# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2005-2010-14

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χρήστος Μουρατίδης  Γ΄ Λυκείου Θετ.-Τεχν.

## Θέμα 1ο

**Α.** Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Fermat. (10 Μ)

**Β.** Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat ισχύει πάντα;

Δώστε παράδειγμα. (6 Μ)

**Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_o$, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_o, β)$, τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (3 Μ)

**β.** Μία συνάρτηση $f : A \to \Re$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :

αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$. (3 Μ)

**γ.** Αν υπάρχει το όριο της f στο $x_o$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}$ , εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο $x_o$, με $k \in$ Í και $k \geq 2$. (3 Μ)

## Θέμα 2ο

**Α.** Έστω f συνάρτηση συνεχής τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Re$ ισχύει :

$f(x^2-x) + f(x) = 3x^2 + x - 2$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (0,1)$ ώστε $f(ξ)=ξ$. (5 Μ)

ii) για κάθε $η \in (-6,6)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (-1,2)$ ώστε $f(x_o)=η$. (5 Μ)

iii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $ρ \in (0,1)$ ώστε να είναι $f(ρ^2-ρ)=3ρ^2-2$. (5 Μ)

Β. i) Δείξτε ότι η εξίσωση $2x + συνx = 1$, έχει μοναδική ρίζα στο $\Re$. (5 Μ)

ii) Αν $f(x) = x^2 + ημx + 5$, να δείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = x + 5$ εφάπτεται στο $C_f$. (5 Μ)

## Θέμα 3$^o$

Α. Αν α>0 και $\alpha^x \geq 1 + \ln(1+x)$ για κάθε x>-1, υπολογίστε το α. (5 Μ)

Β. Έστω f(x) παραγωγίσιμη στο $\Re$-{1}, της οποίας δίνεται ο πίνακας μεταβολών.

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 1 |

Να βρείτε το πλήθος των ριζών κάθε μιας από τις παρακάτω εξισώσεις:

α. f(x)=0  β. f(x)=1  γ. f(x)=2  δ. f(x)=2014

(10 Μ)

Γ. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

$f(x) = - f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. (5 Μ)

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα. (5 Μ)

## Θέμα 4$^o$

Δίνεται μια συνάρτηση f:[α, β] $\to \Re$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και

$|Re(z)| > |Im(z)|$ . Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

α. $|z|=1$ (11 Μ)

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$ (5 Μ)

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (-1. 1). (9 Μ)