



## ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$1. \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+6} \quad 2. 5^{\sqrt{x}} = 625 \quad 3. 3^{x^2-9x+11} = 27$$

$$4. 3^x = 81^{2-|x|} \quad 5. 18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}$$

$$6. 27^{\frac{x+1}{x-2}} = 3^{2x-4} \quad 7. \sqrt[x-2]{27^{x+1}} = 9^{x-2}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$1. 2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48 \quad 2. 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$$

$$3. 3^{x-1} - \frac{15}{3^{x+1}} + 3^x - \frac{21}{3^{x+1}} = 0 \quad 4. 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$$

$$5. 5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6 \quad 6. 3^x - 4 \cdot \sqrt{3^x} + 3 = 0$$

$$7. e^{2x} + e = e^x + e^{x+1} \quad 8. 3^x + 3^{x-1} = \frac{45}{3^{x+2}} + \frac{7}{3^x}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$1. 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3} \quad 2. 3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$$

$$3. 3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3} \quad 4. 5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x$$

$$5. 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x \quad 6. 9^x + 6^x = 4^x$$

$$7. 4^x = -2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x \quad 8. 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$1. (x^2 - 2x)^{x^2-3x} = 1 \quad 2. (x^2 - 5x + 6)^{x^2-2x} = 1 \quad 3. x^{x^2-x-2} = 1$$

$$4. (x-3)^{x^2} = (x-3)^{x+2} \quad 5. 2^{\eta\mu x} + 8 \cdot 2^{-\eta\mu x} = 6 \quad 6. 3^{x-1} - \frac{4}{3} \sqrt{3^x} = -1$$

$$7. 3 \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^x = 5 \quad 8. \frac{3^{x+1}}{2^x} + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^x = 5 \quad 9. 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$



## ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$1. 2^{x^2-3x+2} < 1$$

$$2. 2^{x+1} < 2^{2x-4}$$

$$3. 4\sqrt{2^x} - 8 \cdot 2^x > 0$$

$$4. 6^x + 6^{x+1} < 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$5. 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

$$6. \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$$

$$7. 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} < 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

$$8. 8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$$

$$9. (e^x + 3) \cdot (e^x - 1) > 0$$

$$10. \frac{2^x - 4}{2^x - 8} \leq 0$$

$$11. (e^x - 1)(2^x - 4)(x^2 + 2x) \geq 0.$$



## ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$1. \begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3^{x-y} - 4 \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} = 45 \\ 2^{x+y} - 3 \cdot 2^{\frac{x+y}{2}} = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4^{x-2} \cdot 2^{y-3} = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-3} = 9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5^{3x-1} \cdot 25^{y+1} = 1 \\ 4^{2x+4} \cdot 8^{y-1} = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 27^x - 125^y = 604 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3^x - 4^y = 77 \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457 \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 4 \\ 2^y \cdot 3^x = 9 \end{cases}$$



## ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού και την μονοτονία των συναρτήσεων :

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad f(x) = \left(\frac{3-x}{2x-1}\right)^x & 2. \quad g(x) = (3x^2 + 5x + 2)^x \\
 3. \quad h(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x & 4. \quad t(x) = \left(\frac{3-a}{a+2}\right)^x \\
 5. \quad u(x) = \left(\frac{3-2a}{a-3}\right)^x & 6. \quad f(x) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^x \\
 7. \quad f(x) = (3+a)^x & 8. \quad f(x) = \left(\frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{\lambda + 6}\right)^x
 \end{array}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{3-\lambda}{1+\lambda}\right)^x$ .

α) Βρείτε τα  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε να ορίζεται η συνάρτηση.

β) Βρείτε τα  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Βρείτε τα  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση να είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x^2 + x - 1) > \frac{3-\lambda}{1+\lambda}$ , για  $\lambda = 2$ .

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις που δίνονται είναι άρτιες ή περιττές:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι:  $f^2(x) - g^2(x) = 1$



## ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις, ή να τις γράψετε σε απλούστερη μορφή:

$$A = \log 32 + 2 \log 4 - \log 64, \quad B = \log 3 + 2 \log 4 - \log 12,$$

$$C = \log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}, \quad D = 3 \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 16,$$

$$E = 2 \log \frac{5}{2} + \log \frac{3}{11} - \log \frac{40}{77} - \log \frac{105}{32}, \quad F = 2 + 3 \log_5 2 - 2 \log_5 10,$$

$$G = \log_3 \left( \frac{3x^3 \sqrt{x}}{\sqrt{2x}} \right), \quad H = \log \frac{x^3 \sqrt{x}}{4\sqrt{x}y^3}.$$

2. Να δείξετε ότι ισχύει :

$$1. x^{\log_a y} = y^{\log_a x}, \quad x, y > 0, \quad 0 < a \neq 1,$$

$$2. \frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{3} \ln 64 + \ln 4 = \ln 3, \quad 3. 3^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 2,$$

$$4. \text{Αν } a \neq \beta \neq \gamma \text{ και } \frac{\log a}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - a} = \frac{\log \gamma}{a - \beta} \text{ τότε : } a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1.$$

$$5. \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_7 8 = 3.$$

3. Βρείτε  $\theta > 0$  ώστε η εξίσωση:  $x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 1 - \log^2 \theta = 0$ , να έχει διπλή ρίζα.

4. Με  $x > 0$  και  $v \in \mathbb{N}^*$  να λύσετε την εξίσωση:

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \dots + \log x^{2v-1} = 2v^2.$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1. \log_x 81 = -4 \quad 2. \log_x 27 = \frac{3}{2} \quad 3. \log_x \frac{1}{27} = -\frac{3}{5}$$

$$4. \log_{\frac{3}{2}} x = 4 \quad 5. \log_{\frac{1}{7}} x = -\frac{2}{3} \quad 6. \log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1.  $\log(x-2)^2 = 2 \log 4$
2.  $\log(x-60) + \log(x-7) = 1 - \log 5$
3.  $\log(x-9) + 2 \log \sqrt{2x-1} = 2$
4.  $2 \log x - \log 4 = \log(x-1) - \log 3$
5.  $\log(35-x^3) = 3 \log(5-x)$
6.  $\log(2x-5) + \log(3x+7) = 4 \log 2$
7.  $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

1.  $\ln(x^3+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+1) = \ln 3$
2.  $\log_2(3^{2x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$
3.  $x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6$
4.  $\log(4^{x-2} + 9) - \log(2^{x-2} + 1) = 1 - \log 2$
5.  $\log(21^{\log x+1} - 42) + \log 4 = \log 21 \cdot \log x + \log 76$
6.  $\frac{1}{2} \log(2x-1) + \frac{1}{2} \log(8x-2) = \log(4x-1)$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

1.  $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)} = \frac{1}{2}$
2.  $\frac{3 + \log x}{3 - \log x} + \frac{2 + \log x}{2 - \log x} = 5$
3.  $\frac{\log x + 3}{\log x} + \frac{\log x - 2}{\log x - 3} = \frac{9}{2}$
4.  $1 + \frac{\log(x-1)}{\log 2} = \frac{2 \log 2}{\log(x-1)}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1.  $\log \sqrt{x} + \sqrt{\log x} = \log x$
2.  $(\log x^3)^2 - 2 \log x^2 - 5 = 0$
3.  $\log[\log(2x^2 + x - 3)] = 0$
4.  $\ln(9^x - 3^x - 5) = 0$
5.  $\frac{x^{2-\log x}}{10} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
6.  $x^{\log x} = \frac{1}{10} x^2 \sqrt{x}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$1. 2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$$

$$2. (100x)^{\log 100x-2} = 1000$$

$$3. (4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$$

$$4. 10^{2\log x-3} = x$$

$$5.a. 3^{\log x} = x^{\log 3}$$

$$5.β. 3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$$

$$6.a. x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$$

$$6.β. 3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$$

$$6.γ. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$7. e \cdot x^{\ln x} - x^3 \sqrt[3]{x} = 0.$$



## ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$1. \log(2x-3) > \log(24-6x),$$

$$2. \ln(2x-1) > \ln(3-x),$$

$$3. \log(4-x^2) < \log(-3x),$$

$$4. \log(x^2-5x+7) < 0,$$

$$5. \log[\log(x^2-7x+22)] < 0,$$

$$6. \log(x^2+9) > 1 + \log x,$$

$$7. \ln^2 x - \ln \frac{1}{x} - 2 > 0,$$

$$8. \log(x^2-4) > \log 3|x|.$$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$1. 2^{\log(x^2-15x)} \leq 4,$$

$$2. \ln(5 \cdot 2^x - 6) \geq 2x \ln 2$$

$$3. x^{\log x} > 10,$$

$$4. \frac{x^2 + |2x-1| + 2}{\log(2x-1) - 1} < 0$$

$$5. \ln(x-1) < 1 + \ln(x^2-1),$$

$$6. \log^2 x - 11 \log x + 10 \leq 0,$$

$$7. \log^2 x - 5 \log x + 4 \leq 0,$$

$$8. \frac{\ln x - 1}{\ln x} \leq \frac{1}{2}.$$



## ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$1. \begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases} ,$$

$$2. \begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ \log x - \log y = \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

$$3. \begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases} ,$$

$$4. \begin{cases} \log x + 2 \log y = 6 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^{\log y} = 1000 \\ \log xy = 4 \end{cases} ,$$

$$6. \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \log(x + y) = 2 \log 5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases} ,$$

$$8. \begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 1 + \log 13 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = 3 \log 2 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

$$1. \begin{cases} 2^{\log x} - 3^{\log y} = 1 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 25 \end{cases} ,$$

$$2. \begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases} ,$$

$$3. \begin{cases} (3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5} \\ 5^{\log x} = 3^{\log y} \end{cases} ,$$

$$4. \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ x^{\log y} \cdot y^{\log x} = y^4 \end{cases} ,$$

$$5. \begin{cases} \sqrt[x]{x + y} = 2 \\ (x + y) \cdot 3^x = 6^7 \end{cases} ,$$

$$6. \begin{cases} x + \log y = 1 \\ \sqrt[x]{y^2} + 10 = 11 \sqrt[x]{y} \end{cases}$$



## ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$ .

- α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.  
 β) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = 2\ln 2$ .  
 γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) > 0$ .

2. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1.  $f(x) = \log_x \frac{x+1}{2-x}$ ,                      2.  $g(x) = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ ,

3.  $h(x) = \frac{\log(x^2 - 8x + 15)}{\sqrt{16 - x^2}}$ ,                      4.  $t(x) = \log_2 \frac{x-1}{2-x}$ ,

5.  $f(x) = \ln\left[(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 3)x + \lambda\right]$ ,

6.  $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 9)$ ,      7.  $g(x) = \sqrt{\ln(\ln(x^2 - (2+e)x + 3e))}$

3. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = 2\ln(x-1) - 1$ .

- α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.  
 β) Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) \geq 0$ .  
 γ) Βρείτε τα διαστήματα που ανήκει ο  $x$ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln(2^x - 5)$ .

- α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.  
 β) Βρείτε τα σημεία τομής του  $C_f$  με τους άξονες.  
 γ) Για ποια  $x$  το  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ ;

5. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln(3-x) - \ln(3+x)$ .

- α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.  
 β) Εξετάστε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της.  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = -\ln 2$ .



6. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ .

- Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Βρείτε τα σημεία τομής του  $C_f$  με τους άξονες.
- Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή.
- Για ποια  $x$  το  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ ;
- Βρείτε το σημείο τομής του  $C_f$  με την ευθεία: (ε):  $y = \ln 3$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$ .

- Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = -2 \ln 2$ .
- Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) < 0$ .
- Να γράψετε τη συνάρτηση ως άθροισμα μιας πολυωνυμικής και μιας λογαριθμικής.

8. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = 6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$ . Να δείξετε ότι:

- Η γραφική παράσταση της  $f$  δεν τέμνει τον άξονα  $y'y$ .
- Η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο σημεία.

9. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \log |\log(x-3)|$ .

- Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Βρείτε τα σημεία τομής του  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .
- Βρείτε τις ακέραιες τιμές του  $x$ , για τις οποίες  $f(x) > 0$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 3^{1-2x} - 2x$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια ακριβώς ρίζα και να την υπολογίσετε.