Άσκηση 1

Α. $2(x-1)+2<1-3(x-3)$

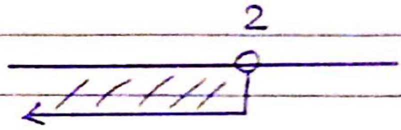
$\underbrace{2x}\,\cancel{-2}+\cancel{2}<1-\underbrace{3x}+9$

$2x+3x<1+9$

$5x<10$

$x<\frac{10}{5}$

$x<2$



και $\frac{x-1}{5}-\frac{2x-1}{3}\leq\frac{7-3x}{15}+1$

ΕΚΠ $(3,5,15)=15$

$\cancel{15}^{3}\,\frac{x-1}{\cancel{5}_{1}}-\cancel{15}^{5}\,\frac{2x-1}{\cancel{3}_{1}}\leq\cancel{15}^{1}\,\frac{7-3x}{\cancel{15}_{1}}+15\cdot 1$

$3(x-1)-5(2x-1)\leq 7-3x+15$

$3x-3-10x+5\leq 7-3x+15$

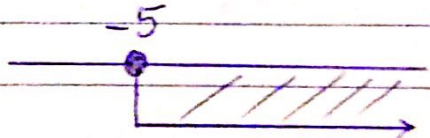
$3x-10x+3x\leq 7+15+3-5$

$-4x\leq 10+10$

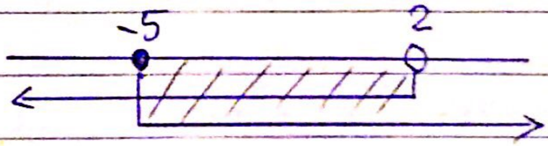
$-4x\leq 20$

$x\geq\frac{20}{-4}$

$x\geq -5$



Κοινές λύσεις :



Κοινές ακέραιες λύσεις : $L=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$

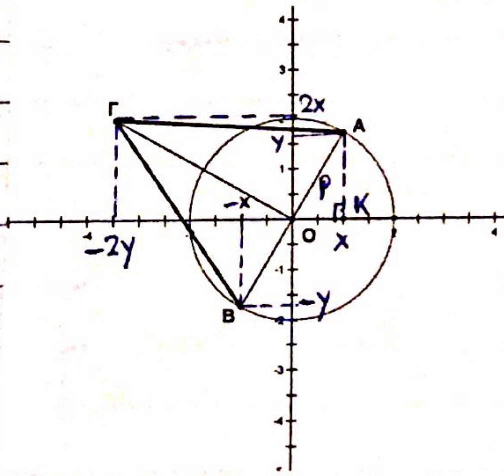
Το σύνολο L είναι η απάντηση του ερωτήματος Α.

B. $2(x+3)+x=5$

$$2x+6+x=5$$
$$3x=5-6$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}.$$

Η λύση αυτή δεν ανήκει στο σύνολο L των κοινών λύσεων του A ερωτήματος.

Άσκηση 2



A1. Το τρίγωνο AOK είναι ορθογώνιο με $\hat{K}=90^\circ$ άρα από Π.Θ. έχουμε: $OK^2+AK^2=OA^2$ ή

$$x^2+y^2=\rho^2=2^2 \text{ ή}$$
$$x^2+y^2=4. \quad (1)$$

A2. Το σημείο B ως αντιδιαμετρικό του $A(x,y)$, είναι συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων, άρα $B(-x,-y)$.

B. Έστω $\Gamma(-2y, 2x)$. Για να είναι το $AB\hat{\Gamma}$ ισοσκελές αρκεί να έχει δύο πλευρές ίσες.

$$(\Gamma A)=\sqrt{(x_A-x_\Gamma)^2+(y_A-y_\Gamma)^2}=\sqrt{(x+2y)^2+(y-2x)^2}=$$

$$=\sqrt{(x+2y)(x+2y)+(y-2x)(y-2x)}=\sqrt{x^2+\cancel{2xy}+\cancel{2yx}+4y^2+y^2-\cancel{2xy}-\cancel{2xy}+4x^2}=$$

$$=\sqrt{5x^2+5y^2}=\sqrt{5(x^2+y^2)}\overset{(1)}{=}\sqrt{5\cdot 4}=2\sqrt{5}\text{cm}.$$

Ομοίως $(ΓΒ) = \sqrt{(x_B - x_Γ)^2 + (y_B - y_Γ)^2} = \sqrt{(-x+2y)^2 + (-y-2x)^2} =$

$= \sqrt{(-x+2y)(-x+2y) + (-y-2x)(-y-2x)} = \sqrt{x^2 - \cancel{2xy} - \cancel{2xy} + 4y^2 + y^2 + \cancel{2xy} + \cancel{2xy} + 4x^2} =$

$= \sqrt{5x^2 + 5y^2} = \sqrt{5(x^2+y^2)} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$ cm.

Επίσης $(AB) = 2\rho = 4$cm, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $(ΓΑ) = (ΓΒ) = 2\sqrt{5}$cm.

Γ. Επειδή $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές και Ο μέσο του ΑΒ, συνάγεται ότι η ΓΟ είναι διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς, άρα και ύψος οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΟΓ}$, $\hat{Ο} = 90°$

Π.Θ. $ΟΓ^2 = ΑΓ^2 - ΟΑ^2$

$υ^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2^2 = 4 \cdot 5 - 4 = 20 - 4 = 16$

άρα $υ = \sqrt{16} = 4$cm.

Τότε $E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot υ = \frac{1}{2} 4 \cdot 4 = \frac{16}{2} = 8$cm^2.

Σχόλιο: Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές, προφανώς υπάρχουν και άλλες.

Ασκηση 3

A. Η γωνία του καν. εξαγώνου $\hat{\varphi}_6 = B\hat{\Gamma}\Theta = 120^\circ$
Η γωνία του τετραγώνου $\hat{\varphi}_4 = B\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$

Άρα η γωνία του ζητούμενου ν-γώνου είναι $\hat{\varphi}_\nu = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ) =$
$= 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$

Τότε η κεντρική του γωνία $\hat{\omega}_\nu = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Άρα το πλήθος των πλευρών του ζητούμενου ν-γώνου είναι:

$\nu = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$ οπότε είναι καν. δωδεκάγωνο.

B. Επειδή $AB = B\Gamma = BE = 2cm = \alpha$ όσο η πλευρά του κ-εξαγώνου, ο κύκλος με κέντρο B και ακτίνα $\rho = 2cm$ διέρχεται από τα σημεία A, Γ και E.

$E_{κυκλου} = \pi\rho^2 = 2^2 \cdot \pi = 4\pi\, cm^2$.

Γ. Η ζητούμενη γωνία $A\hat{M}E$ είναι εγγεγραμμένη σε κύκλο και βαίνει στο τόξο $\hat{AE}$ με αντίστοιχη επίκεντρη $A\hat{B}E$ που είναι ίση με τη $\Theta\hat{\Gamma}\Delta = \varphi_\nu = 150^\circ$

άρα $A\hat{M}E = \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

Δ. Στο κ. οκτάγωνο είναι $\hat{\omega}_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ άρα $\hat{\varphi}_8 = 180^\circ - 45^\circ$
οπότε $\varphi_8 = 135^\circ$.

Τότε $\varphi_\nu = 360^\circ - (135^\circ + 90^\circ) = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$ άρα

$\hat{\omega}_\nu = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

οπότε $\nu = \dfrac{360^\circ}{45^\circ} = 8$

δηλαδή το άγνωστο κ-πολύγωνο θα ήταν κ-οκτάγωνο.