ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤ. Μάρτιος 14 ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2011-12

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χρήστος Μουρατίδης Γ΄ Λυκείου Θετ.-Τεχν.

Θέμα 1°

Α.1. Να διατυπώσετε πως ορίζεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Μ4

Α.2. Πώς παριστάνεται γεωμετρικά ένας μιγαδικός αριθμός. Μ3

Α.3. Αποδώστε γεωμετρικά την πρόσθεση και την αφαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών. Μ3

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_o. (Αν δεν είσαι σίγουρος/η, λύσε πρώτα το Θέμα 2Β). Μ3

β. Αν το γινόμενο δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε και οι δύο συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες. Μ3

γ. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 και συνεχής στο [α, β], τότε είναι γνησίως μονότονη στο [α, β]. Μ3

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε x∈ [α, β]. Μ3

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ για κάθε α, β∈$\mathbb{R}$. Τότε θα είναι f(x) = 0, για κάθε x∈$\mathbb{R}$. Μ3

Θέμα 2°

Α. Δίνεται ο μιγαδικός z με $z = \kappa\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i\right) + (2i - 4),\quad \kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία με εξίσωση 4x + 3y + 10 = 0. Μ3

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-5|$. Μ3

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο η παράσταση $|z-5|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Μ3

Β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_o = 0.

β) Εξετάστε αν η παράγωγός της f΄ είναι συνεχής στο x_o = 0. Μ8

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και β) Να βρείτε την f^{-1}. M8

Θέμα 3°

Α. Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1 \neq z_2$, για τους οποίους ισχύει: $(z_1+z_2)^{2011}=(z_1-z_2)^{2011}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=|x\cdot z_1+z_2|$, $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι :

α) $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$. M3

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. M3

γ) Υπάρχει $x_o \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε να είναι : $f'(x_o)=3x_o^2-1$. M4

δ) Η f έχει ελάχιστο τον αριθμό $|z_2|$. M3

Β. Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$, με σύνολο τιμών το $\Re$, για την οποία ισχύει : $f^5(x)+f^3(x)+f(x)+x=4$ (1).

α) Να δειχθεί ότι η f είναι 1-1. M3

β) Να εξεταστεί αν παραγωγίζεται στο $\Re$ η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. M3

γ) Να υπολογισθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$, αν το f(1) είναι φυσικός αριθμός. M3

δ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1 f^{-1}(x)dx$. M3

Θέμα 4°

Α. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$f(x^2)\geq f^2(x)+\frac{1}{4} \quad (1),$$ για κάθε $x\in\Re$. Να δειχθεί ότι:

α) Η f δεν αντιστρέφεται. M3

β) Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$. M2

γ) $\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-1}{2x}=0$ M4

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

α) Εξετάστε τη συνάρτηση ως προς τα διαστήματα μονοτονίας της, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της. M3

β) Βρείτε ασύμπτωτες και σχεδιάστε την καμπύλη. M3

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα Ox και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$. M2

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$, για κάθε $x\neq 0$. M1 ε) Να αποδείξετε ότι $\int_{1}^{\frac{1}{x}} f(t)dt + \int_{1}^{x} \frac{f(t)}{t^2}dt = 0$. Μ3

ζ) Τέλος ότι υπάρχουν x_1, $x_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε :

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \frac{4}{25}\left(f'(x_1) + f'(x_2)\right).$$ Μ4

Καλά Αποτελέσματα !