
- β) Δίνεται το σημείο  $A(3,-4)$ .
- i. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A$  ανήκει στον κύκλο  $C$ . (Μονάδες 5)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C$  στο σημείο  $A$ . (Μονάδες 10)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-19039

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση:  $(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) = -4$  (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(-1,1)$  και ακτίνα  $R = 2$ .

(Μονάδες 9)

β) i) Να βρείτε τα σημεία  $A$  και  $B$  του κύκλου  $(K,R)$  τα οποία έχουν τετμημένη ίση με  $-1$ .

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$  και  $B$  είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-20890

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τα σημεία  $A(3,-3)$ ,  $B(2,-8)$  και  $\Gamma(7,-3)$ . Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το  $A$  και εφάπτεται στην πλευρά  $B\Gamma$ . (Μονάδες 15)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21962

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(0,3)$ ,  $B(3,4)$  και  $\Gamma(1,0)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\widehat{BA\Gamma}$  είναι ορθή. (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε το μέσο  $K$  της υποτεινουσας  $B\Gamma$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21965

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(2,-4)$  και  $B(0,-2)$

- α) Να βρείτε το μέσο  $M$  του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 4)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ( $\zeta$ ) του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 5)
- γ) Αν ( $\zeta$ ):  $y = x - 4$  και ( $\epsilon$ ):  $y = 2x - 6$ , τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ( $\zeta$ ), ( $\epsilon$ ). (Μονάδες 9)
- δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία ( $\epsilon$ ) είναι η  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ . (Μονάδες 7)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-22147

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$  (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  και ακτίνα  $R = 2$  (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A \left( \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$  είναι σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A. (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22172

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon: 3x - 4y = 0$  και το σημείο  $A(-2,1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ( $\eta$ ) κάθετης στην ( $\varepsilon$ ) που διέρχεται από το σημείο  $A$ . (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο  $A$  και εφάπτεται στην ευθεία ( $\varepsilon$ )

~~στο σημείο  $A$ .~~ (Μονάδες 7) Το ερώτημα ήταν λάθος διατυπωμένο!!!!!!!

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22279

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$  (1)

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(-1,1)$  και ακτίνα  $R = 2$ . (Μονάδες 9)
- β) Η αρχή  $O(0,0)$  των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου  $(K,R)$ . (Μονάδες 7)
- γ) Η ευθεία  $(\varepsilon): x + y = 2$  είναι τέμνουσα του κύκλου  $(K,R)$ . (Μονάδες 9)

# Θέμα 4<sup>ο</sup>

## ΑΣΚΗΣΗ 4-14954

### Ενδεικτική Απάντηση

**Θεωρούμε τις εξισώσεις  $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$  και  $(\varepsilon_2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0, \mu \in \mathbf{R}$ .**

- α) Να αποδείξετε ότι οι  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\mu$ . (Μονάδες 6)**
- β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  είναι  $45^\circ$  για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\mu$ . (Μονάδες 10)**
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)**

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15030

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ο κύκλος  $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$  και η ευθεία  $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$ .

- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος  $C$  και η ευθεία ( $\varepsilon$ ) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες  $(\eta_1), (\eta_2)$  που είναι παράλληλες στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) και εφάπτονται του κύκλου  $C$  και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των ευθειών  $(\eta_1), (\eta_2)$ . (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15080

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι εξισώσεις  $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$  (1) και  $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$  (2).

- α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα  $K(1,0)$ ,  $\Lambda(3,0)$  και ακτίνες  $\rho_1 = 3$ ,  $\rho_2 = 1$  αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
- β) i) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ). (Μονάδες 5)
- ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος  $C_2$  εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου  $C_1$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου  $C_1$  που εφάπτονται στον κύκλο  $C_2$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15081

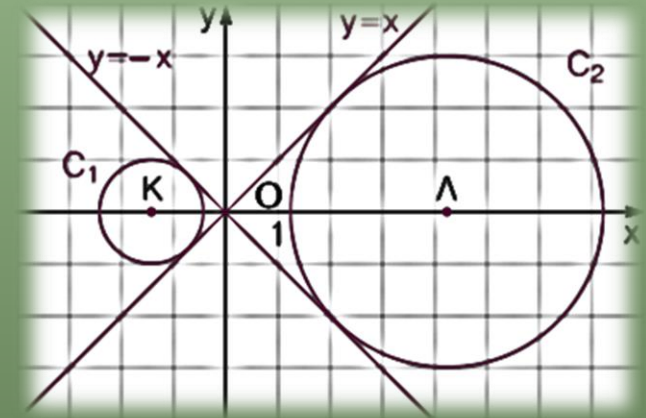
### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  και  $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$ .

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  έχουν κέντρα  $K(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$  και ακτίνες  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 3$  αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) i) Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ . (Μονάδες 10)

ii) Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. (Μονάδες 7)





## ΑΣΚΗΣΗ 4-15082

### Ενδεικτική Απάντηση

**Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:**

$$C_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8 \text{ και } C_2: (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 18.$$

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ,Λ τα κέντρα των κύκλων  $C_1, C_2$  αντίστοιχα. Ακολουθώς να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)**
- β) i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ. (Μονάδες 5)**
- ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο  $C_1$  και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (Μονάδες 7)**
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων. (Μονάδες 8)**

# ΑΣΚΗΣΗ 4-15177

## Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,0)$  και  $B(0,-1)$  και ο κύκλος  $C_1$  με εξίσωση

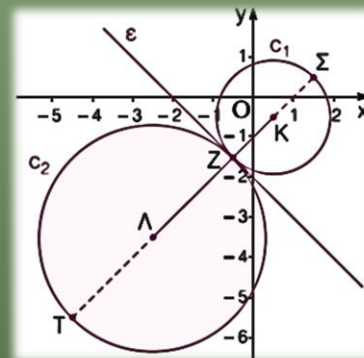
$$C_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων  $N(x,y)$  του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση  $\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 4$ , ανήκουν στην ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση  $y = -x - 2$ . (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων  $P$  του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση  $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$ , ανήκουν σε κύκλο  $C_2$  κέντρου  $A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$  και ακτίνας  $R = 2\sqrt{2}$ .  
(Μονάδες 6)

γ) i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ( $\epsilon$ ) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ .  
(Μονάδες 6)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-15189

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(-2,0)$  και  $B(2,-2)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $K$  και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .  
(Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος  $C$  με διάμετρο  $AB$  έχει εξίσωση  $C: x^2 + (y + 1)^2 = 5$ . (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι τα σημεία  $M(x,y)$  του επιπέδου για τα οποία  $(AMB) = 5$  ανήκουν στις ευθείες  $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$  και  $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$ . (Μονάδες 7)
- δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  εφάπτονται του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15272

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$ .

- α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(3,2)$  βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το  $M$ . (Μονάδες 12)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15432

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4κx - 2κy + 4 = 0$  (1) με  $κ \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τις τιμές του  $κ \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου. (Μονάδες 3)
- γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων. (Μονάδες 7)
- δ) Για  $κ = 1$  να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο  $\Gamma(2,2)$ . (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15628

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + (4 - 2\kappa)x - 2(1 + \kappa)y + 5 - 2\kappa = 0$  **(1)**, όπου  $\kappa \in (0, +\infty)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η **(1)** παριστάνει κύκλο με κέντρο  $M(\kappa - 2, \kappa + 1)$  και ακτίνα  $\kappa\sqrt{2}$  για κάθε  $\kappa > 0$ .  
(Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε  $\kappa > 0$ . (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon): y = -x - 1$  είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε  $\kappa > 0$ .  
(Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15646

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$  και  $C_2: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$ .

- α) Να δείξετε ότι τα κέντρα  $K, \Lambda$  των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{xOy}$  του συστήματος συντεταγμένων. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής  $B, \Gamma$  των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ . (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας  $y = x$  ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα  $B, \Gamma$  να έχει εμβαδόν  $\frac{21}{2}$  τ.μ. (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-15791

### Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο  $C_1$  κέντρου  $A$  και την ευθεία  $(\varepsilon): x = 5$

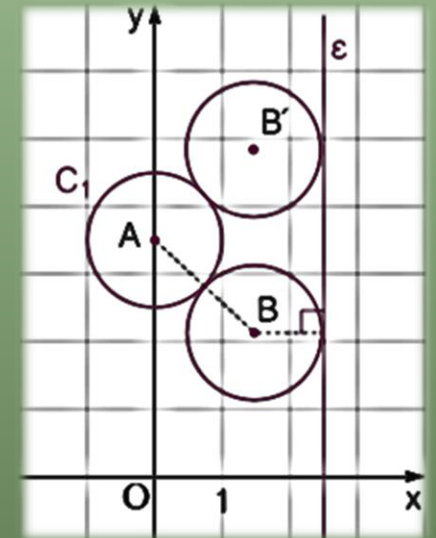
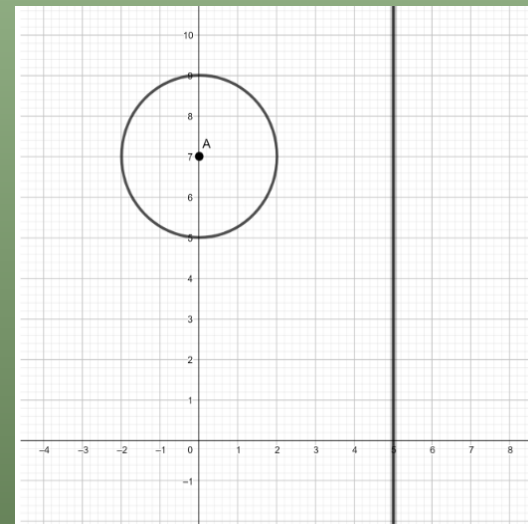
α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C_1$ . (Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου  $B(x_1, y_1)$

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $B(x_1, y_1)$  και ακτίνα 2. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου  $AB$  σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου  $B$ . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον  $C_1$  και στην ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 10)





**ΑΣΚΗΣΗ 4-15826****Ενδεικτική Απάντηση**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του  $\lambda$  τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  και την ακτίνα  $\rho$ . (Μονάδες 7)

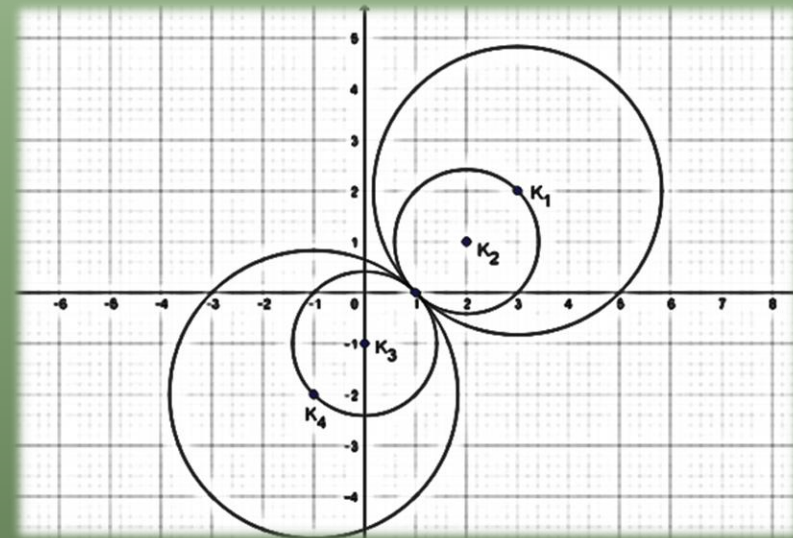
β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για  $\lambda = 0$ ; (Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους  $K_1, K_2, K_3, K_4$  που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του  $\lambda$ . Αξιοποιώντας το σχήμα,

i) να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 5)

iii) να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: x + y - 1 = 0$  είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1). (Μονάδες 5)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-15993

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\lambda$  η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 3)
- β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (Μονάδες 10)
- γ) Αν  $A(1,0)$  και  $B(3,0)$  είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (Μονάδες 7)
- δ) Αν ένα σημείο  $M(\alpha,\beta)$  επαληθεύει την (1) για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha \cdot \beta = 0$ . (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-16191

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$ ,  $B(5,5)$ .

- α) Αν για το σημείο  $M(x,y)$  ισχύει  $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$ , να αποδείξετε ότι:
- i) Το σημείο  $M$  βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6y - 6x + 10 = 0$  (1) (Μονάδες 8)
  - ii) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 3)
- β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το  $K(3,3)$  και η ακτίνα του  $\rho = 2\sqrt{2}$ :
- i) Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία  $(\varepsilon): \lambda x + y = 2$  εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 7)
  - ii) Υπάρχει τιμή του  $\lambda$  για την οποία η ευθεία  $(\varepsilon)$  σχηματίζει με την  $AB$  γωνία  $45^\circ$ ; (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18237

### Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τα σημεία  $A(-1,2)$ ,  $B(3,2)$ ,  $\Gamma(1,4)$ .

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς  $B\Gamma$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$ .

γ) Να βρείτε σημείο  $K$  στην μεσοκάθετη της πλευράς  $B\Gamma$  που ισαπέχει από τα  $A$ ,  $B$ . (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18247

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(a,0)$  και  $B(0,\beta)$ , όπου  $\alpha, \beta > 0$ .

α) Να βρείτε συναρτήσει των  $\alpha, \beta$

i) τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 5)

ii) την απόσταση  $(OM)$ . (Μονάδες 5)

β) Αν  $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι  $(OM) = \frac{(AB)}{2}$ . (Μονάδες 5)

ii) να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $OAB$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18415

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$  (1) όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και η ευθεία  $\varepsilon: 2x + 3y = 0$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18416

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$  (1).

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(3,2)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{5}$ . (Μονάδες 6)
- β) Δίνονται τα σημεία  $A(4,4)$  και  $B(2,0)$ .
- i. Να δείξετε ότι τα σημεία  $A$  και  $B$  είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)
- ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο  $AB$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε η ευθεία ( $\eta$ ) με εξίσωση  $y = \lambda x + 4$  να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  ώστε  $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$ . (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-18567

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 = 4$  και το σημείο  $A(2\sqrt{2}, 0)$ .

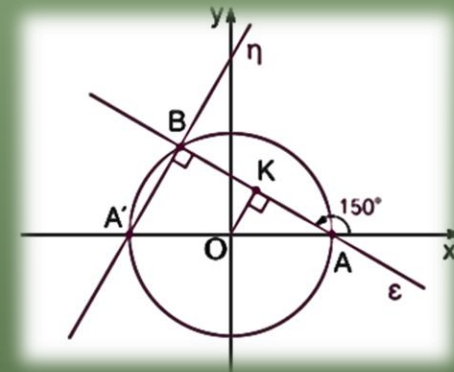
- α) i) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 5)
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου  $C$  που διέρχονται από το σημείο  $A$  και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 6)
- β) Αν  $B, \Gamma$  τα σημεία επαφής του κύκλου  $C$  με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο  $A$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ΑΒΟΓ$ . (Μονάδες 8)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-18569

Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 = 1$ .

- α) Αν  $A$  και  $A'$  είναι τα σημεία τομής του κύκλου  $C$  με τους ημιάξονες  $Ox$  και  $Ox'$  αντίστοιχα, τότε:
- Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $A'$  είναι  $A(1,0)$  και  $A'(-1,0)$ . (Μονάδες 5)
  - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'$  γωνία  $150^\circ$ . (Μονάδες 6)
- β) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον κύκλο  $C$  και στο σημείο  $B$ , να αποδείξετε ότι η χορδή  $AB$  έχει μήκος  $\sqrt{3}$ . (Μονάδες 8)
- γ) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  έχει εξίσωση  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$ , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\zeta$ ) που διέρχεται από τα σημεία  $A'$  και  $B$ . (Μονάδες 6)

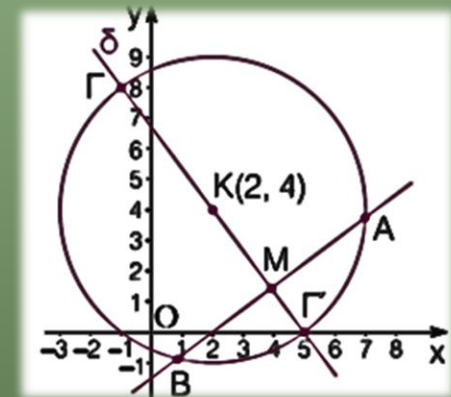


## ΑΣΚΗΣΗ 4-18570

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$  και η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $3x - 4y = \mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)
- β) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B
  - i. Να αποδείξετε ότι  $-35 < \mu < 15$ . (Μονάδες 7)
  - ii. Να βρείτε για ποια τιμή του  $\mu$  η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 4)
  - iii. Να βρεθεί σημείο  $\Gamma$  του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο  $\Gamma AB$  να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB. (Μονάδες 9)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-20091

### Ενδεικτική Απάντηση

Τα σημεία  $A(-7,-1)$  και  $B(3,-5)$  είναι σημεία ενός κύκλου  $C$  κέντρου  $K$ . Το σημείο  $M$  είναι το μέσο της χορδής  $AB$  και μία ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από τα σημεία  $K$  και  $M$ .

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου  $M$ . (Μονάδες 4)

ii. Την εξίσωση της ευθείας  $KM$ . (Μονάδες 8)

β) Αν από το κέντρο  $K$  του κύκλου διέρχεται η ευθεία  $(\delta)$ :  $x + y = -12$ , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $K$ . (Μονάδες 7)

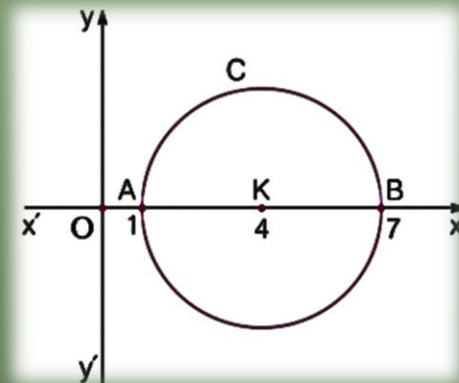
ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-20229

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$  (1), με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)
- δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για  $\lambda = 0$ . Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)



## ΑΣΚΗΣΗ 4-21154

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4ax - 4ay = 0$  (1) όπου  $a$  είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
- β) Να προσδιορίσετε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $R$  των κύκλων ως συνάρτηση του  $a$ . (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του  $a$  του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $a$  ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 6)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-21159

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται τα σημεία  $A(a,0)$  και  $B(0,\beta)$  με  $a, \beta > 0$  και  $a + \beta = 10$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την  $AB$ , για κάθε τιμή των  $a$  και  $\beta$  είναι  $x^2 + y^2 - ax - (10 - a)y = 0$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την  $AB$ , για τις διάφορες τιμές των  $a$  και  $\beta$  διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή  $O$  των αξόνων και ένα σημείο  $P$  του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την  $AB$  για τις διάφορες τιμές των  $a$  και  $\beta$ . (Μονάδες 8)

**Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:**

**τη γραμμή  $\gamma_1$ , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής:  $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .**

**τη γραμμή  $\gamma_2$ , που περνάει από το σταθμό  $\Sigma(-4,2)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{u} = (-1,3)$ .**

**α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ . (Μονάδες 10)**

**β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο  $K(1,1)$  του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)**

**γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο  $K$  και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής  $\gamma_1$ . (Μονάδες 6)**

## ΑΣΚΗΣΗ 4-21349

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο  $O$  θεωρούμε κύκλο  $(C)$  και ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξισώσεις  $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$  (1) και  $4x + 3y - 10 = 0$  (2) αντίστοιχα.

- α) i. Να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $R$  του κύκλου  $(C)$ . (Μονάδες 5)
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου  $K$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$  και να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  τέμνει τον κύκλο  $(C)$  σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)
- iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία  $A$  και  $B$  στα οποία η ευθεία  $(\varepsilon)$  τέμνει τον κύκλο  $(C)$ . (Μονάδες 5)
- β) Αν είναι  $A(1,2)$  και  $B(4,-2)$ , τότε:
- iv. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ . (Μονάδες 5)
- v. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο  $AB$  διέρχεται από το σημείο  $O$ . (Μονάδες 6)



Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $M(x,y)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(1,0)$  για τα οποία ισχύει  $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 9|\overline{AB}|$ .

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  είναι ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 8$ .  
(Μονάδες 10)
- β) Έστω  $\Gamma$  και  $\Delta$  δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε  $\Gamma\Delta^2 = 32$ .
- i. Να δείξετε ότι τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 8)
- ii. Αν το σημείο  $M$  κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το  $\overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta}$ . (Μονάδες 7)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22223

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$ ,  $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$  και το σημείο  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$  (Μονάδες 8)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ .

i. Να υπολογίσετε το  $\lambda$ . (Μονάδες 8)

ii. Αν  $\lambda = \frac{1}{2}$  και  $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$  να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
(Μονάδες 9)

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $Oxy$  η εξίσωση  $3x + 4y = 25$  περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το  $O(0,0)$  και ακτίνα 2.

- α) i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού; (Μονάδες 4)
- ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 5)
- iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 8)
- β) Ο μηχανικός που θέλει να καράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση  $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$ , με  $\lambda \neq 0$ . Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του  $\lambda$  ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 8)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22264

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας  $\varepsilon: x + y + 2 = 0$ . (Μονάδες 9)

γ) Για  $\lambda = 1$ , στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο  $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22280

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο  $O(0,0)$  θεωρούμε τους κύκλους  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (Μονάδες 8)
- γ) Έστω  $M, N$  τυχαία σημεία των κύκλων  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων  $M$  και  $N$ . (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-22508

### Ενδεικτική Απάντηση

Οι κορυφές Α, Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία (1,4) και (3,0) αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή  $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ γράφεται στη μορφή  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

## **§3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ**

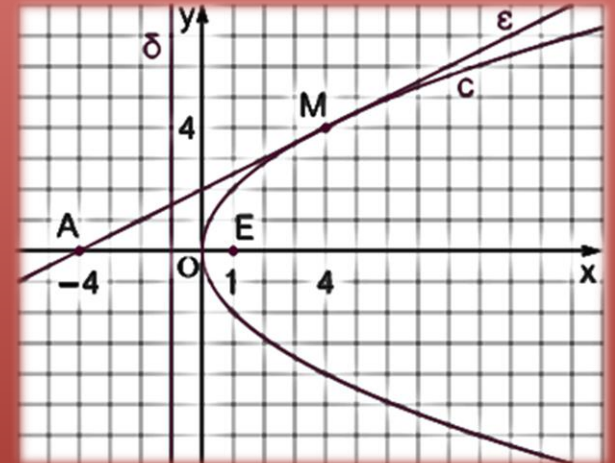
### **Θέμα 2<sup>ο</sup>**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-18242

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραβολή  $C$  με εξίσωση  $y^2 = 4x$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας  $\delta$  της  $C$ .  
(Μονάδες 8)
- β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της  $C$  στο σημείο της  $M(4,4)$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή  $C$ , τη διευθετούσα  $\delta$  και την ευθεία ( $\varepsilon$ ). (Μονάδες 9)





## ΑΣΚΗΣΗ 2-20235

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραβολή  $C: y^2 = 8x$ .

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της  $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$ . (Μονάδες 15)

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  έχει εξίσωση  $x = x_0$ .

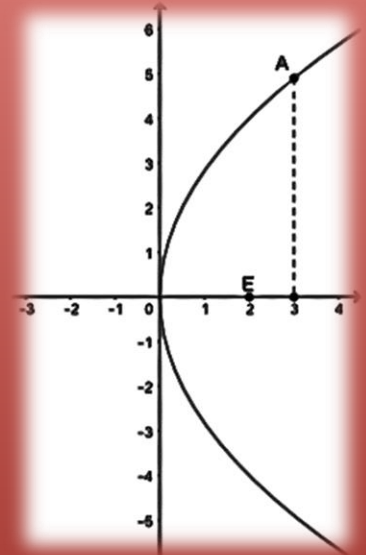
iii. Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\eta} = (A, B)$ .

iv. Η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$  έχει εστία το σημείο  $E(1,0)$ .

v. Η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι:  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$  (Μονάδες 15)



## ΑΣΚΗΣΗ 2-21306

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ , κορυφή  $O(0,0)$  και εστία  $E(2,0)$ , όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο  $A$  της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του  $Oxy$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι  $y^2 = 8x$  και ότι  $A(3, 2\sqrt{6})$ . (Μονάδες 10)
- β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα ( $\delta$ ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της παραβολής στο σημείο  $A$ . (Μονάδες 9)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21307

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $x^2 = 12y$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο  $E(0,3)$  και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  της παραβολής στα σημεία  $A(6,3)$  και  $B(-6,3)$ , αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις  $y = x - 3$  και  $y = -x - 3$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ . (Μονάδες 5)

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση  $y^2 = x$  (1)

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της A(1,-1). (Μονάδες 8)

Δίνεται η εξίσωση  $y^2 = 4x$  (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ..... Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες  $E(\dots, \dots)$  και η διευθετούσα έχει εξίσωση .....». (Μονάδες 9)

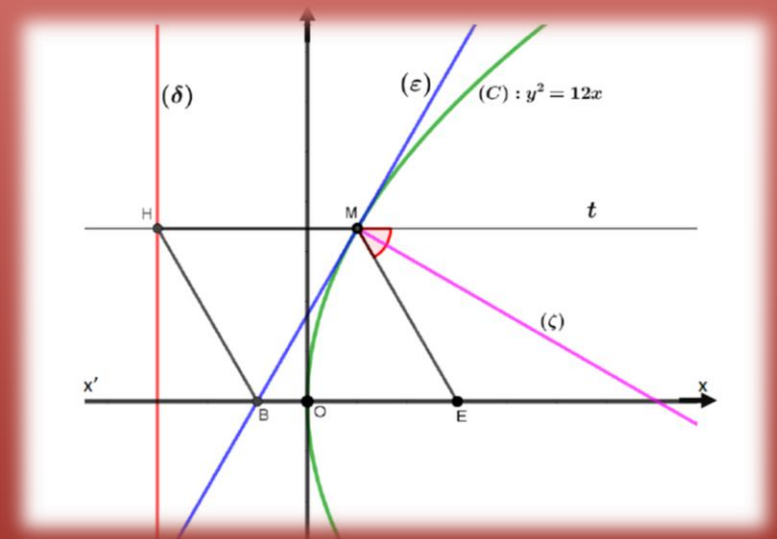
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο  $A(1, -2)$ . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας  $\epsilon$  με τον άξονα  $x'x$  είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 8)

# Θέμα 4<sup>ο</sup>

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή  $C: y^2 = 12x$  με εστία  $E$  και η εφαπτομένη ευθεία  $(\varepsilon)$  της  $(C)$  στο σημείο της  $M(1, 2\sqrt{3})$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$ . Από το σημείο  $M$  φέρνουμε ημιευθεία  $Mt$  παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ , η οποία τέμνει τη διευθετούσα  $(\delta)$  στο σημείο  $H$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η  $(\varepsilon)$  έχει εξίσωση  $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$ . (Μονάδες 6)  
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $B, H, E$ . (Μονάδες 6)  
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $MEBH$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)  
 δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\zeta)$  η οποία διχοτομεί την γωνία  $\widehat{EMt}$ . (Μονάδες 6)



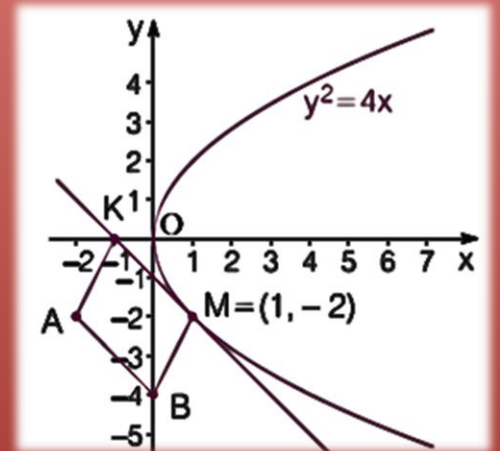


## ΑΣΚΗΣΗ 4-18372

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $A(-2,-2)$ ,  $B(0,-4)$  και την παραβολή  $y^2 = 4x$ .

- α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε το σημείο  $M$  της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην  $AB$ . (Μονάδες 8)
- γ) Αν  $M(1,-2)$  και  $K$  είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα  $x'x$ , να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $ABMK$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)



Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ , το σημείο της  $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$  και η ευθεία  $\varepsilon$  του επιπέδου με εξίσωση  $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ .

α) i. Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon$  δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M$  από την  $\varepsilon$ . (Μονάδες 7)

ii. Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι  $(M\Gamma\Delta) = 5$  τ.μ. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας  $\zeta$  της παραβολής με  $\zeta$  παράλληλη στην  $\varepsilon$ . (Μονάδες 8)

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών  $\zeta$  και  $\varepsilon$ ; (Μονάδες 5)

## ΑΣΚΗΣΗ 4-21883

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραβολή  $C: x^2 = 4y$  και η ευθεία  $\varepsilon: y = x - 2$ .

α) Να βρείτε την εστία  $E$  και τη διευθετούσα  $\delta$  της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxy$  να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής  $C$  και της ευθείας  $\varepsilon$ . (Μονάδες 8)

γ) Αν  $M(x,y)$  είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του  $M$  από την ευθεία  $\varepsilon$  είναι  $d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$  (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου  $M$  από την ευθεία  $\varepsilon$  καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

## **ΑΣΚΗΣΗ 4-22275**

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση  $y^2 = 4x$  (1).

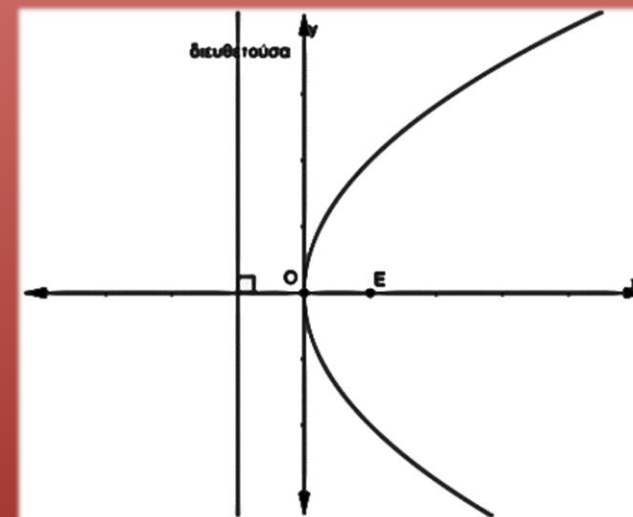
- α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ. (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο A(0,2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

#### ΑΣΚΗΣΗ 4-22465

#### Ενδεικτική Απάντηση

Έστω παραβολή  $C$  με κορυφή την αρχή των αξόνων  $O$  και άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ . Η απόσταση της εστίας  $E$  από την διευθετούσα  $\delta$  της παραβολής  $C$  είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

- α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η  $E(2,0)$ , η διευθετούσα της είναι η  $\delta: x = -2$  και η εξίσωσή της παραβολής είναι  $y^2 = 8x$ . (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της  $A(2,4)$  είναι η  $\varepsilon: y = x + 2$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon$  στο σημείο της  $A(2,4)$ . (Μονάδες 7)



# **§3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ**

## **Θέμα 2<sup>ο</sup>**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-20883

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης  $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$ .

α) Να βρείτε τα μήκη  $BB'$ ,  $AA'$  του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της  $E$  και  $E'$ . (Μονάδες 12)

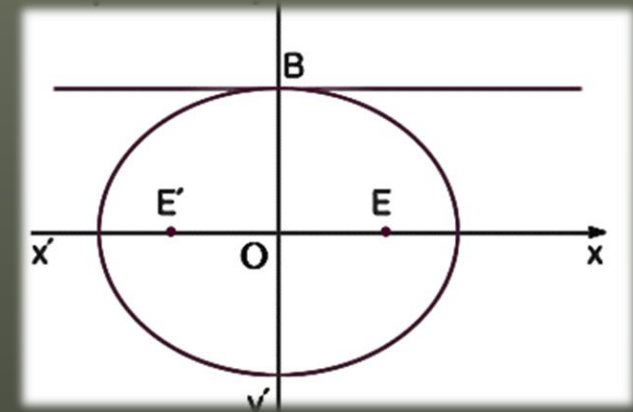
β) Αν  $E'(-3,0)$  και  $E(3,0)$ , να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο  $E'$  και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το  $E$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ . (Μονάδες 13)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-21308

### Ενδεικτική Απάντηση

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Να βρείτε:

- Τις συντεταγμένες των εστιών  $E$  και  $E'$  της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 9)
- Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 8)
- Την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της έλλειψης στο σημείο της  $B(0,4)$ . (Μονάδες 8)





Δίνονται η παραβολή  $y^2 = 2px$  και η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$ , να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία  $E$  της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το  $O$ , αν η μια εστία της είναι το σημείο  $E(1,0)$  και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση  $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$  (1)

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0,9) είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της B(0,9). (Μονάδες 10)

Δίνεται η εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση:

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ..... Οι εστίες της  $E$  και  $E'$ , έχουν συντεταγμένες  $E(\dots, \dots)$  και  $E'(\dots, \dots)$ . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ..... και η εκκεντρότητα της είναι ίση με .....

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της  $B(0,-2)$ . (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22556

### Ενδεικτική Απάντηση

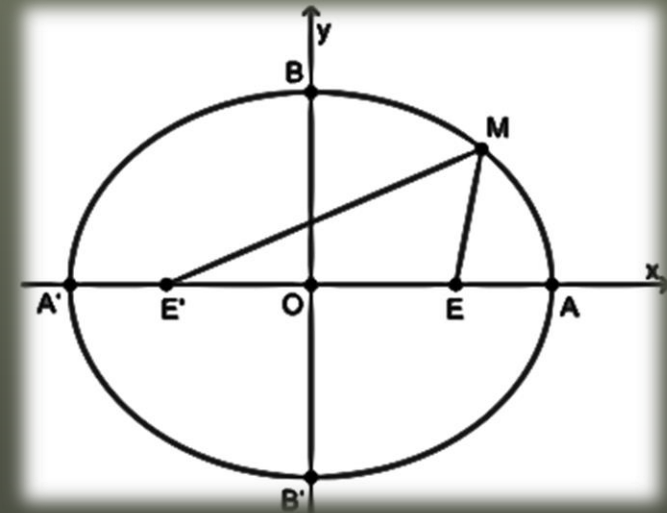
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία  $A'(-5,0)$ ,  $A(5,0)$ ,  $B'(0,-4)$  και  $B(0,4)$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι  $(A'A)=10$  και  $(B'B)=8$ . (Μονάδες 10)

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία  $E'(-3,0)$  και  $E(3,0)$ . (Μονάδες 10)

β) Έστω  $M$  ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι  $(ME')+(ME)=10$ . (Μονάδες 5)



**ΑΣΚΗΣΗ 2-22558**Ενδεικτική Απάντηση

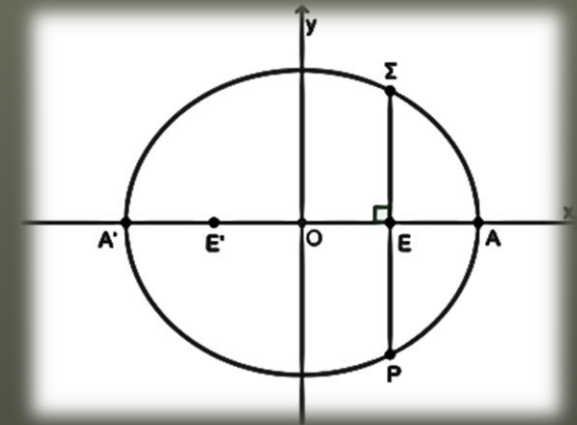
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία  $E'(-2,0)$  και  $E(2,0)$  και μήκος μεγάλου άξονα  $(A'A)=8$ .

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ . (Μονάδες 12)

β) Έστω και τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία  $E(2,0)$ . Επίσης το  $\Sigma$  έχει θετική τεταγμένη και το  $P$  αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι  $\Sigma(2,3)$  και  $P(2,-3)$ . (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος  $\Sigma P$ . (Μονάδες 5)

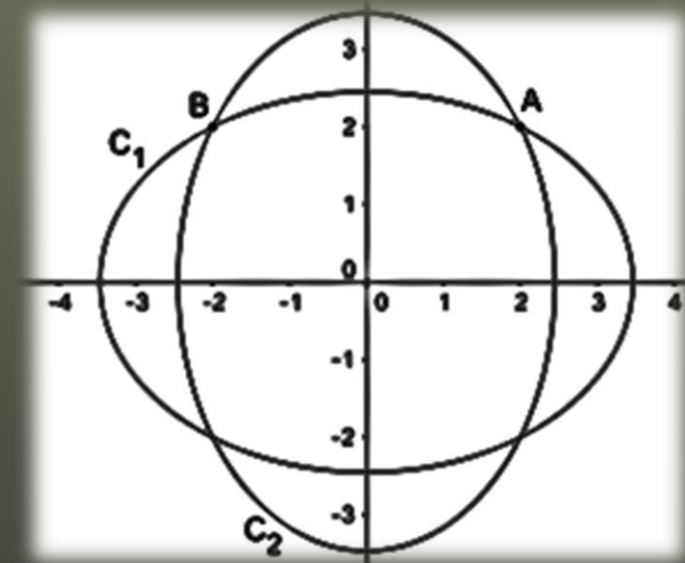


## ΑΣΚΗΣΗ 2-22564

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι ελλείψεις  $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$  και  $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A(2,2)$  και  $B(-2,2)$  ανήκουν και στις δύο ελλείψεις. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon_1$  της έλλειψης  $C_1$  στο σημείο  $A$  και η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon_2$  της έλλειψης  $C_2$  στο σημείο  $B$  είναι αντίστοιχα  $x + 2y - 6 = 0$  και  $-2x + y - 6 = 0$  (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι κάθετες. (Μονάδες 5)



**EMA 40**

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες:

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

ii. Των εστιών  $E$  και  $E'$  της έλλειψης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο  $A(0,4)$  και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)



## **§3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ**

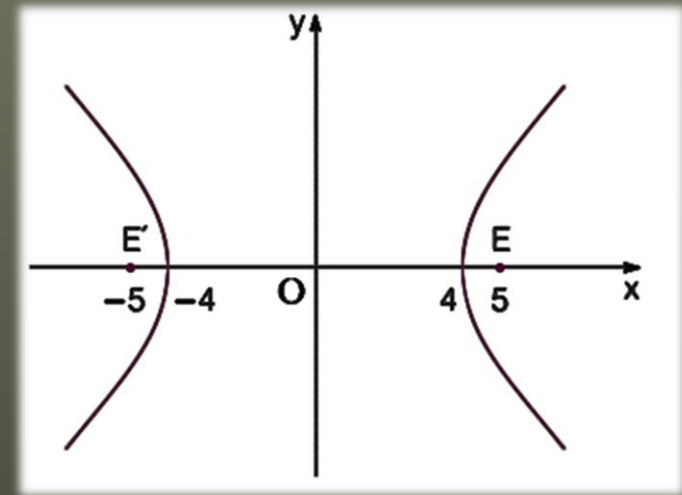
**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-16128

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η υπερβολή (C):  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών  $E'$  και  $E$ . (Μονάδες 10)  
β) Αν το  $N$  είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς  $|(NE') - (NE)|$ . (Μονάδες 5)  
γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

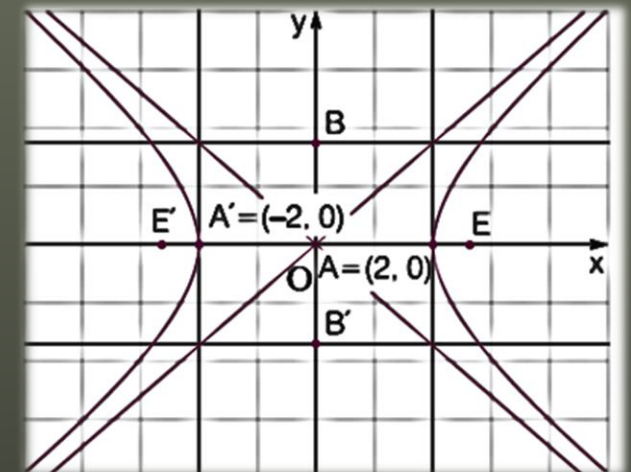


## ΑΣΚΗΣΗ 2-17944

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής  $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ , εστιακή απόσταση  $EE' = 2\sqrt{7}$  και εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \sqrt{3}$ . (Μονάδες 8)
- β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$ ,  $A'$  της υπερβολής  $(C)$ .  
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής  $(C)$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή  $(C)$ , τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)



**α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

- i. Αν ισχύει  $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$  τότε υποχρεωτικά  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .**
- ii. Η εφαπτομένη του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$ , έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .**
- iii. Η διευθετούσα της παραβολής  $y^2 = 2px$ , έχει εξίσωση  $x = -\frac{p}{2}$ .**
- iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.**
- v. Η εξίσωση:  $x^2 + y^2 = \alpha^2$  είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής. (Μονάδες 10)**

**β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ . (Μονάδες 15)**

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22169

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με ασύμπτωτη την  $y = \frac{3}{4}x$ . Η απόσταση των κορυφών της  $A$  και  $A'$  είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  στο σημείο της  $(5, \frac{9}{4})$ . (Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22196

### Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση  $x^2 - y^2 = 25$  (1)

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  της υπερβολής. (Μονάδες 10)
- γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση:  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας:

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)

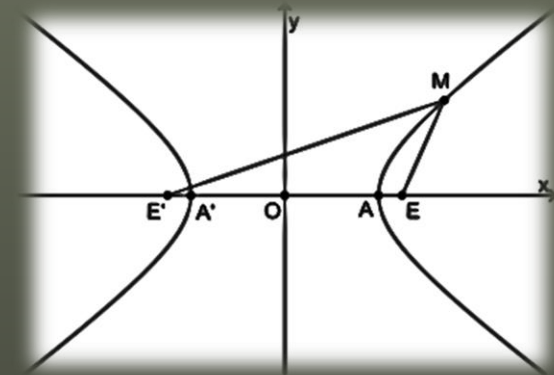
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της  $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ .  
(Μονάδες 10)

## ΑΣΚΗΣΗ 2-22559

## Ενδεικτική Απάντηση

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία  $E'(-10,0)$  και  $E(10,0)$  και κορυφές τα σημεία  $A'(-8,0)$  και  $A(8,0)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . (Μονάδες 12)
- β) Έστω  $M$  ένα σημείο της υπερβολής.
- i. Να αποδείξετε ότι  $|(ME') - (ME)| = 16$ . (Μονάδες 8)
- ii. Αν  $(ME) = 9$ , να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M$  από την εστία  $E'$ . (Μονάδες 5)





**ΑΣΚΗΣΗ 2-22561****Ενδεικτική Απάντηση**

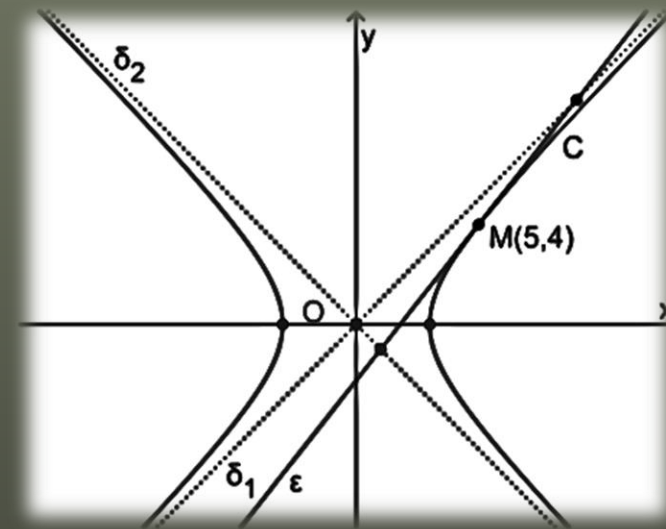
Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή  $C$  έχει εξίσωση  $x^2 - y^2 = 9$ , οι ευθείες  $\delta_1$  και  $\delta_2$  είναι οι ασύμπτωτες της  $C$  και η  $\epsilon$  είναι η εφαπτομένη της  $C$  στο σημείο της  $M(5,4)$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι  $\delta_1: y = x$  και  $\delta_2: y = -x$ . (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $M$  είναι  $\epsilon: 5x - 4y = 9$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\epsilon$  και  $\delta_1$  καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\epsilon$  και  $\delta_2$ . (Μονάδες 9)



**ΑΣΚΗΣΗ 2-22567****Ενδεικτική Απάντηση**

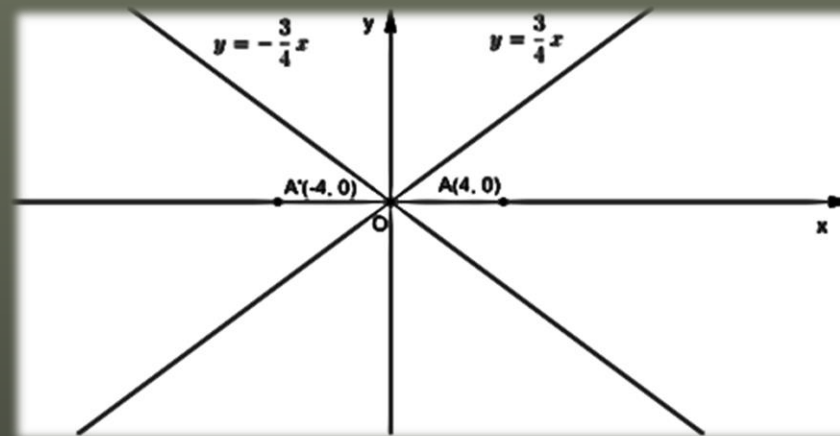
Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στα σημεία  $A'(-4,0)$  και  $A(4,0)$  και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $y = \frac{3}{4}x$  και  $y = -\frac{3}{4}x$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$  (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της είναι τα σημεία  $E'(-5,0)$  και  $E(5,0)$  (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή  $C$ . (Μονάδες 5)



# Θέμα 4<sup>ο</sup>

**ΑΣΚΗΣΗ 4-22174**Ενδεικτική Απάντηση

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης  $E(\gamma,0)$ , ενώ η άλλη εστία είναι στο  $E'(-\gamma,0)$ . Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 9)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο  $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$  εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα  $Oy$ . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο  $\Delta(0,5)$ . (Μονάδες 9)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$  με  $x > 0$ . Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών; (Μονάδες 7)

