Θέμα 1ο

Α.1. Έστω μια συνάρτηση f , για την οποία ισχύει f'(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο διαστήματος Δ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
Μ 8

Α.2. Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Μ 4

Β.1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=a^x$, με α > 0. Να δείξετε ότι $f'(x)=a^x\ln a$.
Μ 4

Β.2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$. Βρείτε το πεδίο ορισμού της A_f και δείξτε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in A_f$. Μ 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο (α,β) και συνεχής στο (α,β) τότε η f παίρνει πάντοτε στο (α,β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. Μ 1

β. Η εφαπτομένη της C_f στο Σημείο Καμπής της, διαπερνά τη C_f. Μ 1

γ. Αν f συνεχής στο [α, β] και f(x) ≥ 0 για κάθε x∈[α, β] και f όχι παντού μηδέν στο [α, β], τότε $\int_{a}^{\beta} f(x)dx>0$. Μ 1

δ. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι και συνεχής. Μ 1

ε. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ τότε

$$\int_{a}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=\left[\ln\left(f(x)\right)\right]_a^{\beta}.$$ Μ 1

Θέμα 2ο

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ με f(0) = 1 και $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ για κάθε $x\in\Re$.

Α. Να αποδείξετε ότι :

i) Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x+2$. Μ 4

ii) Η f αντιστρέφεται και έχει αντίστροφη την : $f^{-1}(x)=x^3+x-2$, $x\in\Re$. Μ 4

iii) Η τιμή της f στο $x_o=-2$ είναι f(-2) = 0. Μ 2

Β. Να βρείτε τα σημεία καμπής της f. Μ 6

Γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες x'x, y'y και τη γραμμή x = -2. Μ 9

<u>Θέμα 3ο</u>

Α.1. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Μ 3

Α.2.Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x. Μ 6

Β. Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και σύνολο τιμών το διάστημα [α, β], όπου α < 0 < β.
Να αποδείξετε ότι :

i) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

ii) Υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_3 \in \Re$, ώστε $f''(x_3)=0$.

iii) Η εξίσωση, $f(x) + f'(x)f''(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\Re$.

iv) Η εξίσωση $f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\Re$. Μ 16

<u>Θέμα 4ο</u>

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ=(0, +∞), για την οποία ισχύει $f(x) \neq 1$ και $f(x) = \frac{1}{2} + \int_x^{x^2} \frac{1}{x}\left[1 - f\left(\frac{t}{x}\right)\right]^2 dt$ για κάθε x > 0 και η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)-1} + x,\ x > 0$. Να αποδείξετε ότι :

Α.i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Μ 4

ii) Η g είναι σταθερή στο Δ. Μ 2

iii) Ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{x}{x+1},\quad x > 0$ και να βρείτε το πεδίο τιμών της f(Δ). Μ 4+2

Β.i) Εξετάστε την f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής. Μ 3

ii) Εξετάστε αν η f έχει ασύμπτωτες και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Μ 4

Γ.i) Υπολογίστε το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x'x, και τις ευθείες x = 1 και x = α, με α > 1. Μ 3

ii) Υπολογίστε το όριο: $\lim_{a \to +\infty} E(a)$. Μ 3