Τα Άλυτα Προβλήματα των Μαθηματικών

Νικολάου Άγγελος,
Σκιαθήτης Γεώργιος,
Μιχαλακόπουλος Δημήτριος

ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓ. ΑΝΑΡΓΥΡΩΝ

- ***Άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών***
- ***Τα Άλυτα Προβλήματα της Γεωμετρίας***

Υπεύθυνος Καθηγητής:

Μουρατίδης Χρήστος

2012 - 2013

Άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών

Τα κλασικά άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών παραδοσιακά ήταν τρία:

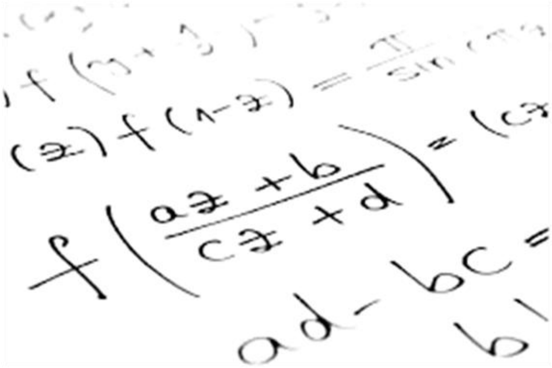
Η Εικασία του Γκόλντμπαχ

Κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, έτσι ώστε για κάθε n $\geqq$ **2**, **2n = p + q**, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

Η υπόθεση του Ρήμαν

Το πραγματικό μέρος κάθε μη τετριμμένης μηδενικής ρίζας της συνάρτησης ζ του Ρήμαν είναι ½.

Το τελευταίο Θεώρημα του Φερμά



Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, και z τέτοιοι ώστε **x^n + y^n = z^n**, όπου n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2.

Σημείωση: Το τελευταίο θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε πρόσφατα από τους μαθηματικούς Andrew Wiles και Richard Taylor στο πανεπιστήμιο Princeton.

Άλλα άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών είναι:

- *Υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός μεταξύ 2 διαδοχικών τελείων τετραγώνων;*
- *Η υπόθεση των διδύμων πρώτων αριθμών.*
- *Η απειρία των τέλειων αριθμών.*
- *Υπάρχει περιττός τέλειος αριθμός;*
- *Περιέχει η ακολουθία Φιμπονάτσι άπειρους πρώτους αριθμούς;*
- *Αν × είναι πρώτος ο 2×-1 δεν θα διαιρείται από το τετράγωνο ενός πρώτου.*
- *Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής v^2+1;*
- *Τα Αιγυπτιακά κλάσματα: προσδιορίστε αν κάθε κλάσμα της μορφής 4/n με n > 1 μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα τριών θετικών ρητών αριθμών με αριθμητή 1, π.χ. 4/n = 1/i + 1/j + 1/k.*

Τα Άλυτα Προβλήματα της Γεωμετρίας

1) Ο διπλασιασμός του κύβου (Το Δήλιο πρόβλημα)
Ζητείται να κατασκευαστεί με τον κανόνα και τον διαβήτη το μήκος της πλευράς κύβου με όγκο διπλάσιο ενός άλλου κύβου με γνωστή πλευρά.

2) Η τριχοτόμηση της γωνίας
Ζητείται να κατασκευαστεί με τον κανόνα και τον διαβήτη το 1/3 του μέτρου δοθείσης γωνίας που σχηματίζεται από δύο ημιευθείες.

3) Ο τετραγωνισμός του κύκλου
Ζητείται να κατασκευαστεί με τον κανόνα και τον διαβήτη τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός δοθέντος κύκλου.

4) Η κατασκευή κανονικών πολυγώνων*
Ζητείται να κατασκευαστεί με τον κανόνα και τον διαβήτη η πλευρά κανονικού ν-γώνου (ίσες γωνίες και πλευρές), όταν το ν είναι τυχαίος θετικός ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3.

Με τα προβλήματα αυτά ασχολήθηκαν σχεδόν στο σύνολό τους οι γεωμέτρες της αρχαιότητας από τον 5ο π.Χ. αιώνα και έπειτα και απασχόλησαν το σύνολο της τότε κοινωνίας, αφού ανέβηκαν ορισμένα από αυτά (διπλασιασμός κύβου και τετραγωνισμός κύκλου) και ως έργα στη θεατρική σκηνή. Παρ'όλες τις προσπάθειες παρέμειναν άλυτα κάτω από τις συνθήκες που ζητούνταν οι λύσεις τους. Οι προσπάθειες όμως οδήγησαν στην επινόηση νέων επιφανειών (εκτός της επιφάνειας της σφαίρας, του κυλίνδρου και του κώνου) και καμπύλων (εκτός του κύκλου) ανοίγοντας νέους ορίζοντες στη μαθηματική επιστήμη.
Οι αποτυχίες ανέδυσαν τα ερωτήματα: Μήπως η λύση αυτών των προβλημάτων δεν είναι δυνατόν να γίνει μόνο με τον κανόνα και τον διαβήτη; Κάτω από ποιές προϋποθέσεις μπορούν να υπάρξουν λύσεις μόνο με τον κανόνα και το διαβήτη γι' αυτά τα προβλήματα;
Σήμερα οι απαντήσεις αυτών των ερωτημάτων είναι γνωστές. Η κατασκευή του τετραγωνισμού του κύκλου και του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη, ενώ οι κατασκευές που ζητούνται από τα άλλα δύο προβλήματα είναι δυνατές μόνο κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.
Η απόδειξη του αδύνατου της λύσης στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δόθηκε το 1882.
Η απόδειξη του αδύνατου της λύσης στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δόθηκε το 1829.

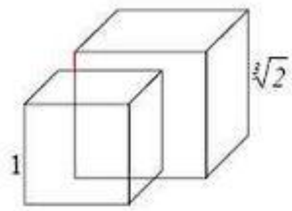
Το πρόβλημα δεν αναλύεται παρακάτω.

1. Το Δήλιο πρόβλημα

Το Δήλιο πρόβλημα ή ο διπλασιασμός του κύβου απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων, οδήγησε σε μια έντονη ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

Το Δήλιο πρόβλημα απόκτησε δημοσιότητα όταν το ανέφερε, σε μια τραγωδία ο βασιλιάς της Κρήτης Μίνωας διαμαρτυρόμενος γιατί το κενοτάφιο, που προοριζόταν για το υιό του Γλαύκο, ήταν πολύ μικρό για βασιλικό μνημείο και απαιτούσε το διπλασιασμό του όγκου του χωρίς να αλλάξει το κυβικό του σχήμα. Πανελλήνια γνωστό όμως έγινε το πρόβλημα αυτό όταν αναφέρθηκε από το μαντείο του Δήλιου Απόλλωνα, όταν δηλαδή ρωτήθηκε το μαντείο, τι πρέπει να κάνουν για να απαλλαγούν από το λοιμό που μάστιζε το νησί Δήλο, απάντησε ότι τούτο θα συμβεί αν διπλασιάσουν τον κυβικό βωμό του Απόλλωνα. Έτσι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου πέρασε στην ιστορία με το όνομα "Δόλιο πρόβλημα".

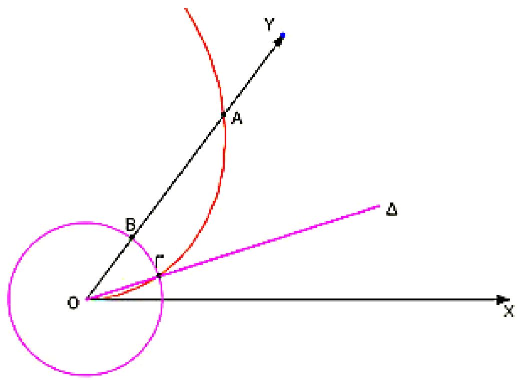
Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα, κατά την ελληνική αρχαιότητα, σώθηκαν και φθάσανε σε μάς από τον σχολιαστή των έργων του Αρχιμήδη Επιτόκιο (6 αι. μ.). Αυτός σχολιάζοντας ανάλογο πρόβλημα του Αρχιμήδη και τη μέθοδο που αυτός χρησιμοποίησε για να το λύσει, δίνει όλες τις λύσεις παρεμβολής που του ήταν τότε γνωστές από παλαιότερες συγγραφές. Οι λύσεις που δίνει είναι 12 και η αρχαιότερη είναι του Αρχύτα. Οι κυριότερες από τις γνωστές λύσεις προέρχονται από τους :



- *Ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.χ.)*
- *Ο Αρχύτας ο Καραντινός (428-365 π.χ.)*
- *Ο Πλάτων (427-347 π.χ.)*
- *Ο Μέναιχμος (375- π.χ.)*
- *Ο Αρχιμήδης (287-212 π.χ.)*
- *Ο Ερατοσθένης (276-194 π.χ.)*
- *Ο Απολλώνιος (265-170 π.χ.)*
- *Ο Νικομήδης (έζησε γύρω στο 200 π.χ.)*
- *Ο Ήρων ο Αλεξανδρινός (1ος -2ος αι. μ.Χ.)*
- *Ο Διοκλής (1ος αι. π.χ.)*
- *Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. μ.Χ.)*

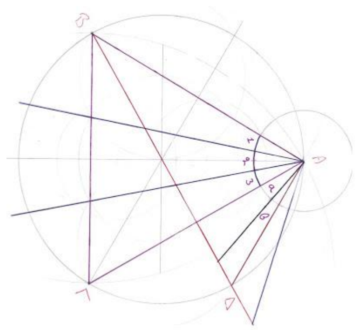
2. Η Τριχοτόμηση γωνίας

Σήμερα δεν γνωρίζουμε κάτω από ποιες συνθήκες τέθηκε το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας στην ελληνική αρχαιότητα. Ξέρουμε όμως ότι αποτελούσε το ένα από τα τρία μεγάλα προβλήματα μετά το Δήλιο και τον τετραγωνισμό του κύκλου. Ουσιαστικά το πρόβλημα έγκειται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, διότι αν είναι αμβλεία αφαιρούμε από αυτήν την ορθή που μπορεί να τριχοτομηθεί με χάρακα και διαβήτη. Η τριχοτόμηση όμως μιας οξείας γωνίας είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί μόνο με χάρακα και διαβήτη γιατί η εξίσωση που την εκφράζει είναι τρίτου βαθμού χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε δευτέρου. Πράγματι από τη τριγωνομετρία μας είναι γνωστή η σχέση $\boldsymbol{\varepsilon\varphi 3\theta = \frac{3\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi^2\theta}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\theta}}$ στην οποία αν θέσουμε **εφ3θ=α** και **εφθ=x** και κάνουμε τις πράξεις θα φθάσουμε στη $\mathbf{x^3\text{-}3\alpha x^2\text{-}3x+\alpha=0}$ που είναι η εξίσωση της τριχοτόμησης. Η κατασκευή με χάρακα και διαβήτη των ριζών αυτής της εξίσωσης είναι δυνατή μόνο αν μπορεί αυτή να αναλυθεί σε δύο παράγοντες, ένα πρωτοβάθμιο και ένα δευτεροβάθμιο, όμως αυτό αποδείχθηκε μόλις το 1837, ότι είναι αδύνατο.



Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες όταν οι προσπάθειές τους με το χάρακα και το διαβήτη δεν απέδωσαν, στράφηκαν σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου και σε άλλες μεθόδους. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η επινόηση από τον Ιππία τον Ηλείο της πρώτης καμπύλης στην ελληνική Γεωμετρία, μετά την περιφέρεια, της τετραγωνίζουσας, με τη βοήθεια της οποίας έδωσε και τη πρώτη λύση του προβλήματος. Οι γνωστότεροι αρχαίοι γεωμέτρες που ασχολήθηκανε με το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας είναι :

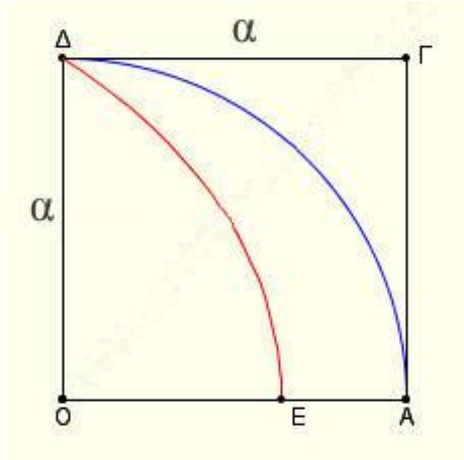
- ❖ Ιππίας ο Ηλείος (περίπου 430 π.χ.)
- ❖ Ο Αρχιμήδης (287-212 π.χ.)
- ❖ Ο Νικομήδης (περίπου 200 π.χ.)
- ❖ Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. μ.Χ.)



3. Ο Τετραγωνισμός του κύκλου

Η μέτρηση του εμβαδού του περικλειομένου από κάποιο σχήμα, ήταν σε όλους τους λαούς, από την εποχή που ακόμη η γεωμετρία ήταν εμπειρικής μορφής, βασική επιδίωξη όλων των γεωμετρών. Από τη στιγμή που διαλέξανε σαν μονάδα μέτρησης των εμβαδών, το τετράγωνο με πλευρά τη μονάδα μήκους, αυτόματα τέθηκε και το πρόβλημα του τετραγωνισμού των διαφόρων σχημάτων.

Αρχικά "τετραγωνίστηκαν" δηλαδή προσδιορίστηκε το εμβαδόν τους, τα ορθογώνια, τα τρίγωνα, τα παραλληλόγραμμα και ορισμένα πολύγωνα. Μετά από αυτό ήταν φυσικό να επιδιωχθεί και ο τετραγωνισμός σχημάτων περικλειομένων από καμπύλες γραμμές και πρώτου από όλα του κύκλου. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, το τρίτο από τα μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας, απασχόλησε πολλούς ερευνητές για πολλούς αιώνες και υπήρξε το μεγάλο εμπόδιο πάνω στο οποίο σκόνταψαν μεγάλα ονόματα. Η απαίτηση του προβλήματος είναι να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο κύκλο, αν δηλαδή είναι **R** η ακτίνα του κύκλου και **x** η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου, πρέπει να αληθεύει η σχέση $\boldsymbol{x^2 = \pi R^2}$ ή $\boldsymbol{x = R\sqrt{n}}$, όπου **π** ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου του κύκλου. Παρόλο που εμπειρικά είχε διαπιστωθεί ότι ο λόγος π της περιφέρειας προς τη διάμετρο διατηρείται σταθερός, ωστόσο η κατασκευή αυτού του λόγου και όταν ακόμη η Γεωμετρία εφοδιασμένη με την απόδειξη είχε γίνει επιστήμη, στάθηκε αδύνατη. Υπήρξαν κατασκευές του π μεγαλοφυείς κατά τη σύλληψη όχι όμως πραγματοποιημένες σύμφωνα με την απαίτηση του "χάρακα και του διαβήτη" που έθεταν τότε. Παράλληλα έγιναν μεγαλειώδεις προσπάθειες υπολογισμού της τιμής του π, οι οποίες με πρωτεργάτη τον Αρχιμήδη, έδωσαν ένδοξα αποτελέσματα.

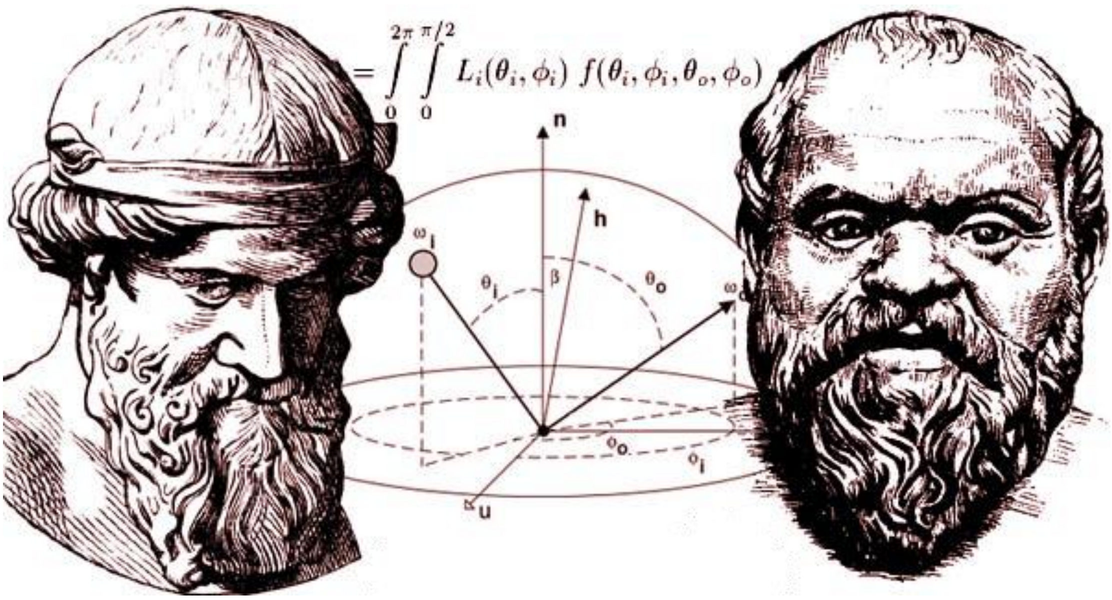


Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου είναι ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.χ.) δάσκαλος και φίλος του Περικλή. Στη συνέχεια ασχολήθηκαν οι Ιπποκράτης ο Χίος (470- 400 π.χ.) ο σοφιστής Αντιφών ο Αθηναίος (περί το 430 π.χ.) ο επίσης σοφιστής Βρύσων ο Ηρακλειώτης σύγχρονος του Αντιφώντα. Ουσιαστική ώθηση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δόθηκε από τον σοφιστή Ιππία τον Ηλείο (β' μισό του 5ου αι. π.χ.) και από τους Πάππο (3ος αι. μ.Χ.) και τον Δεινόστρατο (4ος αι. π.χ.) αδελφό του Μέναιχμου.
Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ.) αναφέρει ότι τον τετραγωνισμό του κύκλου κατόρθωσαν :

- Αρχιμήδης (267-212 π.Χ.) με τη βοήθεια της "Έλικας".
- Ο Νικομήδης (περίπου 200 π.Χ.) με την καμπύλη που ονομαζόταν "ιδίως τετραγωνίζουσα".

- Ο Απολλώνιος (265-170 π.Χ.) με την καμπύλη που ονόμαζε ο ίδιος "αδελφή της κοχλοειδούς" που ήταν όμως ίδια με την καμπύλη του Νικομήδη.

- Ο Κάρπος με κάποια καμπύλη την οποία ονομάζει απλά "εκ διπλής κινήσεως προερχομένη".



Βιβλιογραφία

i. http://ligakaikala.blogspot.gr/2008/12/blog-post_03.html

ii. http://documentarygr.blogspot.gr/2010/12/blog-post_31.html

iii. http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%B1%CE%B3%CF%89%CE%BD%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%BA%CF%8D%CE%BA%CE%BB%CE%BF%CF%85

iv. http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%B1%CE%B3%CF%89%CE%BD%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%BA%CF%8D%CE%BA%CE%BB%CE%BF%CF%85

v. http://www.telemath.gr/mathematical_ancient_times/unsolved_mathematical_problems/unsolved.php

vi. http://informatics-on-gym.blogspot.gr/2012/10/blog-post_15.html

vii. http://blogs.sch.gr/iokaragi/2012/08/18/%CE%AC%CE%BB%CF%85%CF%84%CE%B1-%CF%80%CF%81%CE%BF%CE%B2%CE%BB%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1-%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD/

viii. http://www.bozatzidis.gr/index.php?option=com_content&view=article&id=86%3A2009-10-13-22-14-25&catid=38%3A2009-10-02-17-42-47&Itemid=66&showall=1