Ασύμπτωτες Ευθείες

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να γνωρίζουμε τις ευθείες εκείνες που «προσεγγίζουν» τη γραφική παράσταση τις οποίες ονομάζουμε ασύμπτωτες.

Ορισμός 1 – Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-}$ είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.

Παρατηρήσεις

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 τότε η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αφού τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$.
- Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f τις αναζητούμε στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού στα οποία δεν ορίζεται η f και στα σημεία εκείνα που η f δεν είναι συνεχής.

Ορισμός 2 – Οριζόντια ασύμπτωτη

Η ευθεία με εξίσωση $y = \beta, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f όταν είναι $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$).

Παρατηρήσεις

- Επομένως για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f υπολογίζουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. Αν ένα τουλάχιστον από αυτά είναι ίσο με πραγματικό αριθμό τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Ορισμός 3
Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f όταν είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x) - ax - \beta\right] = 0$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x) - ax - \beta\right] = 0$).

Παρατηρήσεις

- Η ασύμπτωτη της μορφής $y = ax + \beta$ είναι οριζόντια αν $a = 0$ ενώ αν $a \neq 0$ λέγεται πλάγια. Γι' αυτό η αναζήτηση ασύμπτωτης της μορφής $y = ax + \beta$ καλύπτει και την αναζήτηση οριζόντιας ασύμπτωτης.
- Μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει με τη C_f κοινά σημεία.

Η παρακάτω πρόταση μας βοηθά στο να προσδιορίσουμε ασύμπτωτες της μορφής $y = ax + \beta$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f.

Πρόταση
Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ όταν και μόνο όταν είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right] = \beta \in \mathbb{R}$ ή
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - ax\right] = \beta \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση
Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f τις αναζητούμε:

- Στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού στα οποία δεν ορίζεται η f.
- Στα σημεία εκείνα του πεδίου ορισμού στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

- Στο $-\infty,+\infty$ εφόσον η συνάρτηση f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty,a)$ ή $(a,+\infty)$ αντίστοιχα.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Υπολογισμός των ασύμπτωτων ευθειών μιας συνάρτησης)
Χρησιμοποιούμε τους ορισμούς των ασύμπτωτων ευθειών και βρίσκουμε όλες τις ασύμπτωτες (εάν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 1
Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\ln(x^2-4)$ **(β)** $f(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-1}$ **(γ)** $f(x)=\sqrt{x^2-9}+x$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-4)$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Κατακόρυφες
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο A. Πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f είναι οι ευθείες $x=-2$ και $x=2$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[\ln(x^2-4)\right]=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\ln(x^2-4)\right]=-\infty$

Άρα οι ευθείες $x=-2$ και $x=2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

Οριζόντιες.
Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2-4)\right]=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(x^2-4)\right]=+\infty$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Πλάγιες
Είναι:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln(x^2-4)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left[\ln(x^2-4)\right]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2-4}=0$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Κατακόρυφες

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Α. Πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f είναι οι ευθείες $x=1$ και $x=-1$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^3+2x-3)'}{(x^2-1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2}{2x}=\dfrac{5}{2}$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{5}{2}$. Άρα η ευθεία $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{x^3+2x-3}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right)=(+3)(+\infty)=+\infty$

Επομένως είναι η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{x^3-x}=1$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x}=1$

Άρα η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

(γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-9}+x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο Α και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x}=0$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}+1\right)=2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-9+x^2}{\sqrt{x^2-9}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$

Επομένως η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ **(β)** $f(x)=\sqrt{x^2-1}-2x$ **(γ)** $f(x)=e^x-2x+3$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Κατακόρυφες

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Α. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $x=0$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^x+1\right)\dfrac{1}{e^x-1}\right]=(+2)(+\infty)=+\infty$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-1}=-1$

Επομένως οι ευθείες $y=1$ και $y=-1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντίστοιχα.

Πλάγιες

Επειδή υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-1}-2x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Κατακόρυφες

Επειδή η f είναι συνεχής στο Α η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-2\right)\right]=(+\infty)(-1)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-2x\right)=+\infty$

Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-2\right)=-1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

Επομένως η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-2\right)=-3$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0$

Επομένως η ευθεία $y=-3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

(γ) Η συνάρτηση $f(x)=e^x-2x+3$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο Α και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-2+\dfrac{3}{x}\right)\right]=(+\infty)(+\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x+3\right)=+\infty$

Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x-2x+3\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2\right)=+\infty$

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-2x+3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(e^x-2x+3\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2\right)=-2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x+3+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+3\right)=3$

Επομένως η ευθεία $y=-2x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ (β) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ (γ) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο Α. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $x=0$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$. Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

(Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|}=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$)

Πλάγιες

Επειδή η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο Α. πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $x=0$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\frac{1}{x^2}\right]=(-1)(+\infty)=-\infty$

Επομένως η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Πλάγιες

Επειδή η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

(γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο Α και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες

Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$

Επομένως η ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=-1$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

Επομένως η ευθεία $y=-x-\dfrac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x<0\\ \ln x-x & x>0\\ 1 & x=0\end{cases}$ **(β)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-2} & x<2\\ 2 & x=2\\ \dfrac{x^2+1}{x-2} & x>2\end{cases}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $x=0$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-x)=-\infty$

Επομένως η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)\right]=(+\infty)(-1)=-\infty$

(Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$)

Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = 0$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x - x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) + x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A} = \mathbb{R}$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{2\}$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $x=2$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \left[(x^2+1)\dfrac{1}{x-2}\right] = (+5)(+\infty) = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-2} = 1.$

Επομένως η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = 2$

Επομένως η ευθεία $y = x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν :

(α) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ (δ) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ (η) $f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

(β) $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$ (ε) $f(x)=\dfrac{x^3+5x-6}{x^3-4x}$ (θ) $f(x)=|x-1|+x^2$

(γ) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{e^x}$ (ζ) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x}$ (ι) $f(x)=x^2\ln x$

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν :

(α) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+3x$ (δ) $f(x)=x^3\ln x$ (η) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

(β) $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{3e^x+2}$ (ε) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ (θ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$

(γ) $f(x)=\sqrt{x^2-8x}$ (ζ) $f(x)=\ln\left(x^2-4x\right)$ (ι) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν :

(α) $f(x)=x+\ln\sqrt{1+x^2}$ (δ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$ (η) $f(x)=3^x x^2$

(β) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x}$ (ε) $f(x)=\dfrac{4x-|x-2|}{x}$ (θ) $f(x)=\ln\left(9-x^2\right)$

(γ) $f(x)=\ln\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)$ (ζ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-3x$ (ι) $f(x)=x\eta\mu\dfrac{5}{x}$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ και $g(x)=\ln\dfrac{xe^x}{1+x}$. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη των γραφικών παραστάσεων των f και g.

5. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x-3\ln\left|2e^x-1\right|$ έχει τρείς ασύμπτωτες οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

6. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f(x)=3x+\dfrac{1}{2x^2}$.

7. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x^2} & x<0\\ \dfrac{4x^2-1}{x} & x>0\end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x^2\ln x & x>0\end{cases}$ (γ) $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}$

8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+3x-1}{x^2}$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

(γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

(δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μέθοδος 2 (Εύρεση παραμέτρων)

Αν μας ζητούν να υπολογίσουμε κάποιους παραμέτρους ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=\xi_1$ και οριζόντια ασύμπτωτη την $y=\xi_2$, τότε:

- Βρίσκουμε το A_f
- Απαιτούμε το ξ_1 να είναι ρίζα του παρονομαστή.
- Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ και απαιτούμε: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\xi_2$
- Εξετάζουμε αν το $\lim\limits_{x\to\xi_1} f(x)$ ή $\lim\limits_{x\to\xi_1^-} f(x)$ ή $\lim\limits_{x\to\xi_1^+} f(x)$ είναι $\pm\infty$

Αν θέλουμε να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(\alpha x+\beta)\right)=l$ τότε αρκεί $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(\alpha x+\beta-l)\right)=0$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $x=1$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-6x+2a-1}{9x-a^2}$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-6x+2a-1}{9x-a^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\left(-\infty,\dfrac{a^2}{9}\right)\cup\left(\dfrac{a^2}{9},+\infty\right)$. Η f είναι συνεχής στο Α. επομένως η μοναδική πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f είναι η ευθεία $x=\dfrac{a^2}{9}$. Άρα καταρχήν πρέπει:

$$\frac{a^2}{9}=1\Leftrightarrow a^2=9\Leftrightarrow a=3 \text{ ή } a=-3$$

- Αν $a=3$ τότε $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{9x-9}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{9(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-5)}{9(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-5}{9}=-\frac{4}{9}$$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\dfrac{4}{9}$ και συνεπώς η ευθεία $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη σης C_f.

- Αν $a=-3$ τότε $f(x)=\dfrac{x^2-6x-7}{9x-9}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-6x-7}{9x-9}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-6x-7}{9}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=\left(-\frac{12}{9}\right)(+\infty)=-\infty$$

Επομένως όταν $a=-3$ η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Παράδειγμα 6

Να προσδιοριστούν τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-2ax+\beta\right)=\dfrac{3}{2}$.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+2}-2ax+\beta$ με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-2ax+\beta\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2a+\frac{\beta}{x}\right)\right] =$$

- $$(+\infty)(1-2a) = \begin{cases} +\infty \text{ αν } 1-2a>0 \Leftrightarrow a<\frac{1}{2} \\ -\infty \text{ αν } 1-2a<0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Επομένως όταν $a \neq \frac{1}{2}$ το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δεν είναι ίσο με $\frac{3}{2}$.

Αν $a=\frac{1}{2}$ τότε $f(x)=\sqrt{x^2-x+2}-x+\beta$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-x+\beta\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2-x^2}{\sqrt{x^2-x+2}+x}+\beta\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x}+\beta\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}+\beta\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}+\beta\right) = -\frac{1}{2}+\beta$$

Επομένως πρέπει $\beta-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \beta=2$.

Άρα όταν $a=\frac{1}{2}$ και $\beta=2$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-2ax+\beta\right)=\frac{3}{2}$.

2ος τρόπος

Για να ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-2ax+\beta\right)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+2}-\left(2ax-\beta+\frac{3}{2}\right)\right]=0$$

πρέπει η ευθεία $y=ax-\beta+\frac{3}{2}$ να είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{x^2-x+2}$. Άρα είναι $2a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ και

$$-\beta+\frac{3}{2}=\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-2ax\right].$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$$

Επομένως είναι $2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-2ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x}=$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Επομένως είναι $-\beta+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=2$.

Ασκήσεις

9. Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ ώστε ο άξονας $y'y$ να μην είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(1+ax)}{x^2}$.

10. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x^2+2x+7}-ax+\beta$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x+1$

11. Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\frac{x^2-5x+a+2}{8x-a^2}$ να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=2$.

12. να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\beta x^2+12}{x+a}$ να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ και η ευθεία $x=-2$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(a+3)x^2-3ax+4}{2x-1}$ και η ευθεία $(\varepsilon)y=3x+\beta$. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (ε) να είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

14. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}-ax+3\beta\right)=4$.

15. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^2+1}-ax+3\beta\right)=0$.

16. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{ax^2-\beta x+a}$ με $a>0$ να έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x+3$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-2ax+\beta$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 και το σημείο $\mathrm{A}(x_0,1)$ ανήκει στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g να βρείτε τα α, β.

Μέθοδος 3 (Εύρεση ορίων μέσο ασύμπτωτων ευθειών)

Εάν γνωρίζουμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f τότε ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta$. Γνωρίζοντας τα παραπάνω όρια υπολογίζουμε το όριο που μας δίνεται.

Παράδειγμα 8

Η ευθεία $y = 3x - 6$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{af(x) + 4x}{xf(x) - 3x^2 + 8x} = -1$.

Λύση

Επειδή η ευθεία $y = 3x - 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ έπεται ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - 3x \right] = -6$. Είναι:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{af(x) + 4x}{xf(x) - 3x^2 + 8x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a\dfrac{f(x)}{x} + 4}{f(x) - 3x + 8} = \frac{3a + 4}{-6 = 8} = \frac{3a + 4}{2}$$

Πρέπει $\dfrac{3a + 4}{2} = -1 \Leftrightarrow 3a + 4 = -2 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2$.

Ασκήσεις

18. Αν η ευθεία $y = 3x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (β) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - 3x \right]$

19. Η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

(α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x \right]$.

(β) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, αν ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

20. Η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{af(x) - 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 3$.

21. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=4x+3$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot f(x)-4x^2+6x\cdot\eta\mu x}{x^2\cdot f(x)-4x^3+2\eta\mu(x^2)}$

22. Αν f είναι μια μη σταθερή πολυωνυμική συνάρτηση να δειχθεί ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{xf(x)+c}{f(x)}$, $c\neq 0$ η οποία δεν τέμνει την C_g.

23. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=x+2$, να βρείτε τον $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}\cdot f(x)+3\mu x^2+4}{x^2 f(x)+\sqrt{x^4+1}-x^3+2}=10$$

Μέθοδος 4 (Διάφορες εφαρμογές)

Παράδειγμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $a,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f(a)-f(\beta)=\frac{\kappa|a-\beta|}{\lambda+|\alpha-\beta|}\quad \textbf{(1)}$$

Με $\kappa\neq 0$ και $\lambda>0$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Από την (1) έπεται ότι:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{\kappa|x-x_0|}{\lambda+|x-x_0|}\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)+\frac{\kappa|x-x_0|}{\lambda+|x-x_0|}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x_0)+\dfrac{\kappa|x-x_0|}{\lambda+|x-x_0|}\right]=f(x_0)+0=f(x_0)$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$ άτοπο διότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Παράδειγμα 10

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^4 f^4(x)+g^4(x)\right]=0$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=f(x)+g(x)$ στο $-\infty$.

Λύση

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\left|g^4(x)\right|=g^4(x)\le x^4 f^4(x)+g^4(x)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^4 f^4(x)+g^4(x)\right]=0$ έπεται ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} g^4(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{g^4(x)}=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left|g(x)\right|=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\left|x^4 f^4(x)\right|=x^4 f^4(x)\le x^4 f^4(x)+g^4(x)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^4 f^4(x)+g^4(x)\right]=0$ έπεται ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^4 f^4(x)\right]=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4 f^4(x)}=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left|xf(x)\right|=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[xf(x)\right]=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $P(x)=xf(x)$ με πεδίο ορισμού το $A_\rho=\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=0$ και $f(x)=\dfrac{P(x)}{x}$ με $x\neq 0$ και επειδή είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{x}=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=0+0=0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Παράδειγμα 11

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf(x)-3x^2+5x-6\right]=2$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xf(x)-3x^2+5x-6$ με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2$ και $xf(x)=h(x)+3x^2-5x+6$ (1).

Με $x\neq 0$ από την (1) έπεται ότι $f(x)=\dfrac{h(x)+3x^2-5x+6}{x}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)+3x^2-5x+6}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{x}+3x-5+\frac{6}{x}\right]=-\infty$$

Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Είναι :

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)+3x^2-5x+6}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{x^2}+3x-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right]=3$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)+3x^2-5x+6}{x}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)-5x+6}{x}\right]=$$
  $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{x}-5+\frac{6}{x}\right]=-5$$

Άρα η ευθεία $y=3x-5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Παράδειγμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)-f(x)=2xe^x$. Αν $f(0)=0$ να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)-f(x)=2xe^x \Leftrightarrow f'(x)e^x-f(x)e^x=2xe^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)e^x-f(x)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=2x\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\left(x^2\right)'\Rightarrow\frac{f(x)}{e^x}=x^2+c\Rightarrow f(x)=e^x\left(x^2+c\right)\qquad(1)$$

Για $x=0$ από την (1) έπεται ότι $f(0)=c\Rightarrow 0=c$. Άρα $f(x)=e^x x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Κατακόρυφες

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x x^2\right) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x x^2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(x^{-2}\right)'} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{(2x)'} =$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{-2} = 0$

  Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγιες

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x x\right) = +\infty$

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Ασκήσεις

24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf(x)-x^2-3x\right]=1$.

(α) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(β) Αν η f είναι άρτια να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2f(x)-x^3+3x^2+5\right]=8$.

Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

26. Η ευθεία $y=3x+7$ είναι ασύμπτωτη της C_f μιας περιττής συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

27. Μία συνάρτηση f έχει την ιδιότητα: $2x < f(x) < 2x + \dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

28. Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f''(x)=\dfrac{6}{x^3}$. Να βρείτε την f όταν γνωρίζετε ότι η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=4x-2$.

29. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f(x)-g(x)=x-4$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η ευθεία $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\cdot f(x)-3x^2+1}$

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+1-x\ln^2 x$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

(γ) Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και οι ασύμπτωτες της C_f.

(ε) Να δείξετε ότι εξίσωση $x^2-2x+1-x\ln^2 x=\dfrac{2006}{2007}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)-g(x)=x-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$.

(β) Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(h(x))+5h(x)+\eta\mu(h(x))}{h(x)f(h(x))-3(h(x))^2+1}$

32. Έστω οι συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g'(x)=f'(x)-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=1$. Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα $x'x$, να βρείτε στο $+\infty$ την ασύμπτωτη της C_g.

33. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x-2}$. Να δείξετε ότι:

(α) Τα σημεία των ακροτάτων της f και το σημείο τομής των ασύμπτωτων της C_f είναι συνευθειακά.

(β) Δεν υπάρχει εφαπτόμενη της C_f που να είναι παράλληλη προς την πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

34. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.