Σταθερή συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A. Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = c$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος της μέσης τιμής αποδεικνύουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Απόδειξη

Έστω x_0 ένα σταθερό σημείο του διαστήματος Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq x_0$ π.χ $x > x_0$, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[x_0, x]$. Επομένως υπάρχει σημείο $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

Επειδή $f'(\xi) = 0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = f(x_0)$$

που σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Άμεση συνέπεια της πρότασης είναι το επόμενο πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ τότε υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x) = 0$ οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ, δηλαδή $f(x) - g(x) = c$ ή $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$

Παρατηρήσεις

1. Η πρόταση και το πόρισμα ισχύουν σε διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων. Π.χ. για τη συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & x < 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Αν Δ_1, Δ_2 είναι διαστήματα και είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ τότε υπάρχουν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & x \in \Delta_1 \\ c_2 & x \in \Delta_2 \end{cases}.$$

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Απόδειξη ταυτοτήτων ή σχέσεων)

Ταυτότητες

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο $1^{\text{ο}}$ μέλος.
- Θέτουμε το $1^{\text{ο}}$ μέλος ως μια συνάρτηση $f(x)$.
- Παραγωγίζουμε και αποδεικνύουμε ότι $f'(x) = 0$.
- Η $f(x)$ είναι σταθερή δηλαδή ισχύει $f(x) = c$

Σχέσεις

- Λύνουμε ως προς την σταθερά c, έστω $c = h(x)$.
- Αποδεικνύουμε ότι η $h(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση δηλαδή $h'(x) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x-\frac{3}{2}\left(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)=-\frac{1}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x-\frac{3}{2}\left(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)$ (1) με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=6\eta\mu^5 x-6\sigma\upsilon\nu^5 x-\frac{3}{2}\left(4\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x-4\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x\right)=$$

$$6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^4 x-\sigma\upsilon\nu^4 x\right)-6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=$$

$$6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=$$

$$6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=0$$

Επειδή $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έπεται ότι $f(x)=c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2).

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Για } x=0, \text{ από (1) έπεται ότι} & f(0)=-\frac{1}{2}\\ \text{Για } x=0, \text{ από (2) έπεται ότι} & f(0)=c\end{array}\right\} \Rightarrow c=-\frac{1}{2}.$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=-\frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x-\frac{3}{2}\left(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)=-\frac{1}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sigma\upsilon\nu^4 x-\eta\mu^4 x-\alpha\sigma\upsilon\nu 2x$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι σταθερή.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=4\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x-4\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x+2\alpha\eta\mu 2x=$$

$$=-4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x\right)+2\alpha\eta\mu 2x=$$

$$=-2\eta\mu 2x+2\alpha\eta\mu 2x=2\eta\mu 2x\cdot(\alpha-1)$$

Για να είναι η συνάρτηση f σταθερή πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f'(x)=0 \Rightarrow 2\eta\mu 2x\cdot(\alpha-1)=0$ που αυτό συμβαίνει όταν $\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=-f(x)$. Αν $f(0)=0$, να δείξετε ότι:

$$\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2=\left[f'(0)\right]^2$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2$ (1) με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)\left(-f(x)\right)=0$$

Επειδή είναι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι $h(x)=c$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Για } x=0, & \text{από (1)} & h(0)=\left[f(0)\right]^2+\left[f'(0)\right]^2=\left[f'(0)\right]^2\\ \text{Για } x=0, & \text{από (2)} & h(0)=c\end{array}\right\}\Rightarrow c=\left[f'(0)\right]^2.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x)=\left[f'(0)\right]^2$ δηλαδή $\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2=\left[f'(0)\right]^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x>0$. Αν $f(1)=0$, να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε $x>0$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως άθροισμα δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων των $f(x)$ και $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (Σύνθεση παραγωγίσιμων).

Έχουμε ότι:

$$h'(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)\right)'=-f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}+f'(x)=-\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

Άρα η $h(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση δηλαδή $h(x)=c$.

Όμως για $x=1$ έχουμε $h(1)=c \Leftrightarrow f(1)+f(1)=c \Leftrightarrow 2f(1)=c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:
   (α) $\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x+3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x=1$.
   (β) $\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}$.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με
$$f(x)=\eta\mu^8 x+\sigma\upsilon\nu^8 x-2\left(\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x-1\right)^2+1$$
είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

3. Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x+\lambda\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x$ να είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

4. Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $f'(x)=\kappa g(x)$ και $g'(x)=-\kappa f(x)$. Αν $f(0)=0$ και $g(0)=1$ να δείξετε ότι $\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5. Αν $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=\alpha$ και $f'(0)=\beta$, να αποδείξετε ότι $\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2=\alpha^2+\beta^2$.

6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $\frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{g(0)}{f(0)}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g''(x) f(x) - f''(x) g(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$, να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{g(0)}{f(0)} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f'(x) + g(x) = f(x) + g'(x)$. Αν $f(0) = g(0)$ να δείξετε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Έστω συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι: $f''(x) g(x) = f(x) g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) g(0) = f(0) g'(0)$. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $f(x) = \kappa g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι: $f(-x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Αν $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

(α) $f\left(\frac{x + \lambda}{1 - \lambda x}\right) - f(\lambda) = f(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\lambda}\right\}, \lambda \in \mathbb{R}^*$

(β) $f\left(\frac{\alpha x + 1}{\alpha - x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, a \in \mathbb{R}^*$.

Μέθοδος 2 (Θεωρητικές Εφαρμογές)

- Για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ πρέπει να δείξουμε ότι η παράγωγος της είναι μηδέν, δηλαδή $f'(x) = 0$.
- Αν για την συνάρτηση f μας δίνεται μια ανισοτική σχέση τότε με βάση τον ορισμό της παραγώγου δείχνουμε ότι $f'(x_0) = 0$ για τυχαίο x_0 του πεδίου ορισμού της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:
$\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|\le\left|\alpha-\beta\right|^{\nu}$, $\nu\ge 2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει : $\left|f(x)-f(x_0)\right|\le\left|x-x_0\right|^{\nu}$ (1).

Με $x\ne x_0$, η

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\left|f(x)-f(x_0)\right|}{\left|x-x_0\right|}\le\frac{\left|x-x_0\right|^{\nu}}{\left|x-x_0\right|}\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\left|x-x_0\right|^{\nu-1}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left|x-x_0\right|^{\nu-1}=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα $f'(x_0)=0$. Επειδή το x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$ έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή η f είναι σταθερή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\le 1$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\left|f(x)-f(x_0)\right|+\sigma\upsilon\nu(x-x_0)\le 1\Leftrightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|\le 1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)$ (1).

Με $x\ne x_0$, η

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\left|f(x)-f(x_0)\right|}{\left|x-x_0\right|}\le\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)}{\left|x-x_0\right|}\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)}{x-x_0}\right|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)\right)'}{(x-x_0)'}=\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu(x-x_0)=0$.

Επομένως είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)}{x-x_0}\right|=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $f'(x_0)=0$. Επειδή το x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$

έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $f'(x)=g^2(x)$ και $g'(x)+f^2(x)=0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^3+\left[g(x)\right]^3$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$h'(x)=3\left[f(x)\right]^2 f'(x)+3\left[g(x)\right]^2 g'(x)=3f^2(x)g^2(x)+3g^2(x)\left(-f^2(x)\right)=$$
$$=3f^2(x)g^2(x)-3g^2(x)f^2(x)=0$$

Άρα η $h(x)$ σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις

11. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|}\le\left|g(\alpha)-g(\beta)\right|$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:
$\left|f(x)-f(y)\right|\le c\left|x-y\right|^{\alpha}$ με $c>0$ και $\alpha>1$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-f(y)\le(x-y)^4$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

14. Αν $\left|f(x)-f(y)\right|+\sigma\upsilon\nu(2x-2y)\le1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

15. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $2f(x)=x\left[1+f'(x)\right]$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $f''(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

16. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x)+f(x)=0$. Αν $f(0)=f'(0)=0$ να δείξετε ότι:

(α) η συνάρτηση $h(x)=\left[f'(x)\right]^2+\left[f(x)\right]^2$ είναι σταθερή.

(β) $f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. Αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)=2f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)+f^2(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μέθοδος 3

Αν μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι $f(x)=f_1(x)$ και $g(x)=g_1(x)$ όπου f_1, g_1 γνωστές συναρτήσεις τότε κάνουμε τα εξής:

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)-f_1(x)\right]^2-\left[g(x)-g_1(x)\right]^2$.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή $h'(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=g(x)$ και $f(x)=-g'(x)$. Αν $g(0)=1$ και $f(0)=0$, να δείξετε ότι:

(α) $\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2$ (1) με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$h'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)\left(-f(x)\right)=$$
$$=2f(x)f'(x)-2f'(x)f(x)=0$$

Επειδή είναι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι $h(x)=c$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Για } x=0, \text{ από (1) έπεται ότι} & h(0)=\left[f(0)\right]^2+\left[g(0)\right]^2=0+1=1\\ \text{Για } x=0, \text{ από (2) έπεται ότι} & h(0)=c\end{array}\right\}\Rightarrow c=1.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x)=1\Rightarrow\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=1$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2$ (1) με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$h'(x)=2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]+2\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[g'(x)+\eta\mu x\right]=$$
$$2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]+2\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[-f(x)+\eta\mu x\right]=$$
$$2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]-2\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f(x)-\eta\mu x\right]=0$$

Επειδή είναι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι $h(x)=c$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Για } x=0, \text{ από (1) έπεται ότι} & h(0)=\left[f(0)-\eta\mu 0\right]^2+\left[g(0)-\sigma\upsilon\nu 0\right]^2=0\\ \text{Για } x=0, \text{ από (2) έπεται ότι} & h(0)=c\end{array}\right\}\Rightarrow c=0$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(x)=0\Rightarrow\left[f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2=0$$

δηλαδή $f(x)-\eta\mu x=0$ και $g(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$ άρα $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=-f(x)$. Αν $f(0)=1$ και $f'(0)=0$, να δείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2+\left[f'(x)+\eta\mu x\right]^2$ (1) με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h'(x)=2\left[f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f'(x)+\eta\mu x\right]+2\left[f'(x)+\eta\mu x\right]\left[f''(x)+\sigma\upsilon\nu x\right]=$$
$$2\left[f'(x)+\eta\mu x\right]\left[f(x)-\sigma\upsilon\nu x+f''(x)+\sigma\upsilon\nu x\right]=$$
$$2\left[f'(x)+\eta\mu x\right]\left[f(x)-f(x)\right]=0$$

Επειδή είναι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι $h(x)=c$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Για } x=0, \text{ από (1)} & h(0)=\left[f(0)-\sigma\upsilon\nu 0\right]^2+\left[f'(0)+\eta\mu 0\right]^2=0\\ \text{Για } x=0, \text{ από (2)} & h(0)=c\end{array}\right\}\Rightarrow c=0.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(x)=0\Rightarrow\left[f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2+\left[f'(x)-\eta\mu x\right]^2=0\Rightarrow f(x)-\sigma\upsilon\nu x \text{ και } f'(x)-\eta\mu x=0$$

δηλαδή $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $f'(x)=-\eta\mu x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=-f(x)$. Αν $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2$ (1) με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h'(x)=2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]+2\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f''(x)+\eta\mu x\right]=$$
$$2\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f(x)-\eta\mu x+f''(x)+\eta\mu x\right]=$$
$$2\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f(x)-f''(x)\right]=2\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f(x)-f(x)\right]=0$$

Επειδή είναι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι $h(x)=c$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Για } x=0, \text{ από (1)} & h(0)=\left[f(0)-\eta\mu 0\right]^2+\left[f'(0)-\sigma\upsilon\nu 0\right]^2=0\\ \text{Για } x=0, \text{ από (2)} & h(0)=c\end{array}\right\}\Rightarrow c=0.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(x)=0 \Rightarrow \left[f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)-\eta\mu x \text{ και } f'(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$$

δηλαδή $f(x)=\eta\mu x$ και $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Ασκήσεις

19. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=-f(x)$. Αν $f(0)=1$ και $f'(0)=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2+\left[f'(x)+\eta\mu x\right]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και ότι είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

20. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=3\sigma\upsilon\nu 2x-f(x)$. Αν $f(0)=1$ και $f'(0)=1$, να δείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$.

Μέθοδος 4 (Προσδιορισμός του τύπου συνάρτησης)

- Συνήθως δίνεται ισότητα της μορφής $f'(x)=g(x)$ εάν όχι προσπαθούμε να τη δημιουργήσουμε.
- Προσπαθούμε με βάση τους κανόνες παραγώγισης των βασικών και των σύνθετων συναρτήσεων να βρούμε την αρχική της συνάρτησης $g(x)$.
- Αν $G(x)$ η αρχική της $g(x)$ η σχέση γράφεται $f'(x)=G'(x)$ οπότε $f(x)=G(x)+c$.
- Βρίσκουμε τη σταθερά c από τη δεδομένη τιμή της f.

Υπενθύμιση:

Κανόνες παραγώγισης	
$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$	$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$
$\left[(a\cdot f(x))\right]'=a\cdot f'(x)$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$	

Σύνθετων Συναρτήσεων

$\left(f(x)^{\nu}\right)'=\nu f(x)^{\nu-1}\cdot f'(x)$	$\left(\varepsilon\phi f(x)\right)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$	$\left(\sigma\phi f(x)\right)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\eta\mu f(x)\right)'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$	$\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$	$\left(a^{f(x)}\right)'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$
$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x),\ f(x)>0$	$\left(f(x)^{a}\right)'=af(x)^{a-1}\cdot f'(x), a\in\mathbb{R}, f(x)>0$
$\left(\ln\lvert f(x)\rvert\right)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x),\ f(x)\neq 0$	

Μέθοδος εύρεσης συνάρτησης

$$f'(\xi)+G(\xi)f(\xi)=h(x)\Leftrightarrow e^{G(x)}f'(x)+e^{G(x)}G'(x)f(x)=h(x)$$
$$\overset{H'(x)=h(x)}{\Leftrightarrow}\left(e^{G(x)}f(x)\right)'=H'(x)\Leftrightarrow e^{G(x)}f(x)=H(x)+c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

(α) $f'(x)=\eta\mu 3x-5x^4-2x+3$

(β) $f''(x)=e^x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 3x-x^2$

(γ) $f''(x)=\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)+e^{-x}$

(δ) $f^{(3)}(x)=x+x^2$

(ε) $f''(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x-x$

(στ) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}+3e^{3x}-1$

Λύση

(α) $f'(x)=\eta\mu 3x-5x^4-2x+3 \Rightarrow f'(x)=\left(-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x-x^5-x^2+3x\right)' \Rightarrow$

$f(x)=-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x-x^5-x^2+3x+c$

(β) $f''(x)=e^x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 3x-x^2 \Rightarrow \left(f'(x)\right)'=\left(e^x+\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{3}\eta\mu 3x-\frac{1}{3}x^3\right)' \Rightarrow$

$f'(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{3}\eta\mu 3x-\frac{1}{3}x^3+c \Rightarrow f'(x)=\left(e^x+\eta\mu x-\frac{1}{9}\sigma\upsilon\nu 3x-\frac{1}{12}x^4+cx\right)' \Rightarrow$

$f(x)=e^x+\eta\mu x-\frac{1}{9}\sigma\upsilon\nu 3x-\frac{1}{12}x^4+cx+c_1$

(γ) $f''(x)=\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)+e^{-x} \Rightarrow \left(f'(x)\right)'=\left(\eta\mu(\pi x)-e^{-x}\right)' \Rightarrow$

$f'(x)=\eta\mu(\pi x)-e^{-x}+c \Rightarrow f'(x)=\left(-\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu(\pi x)+e^{-x}+cx\right)' \Rightarrow$

$f(x)=-\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu(\pi x)+e^{-x}+cx+c_1$

(δ) $f^{(3)}(x)=x+x^2 \Rightarrow \left(f''(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)' \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+c \Rightarrow$

$\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+cx\right)' \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+cx+c_1 \Rightarrow$

$f'(x)=\left(\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{60}x^5+\frac{c}{2}x^2+c_1x\right)' \Rightarrow f(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{60}x^5+\frac{c}{2}x^2+c_1x+c_2$

(ε) $f''(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x-x \Rightarrow \left(f'(x)\right)'=\left(e^x+\eta\mu x-\frac{1}{2}x^2\right)' \Rightarrow$

$f'(x)=e^x+\eta\mu x-\frac{1}{2}x^2+c \Rightarrow f'(x)=\left(e^x-\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{6}x^3+cx\right)' \Rightarrow$

$f(x)=e^x-\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{6}x^3+cx+c_1$

(στ) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}+3e^{3x}-1 \Rightarrow f'(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)+e^{3x}-x\right) \Rightarrow$

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+e^{3x}-x+c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=\kappa f(x)$ να δείξετε ότι $f(x)=ce^{\kappa x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^{\kappa x}}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{\kappa x}}\right)'=\frac{f'(x)e^{\kappa x}-\kappa f(x)e^{\kappa x}}{\left(e^{\kappa x}\right)^2}=\frac{\kappa f(x)e^{\kappa x}-\kappa f(x)e^{\kappa x}}{\left(e^{\kappa x}\right)^2}=0.$$

Επειδή είναι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(x)=c\Rightarrow\frac{f(x)}{e^{\kappa x}}=c\Rightarrow f(x)=ce^{\kappa x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

(α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f'(x)=f(x)$ όταν και μόνο όταν $f(x)=ce^x$.

(β) Η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $h(0)=1$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h'(x)+2x=h(x)+x^2+5$ να δείξετε ότι $h(x)=6e^x-x^2-5$

Λύση

(α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=f(x)$ και θα δείξουμε ότι $f(x)=ce^x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$h'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{f(x)e^x-f(x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=0$$

Επειδή $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(x)=c \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x}=c \Rightarrow f(x)=ce^x.$$

Έστω $f(x)=ce^x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ι-σχύει:

$$f'(x)=\left(ce^x\right)'=ce^x=f(x).$$

(β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h'(x)+2x=h(x)+x^2+5 \Rightarrow \left(h(x)+x^2+5\right)'=h(x)+x^2+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)+x^2+5=ce^x \Rightarrow h(x)=ce^x-x^2-5$$

Επειδή $h(0)=1$ έπεται ότι $ce^0-0^2-5=1 \Leftrightarrow c=6$.

Άρα $h(x)=6e^x-x^2=5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)f(x)=0$ (1). Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$f'(x)f(x)=0 \Rightarrow 2f'(x)f(x)=0 \Rightarrow \left[f^2(x)\right]'=0 \Rightarrow f^2(x)=c$. Προφανώς είναι $c\geq 0$.

- Αν $c=0$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$, δηλαδή η f είναι σταθερή.
- Αν $c>0$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δηλαδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και από την (1) έπεται ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η $f(x)=c$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=f(x)$ να δείξετε ότι $f(x)=\kappa e^x+\lambda e^{-x}$.

Λύση

Είναι $\left(f(x)+f'(x)\right)'=f'(x)+f''(x)=f'(x)+f(x)$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f(x)+f'(x)=c_1e^x$ (1).

Από την (1) έπεται:

$$f(x)+f'(x)=c_1e^x \Rightarrow \left(f(x)e^x\right)'=\left(\frac{c_1}{2}e^{2x}\right)' \Rightarrow f(x)e^x=\frac{c_1}{2}e^{2x}+c \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{c_1}{2}e^x+ce^{-x}$$

Άρα $f(x)=\kappa e^x+\lambda e^{-x}$ όπου $\kappa=\frac{c_1}{2}$ και $\lambda=c$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$ ισχύει $f''(x^2)=\frac{3}{4x}$. Αν $f(1)=2$, να βρείτε τη συνάρτηση f.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Ισχύει $\left(f'(x^2)\right)'=f''(x^2)\cdot(x^2)'=\frac{3}{4x}2x=\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{2}x\right)'$.

Άρα $f'(x^2)=\frac{3}{2}x+c$ (1).

Για $x=1$ από (1) έπεται $f(1)=\frac{3}{2}+c \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+c \Rightarrow c=-2$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$ ισχύει $f'(x^2)=\frac{3}{2}x-2$ (2).

Ισχύει $\left(f'(x^2)\right)'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=\left(\frac{3}{2}x-2\right)2x=3x^2-4x=\left(x^3-2x^2\right)'$.

Άρα $f'(x^2)=x^3-2x^2+\kappa$ (3).

Για $x=1$ από (3) έπεται $f(1)=1-2+\kappa \Rightarrow 2=-1+\kappa \Leftrightarrow \kappa=3$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$ ισχύει $f(x^2)=x^3-2x^2+3$ (4)

Θέτουμε $x^2=\omega$ και επειδή το $x\in\mathbb{R}_+^*$ έχουμε $x=\sqrt{\omega}$ με $\omega>0$. Επομένως η (4) γίνεται: $f(\omega)=\omega\sqrt{\omega}-2\omega+3$.

Άρα η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=x\sqrt{x}-2x+3$ με $x\in(0,+\infty)$.

2^{ος} τρόπος

Για κάθε $x\in\mathbb{R}_+^*$ ισχύει $f''(x^2)=\frac{3}{4x}$ (1).

Θέτουμε $x^2=\omega$ και επειδή $x\in\mathbb{R}_+^*$ ισχύει $x=\sqrt{\omega}$ με $\omega>0$. Άρα η (1) γίνεται:

$$f''(\omega)=\frac{3}{4\sqrt{\omega}}\Rightarrow\left(f'(\omega)\right)'=\left(\frac{3}{2}\sqrt{\omega}\right)'\Rightarrow f'(\omega)=\frac{3}{2}\sqrt{\omega}+c \text{ (1).}$$

Με $\omega=1$ από (1) έχουμε $f'(1)=\frac{3}{2}\sqrt{1}+c\Rightarrow-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+c\Leftrightarrow c=-2$.

Επομένως για κάθε $\omega\in\mathbb{R}_+^*$ ισχύει:

$$f'(\omega)=\frac{3}{2}\sqrt{\omega}-2\Rightarrow\left(f(\omega)\right)'=\left(\omega^{\frac{3}{2}}-2\omega\right)'\Rightarrow f(\omega)=\omega^{\frac{3}{2}}-2\omega+\kappa \quad (2)$$

Για $\omega=1$ από (2) έχουμε: $f(1)=1-2+\kappa\Rightarrow 2=-1+\kappa\Leftrightarrow\kappa=3$

Επομένως η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=x\sqrt{x}-2x+3$ με $x\in(0,+\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x^3)=8x^{-1}$. Αν $f(1)=6$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Ισχύει $\left(f(x^3)\right)'=f'(x^3)\cdot(x^3)'=(8x-1)\cdot 3x^2=24x^3-3x^2=\left(6x^4-x^3\right)'$.

Άρα $f(x^3)=6x^4-x^3+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1).

Για $x=1$ από (1) έπεται $f(1)=6-1+c\Rightarrow 6=5+c\Rightarrow c=1$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x^3)=6x^4-x^3+1$ (2).

Θέτουμε $x^3=\omega$.

- Αν $x\geq 0$ τότε $x=\sqrt[3]{\omega}$, $\omega\geq 0$ και η (2) γίνεται $f(\omega)=6\omega\sqrt[3]{\omega}-\omega+1$
- Αν $x\leq 0$ τότε $x=-\sqrt{-\omega}$, $\omega<0$ και η (2) γίνεται $f(\omega)=-6\omega\sqrt[3]{-\omega}-\omega+1$
- Επομένως είναι: $f(\omega)=\begin{cases}6\omega\sqrt[3]{\omega}-\omega+1 & \omega\geq o\\ -6\omega\sqrt[3]{-\omega}-\omega+1 & \omega<0\end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(2x-1)=6x-1$. Αν $f(1)=5$ και $f'(-1)=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

1ος τρόπος

Ισχύει

$$\left(f'(2x-1)\right)'=f''(2x-1)\cdot(2x-1)'=(6x-1)\cdot 2=12x-2=\left(6x^2-2x\right)'..$$

Άρα $f'(2x-1)=6x^2-2x+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1).

Για $x=0$ από (1) έπεται $f'(-1)=c\Rightarrow c=1$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(2x-1)=6x^2-2x+1$. Ισχύει

$$\left(f(2x-1)\right)'=f'(2x-1)\cdot(2x-1)'=\left(6x^2-2x+1\right)\cdot 2=12x^2-4x+2=\left(4x^3-2x^2+2x\right)'$$

Άρα $f(2x-1)=4x^3-2x^2+2x+\kappa$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (2)

Για $x=1$ από (2) έπεται $f(1)=4-2+2+\kappa\Rightarrow 5=4+\kappa\Rightarrow\kappa=1$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(2x-1)=4x^3-2x^2+2x+1$ (3)

Θέτουμε $2x-1=\omega\Leftrightarrow x=\dfrac{\omega+1}{2}$ και η (3) γίνεται:

$$f(\omega)=4\left(\frac{\omega+1}{2}\right)^3-2\left(\frac{\omega+1}{2}\right)^2+1\Rightarrow f(\omega)=\frac{1}{2}\omega^3+\omega^2+\frac{3}{2}\omega+2.$$

Επομένως είναι $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+x^2+\dfrac{3}{2}x+2$ με $x\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(2x-1)=6x-1$ (1).

Θέτουμε $2x-1=\omega\Leftrightarrow x=\dfrac{\omega+1}{2}$ και η (1) γίνεται:

$$f''(\omega)=3(\omega+1)-1\Rightarrow f''(\omega)=3\omega+2\Rightarrow\left(f'(\omega)\right)'=\left(\frac{3}{2}\omega^2+2\omega\right)'\Rightarrow$$

$$f'(\omega)=\frac{3}{2}\omega^2+2\omega+c$$

(2).

Για $\omega=-1$ από (2) έπεται $f'(-1)=\dfrac{3}{2}-2+c\Rightarrow 1=\dfrac{3}{2}-2+c\Leftrightarrow c=\dfrac{3}{2}$.

Επομένως για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(\omega)=\frac{3}{2}\omega^2-2\omega+\frac{3}{2}\Rightarrow f'(\omega)=\left(\frac{1}{2}\omega^3+\omega^2+\frac{3}{2}\omega\right)'\Rightarrow \quad (3)$$
$$f(\omega)=\frac{1}{2}\omega^3+\omega^2+\frac{3}{2}\omega+\kappa$$

Με $\omega=1$ από (3) έπεται: $f(1)=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\kappa\Rightarrow 5=3+\kappa\Leftrightarrow\kappa=2$.

Επομένως για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$ είναι $f(\omega)=\frac{1}{2}\omega^3+\omega^2+\frac{3}{2}\omega+2$. Άρα η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+\frac{3}{2}x+2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=f^{(3)}(x)$. Να δείξετε ότι $f(x)=ce^x+\alpha x+\beta$.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f''(x)=f^{(3)}(x)\Rightarrow\left(f''(x)\right)'=f''(x)\Rightarrow f''(x)=ce^x\Rightarrow\left(f'(x)\right)'=\left(ce^x\right)'\Rightarrow$$
$$f'(x)=ce^x+\alpha\Rightarrow f'(x)=\left(ce^x+\alpha x\right)'\Rightarrow f(x)=ce^x+\alpha x+\beta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f'(x)+\kappa f(x)=e^{-\kappa x}\sigma\upsilon\nu x$. Αν $f(0)=1997$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)+\kappa f(x)=e^{-\kappa x}\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow e^{\kappa x}f'(x)+\kappa e^{\kappa x}f(x)=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow$$
$$e^{\kappa x}f'(x)+\left(e^{\kappa x}\right)'f(x)=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow\left(e^{\kappa x}f(x)\right)'=\left(\eta\mu x\right)'\Rightarrow e^{\kappa x}f(x)=\eta\mu x+c \quad (1)$$

Για $x=0$ από (1) έπεται $e^0f(0)=\eta\mu 0+c\Rightarrow 1997=c$.

Επομένως η $(1)\Leftrightarrow e^{\kappa x}f(x)=\eta\mu x+1997\Leftrightarrow f(x)=e^{-\kappa x}\left(\eta\mu x+1997\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)\cdot x=f(x)+x^2\ln x$. Αν $f(1)=5$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$f'(x)\cdot x=f(x)+x^2\ln x\Rightarrow f'(x)\cdot x-f(x)=x^2\ln x\Rightarrow\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\ln x\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(x\ln x-x)'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=x\ln x-x+c\quad(1)$$

Για $x=1$ από (1) έπεται $f(1)=-1+c\Rightarrow 5=-1+c\Rightarrow c=6$.

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{f(x)}{x}=x\ln x-x+6$ δηλαδή:

$$f(x)=x(x\ln x-x+6)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22

Η συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x)+f(x)\cdot\varepsilon\phi x=2x\sigma\upsilon\nu x$. Αν είναι $f(0)=2$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$f'(x)+f(x)\cdot\varepsilon\phi x=2x\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow f'(x)+f(x)\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2x\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow$$

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x=2x\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)(\sigma\upsilon\nu x)'=2x\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2x\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=(x^2)'\Rightarrow\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=x^2+c\qquad(1)$$

Για $x=0$ από (1) έπεται $f(0)=c\Rightarrow 2=c$.

Άρα για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=x^2+2\Rightarrow f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(x^2+2\right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f'(x)=x\cdot 2^{-x}-f(x)\ln 2$. Αν είναι $f(1)=\frac{1}{4}$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)=x\cdot 2^{-x}-f(x)\ln 2\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{2^x}-f(x)\ln 2\Rightarrow f'(x)2^x=x-f(x)\ln 2\cdot 2^x\Rightarrow$$

$$f'(x)2^x+f(x)2^x\ln 2=x\Rightarrow f'(x)2^x+f(x)\left(2^x\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\Rightarrow\left(f(x)2^x\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\Rightarrow$$

$$f(x)2^x=\frac{1}{2}x^2+c\quad(1)$$

Για $x=1$ από (1) έπεται $f(1)\cdot 2=\frac{1}{2}+c\Rightarrow\frac{1}{4}2=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)2^x=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2 2^{-x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $xf'(x)-f(x)\ln f(x)=0$ και $f(x)>1$. Αν $f(e)=e$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$xf'(x)-f(x)\ln f(x)=0\Rightarrow xf'(x)=f(x)\ln f(x)\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{f'(x)}{f(x)\ln f(x)}\Rightarrow$$

$$(\ln x)'=\left[\ln\left(\ln f(x)\right)\right]'\Rightarrow\ln x=\ln\left[\ln f(x)\right]+c\qquad(1)$$

Για $x=e$ από (1) έπεται

$\ln e=\ln\left[\ln f(e)\right]+c\Rightarrow 1=\ln(\ln e)+c\Rightarrow 1=\ln 1+c\Rightarrow c=1$.

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$\ln x = \ln\left[\ln f(x)\right] + 1 \Rightarrow \ln x - 1 = \ln\left[\ln f(x)\right] \Rightarrow \ln\frac{x}{e} = \ln\left[\ln f(x)\right] \Rightarrow$$

$$\ln f(x) = \frac{x}{e} \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^{\frac{x}{e}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{x}{e}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $xf'(x) - xf(x) = e^x$. Αν είναι $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$xf'(x) - xf(x) = e^x \Leftrightarrow x\left(f'(x) - f(x)\right) = e^x \Rightarrow \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \left(\ln|x|\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = \ln|x| \Rightarrow$$

$$f(x) = e^x \ln|x| + c \quad (1)$$

Για $x = 1$ από (1) έπεται $f(1) = e\ln 1 + c \Rightarrow e = c$.

Άρα για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) = e^x \ln|x| + e$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(x) + f'(x) = -f'(x)e^{-x}$. Αν είναι $f(0) = 3$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f'(x) = f'(x)e^{-x} \Rightarrow f(x) + f'(x) = -\frac{f'(x)}{e^x} \Rightarrow$$

$$f(x)e^x + f'(x)e^x = -f'(x) \Rightarrow f'(x)e^x + f(x)\left(e^x\right)' = \left(-f(x)\right)' \Rightarrow$$

$$\left[f(x)e^x\right]' = \left[-f(x)\right]' \Rightarrow f(x)e^x = -f(x) + c \quad (1)$$

Για $x = 0$ από (1) έπεται $f(0)e^0 = -f(0) + c \Rightarrow 3 = -3 + c \Rightarrow c = 6$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)e^x=-f(x)+6 \Rightarrow f(x)e^x+f(x)=6 \Rightarrow f(x)\left(e^x+1\right)=6 \Rightarrow f(x)=\frac{6}{e^x+1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f'(x)=a^{x+1}+f(x)\ln a$ με $0<a\neq 1$. Αν $f(-1)=0$ να βρείτε τον τύπο στης συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)=a^{x+1}+f(x)\ln a \Rightarrow f'(x)-f(x)\ln a=a^{x+1} \Rightarrow$$

$$f'(x)a^{x+1}-f(x)a^{x+1}\ln a=\left(a^{x+1}\right)^2 \Rightarrow f'(x)a^{x+1}-f(x)\left(a^{x+1}\right)'=\left(a^{x+1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)a^{x+1}-f(x)\left(a^{x+1}\right)'}{\left(a^{x+1}\right)^2}=1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{a^{x+1}}\right)'=(x)' \Rightarrow \frac{f(x)}{a^{x+1}}=x+c \Rightarrow$$

$$f(x)=a^{x+1}(x+c) \quad (1)$$

Για $x=-1$ από (1) έπεται $f(-1)=a(-1+c) \Rightarrow 0=a(c-1) \Rightarrow c=1$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)=a^{x+1}(x+1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28

Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x)\geq 0$. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,x_0]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,x_0).

Από το Θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1\in(a,x_0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\alpha)-f(x_0)=(\alpha-x_0)f'(\xi_1)$ (1).

Επειδή $a-x_0<0$ και $f'(\xi_1)\geq 0$ από (1) έπεται ότι $f(\alpha)-f(x_0)\leq 0$ δηλαδή $f(\alpha)\leq f(x_0)$ (2)

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \beta]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, β).

Από το Θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) - f(\beta) = (x_0 - \beta) f'(\xi_2)$ (3).

Επειδή $x_0 - \beta < 0$ και $f'(\xi_2) \geq 0$ από (3) έπεται ότι $f(x_0) - f(\beta) \leq 0$ δηλαδή $f(x_0) \leq f(\beta)$ (4).

Επειδή $f(\alpha) = f(\beta) = \kappa$. Τότε, από (3) και (4) έχουμε $\kappa \leq f(x_0) \leq \kappa$ δηλαδή $f(x_0) = \kappa$ για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$.επομένως είναι $f(x) = \kappa$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ που σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 29

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x) = x^2 f'(x)$. Αν $f(1) = \dfrac{1997}{e}$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = f(x) \Rightarrow x^2 f'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}} f'(x) - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} f(x) = 0 \Rightarrow \left[f(x) e^{\frac{1}{x}} \right]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) e^{\frac{1}{x}} = c \qquad (1)$$

Για $x = 1$ από (1) έπεται ότι: $f(1) e = c \Rightarrow \dfrac{1997}{e} = c \Rightarrow c = 1997$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x) e^{\frac{1}{x}} = 1997 \Rightarrow f(x) = 1997 e^{-\frac{1}{x}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όταν γνωρίζετε ότι σε κάθε σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της C_f ορίζεται εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{6x_0}{2x_0^2+1}$ και ότι το σημείο $A(0,3)$ ανήκει στη C_f.

Λύση

Επειδή ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της C_f με συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{6x_0}{2x_0^2+1}$ έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{6x}{2x^2+1}\Rightarrow f'(x)=3\frac{2x}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\left[3\ln\left(x^2+1\right)\right]'\Rightarrow \qquad (1)$$

$$f(x)=3\ln\left(x^2+1\right)+c$$

Επειδή το $A(0,3)$ ανήκει στη C_f έπεται ότι $f(0)=3\Rightarrow 3\ln 1+c=3\Rightarrow c=3$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=3\ln\left(x^2+1\right)+3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 31

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=f(x)+2$. Αν $f'(0)=1$ και $f(0)=5$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

Ισχύει $\left(f(x)+f'(x)+2\right)'=f'(x)+f''(x)=f'(x)+f(x)+2$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)+f'(x)+2=ce^x$ (1).

Για $x=0$ από (1) έπεται $f(0)+f'(0)+2=ce^0\Rightarrow 8=c$.

Άρα $f(x)+f'(x)+2=8ce^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (2).

Η (2) γίνεται:

$$e^x f(x)+e^x f'(x)+2e^x=8e^{2x}\Leftrightarrow e^x\left(f(x)+2\right)+e^x f'(x)=8e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\right)'\left(f(x)+2\right)+e^x\left(f(x)+2\right)'=\left(4e^{2x}\right)'\Leftrightarrow\left[e^x\left(f(x)+2\right)\right]'=\left(4e^{2x}\right)'\Rightarrow$$

$$e^x\left(f(x)+2\right)=4e^{2x}+c \qquad (3)$$

Για $x=0$ από (3) έπεται $e^0\left(f(0)+2\right)=4e^0+c\Rightarrow 7=4+c\Rightarrow c=3$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\left(f(x)+2\right)=4e^{2x}+3$ δηλαδή:

$$e^x f(x)+2e^x=4e^{2x}+3\Rightarrow f(x)=\frac{4e^{2x}+3-2e^x}{e^x}\Rightarrow f(x)=4e^x+3e^{-x}-2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 32

Η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει $2f(x)=-xf'(x)\ln x$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\ln^2 x$ είναι σταθερή στο $(1,+\infty)$.

(β) Αν $f(e)=1997$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

(α) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)\ln^2 x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και για κάθε

$x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$g'(x)=f'(x)\ln^2 x+2f(x)\ln x\frac{1}{x}=f'(x)\ln^2 x-xf'(x)\ln x\ln x\frac{1}{x}=$$

$$f'(x)\ln^2 x-f'(x)\ln^2 x=0$$

Επειδή είναι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έπεται ότι $g(\ )=c$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ που σημαίνει ότι η g είναι σταθερή στο $(1,+\infty)$.

(β) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $g(x)=c\Rightarrow f(x)\ln^2 x=c \quad (1)$

Για $x=e$ από (10 έπεται $f(e)=c\Rightarrow 1997=c$.

Άρα για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει $f(x)=\dfrac{1997}{\ln^2 x}$.

Ασκήσεις

21. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ όταν:

(α) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in A$ με $A=(0,+\infty)$ και $f(4)=1$.

(β) $f'(x)=\dfrac{4x}{x^2+3}$ για κάθε $x\in A$ με $A=\mathbb{R}$ και $f(0)=2\ln 3$.

(γ) $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in A$ με $A=\mathbb{R}$ και $f(\pi)=-1$.

(δ) $f'(x)=e^{x}(1+x)$ για κάθε $x\in A$ με $A=\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

(ε) $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in A$ με $A=\mathbb{R}-\{0,1\}$ και $f(2)=-\ln 2$.

(στ) $2xf(x)+x^{2}f'(x)=e^{x}$ για κάθε $x\in A$ με $A=\mathbb{R}^{*}$ και $f(1)=1$.

22. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f'(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x$. Να δείξετε ότι $f(x)=f(0)e^{\eta\mu x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

23. Αν βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, όταν ισχύει $f'(x)+(2x+3)f(x)=e^{-x^{2}+1}$ και $f(0)=e$.

24. Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f'(x)=\kappa f(x)g'(x)$, $\kappa\neq 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=ce^{\kappa g(x)}$.

25. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

(α) $3f'(x)+2=3f(x)+2x$ και $f(0)=1$.

(β) $3f'(x)=3f(x)+4x+1$ και $f(0)=8$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=2-\eta\mu x-e^{x}$. Αν $f'(0)=-3$ και $f(0)=-1$ να βρείτε τον τύπο της f.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}_{+}^{*}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ ισχύει $f'\left(x^{2}\right)=3x+5$. Αν $f(1)=8$ να βρείτε την f.

28. Να βρεθεί η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(2x+1)=12x+6$ και $f'(3)=27$, $f(1)=1$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει $f'\left(x^3\right)=x$ και $f(1)=2$. Να βρείτε το $f(3)$.

30. Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $f'\left(x^4\right)=2x^5$. Αν $f(1)=\dfrac{8}{9}$ να βρείτε την f.

31. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ και $f(x)\neq 0$. Αν $f(1)=2$ να βρείτε την f.

32. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$ και $f'(x)=f(x)\left(1+e^x\right)$. Αν $f(\ln 3)=3$ να βρείτε την f.

33. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $2f'(x)=e^{x-f(x)}$. Αν $f(0)=0$ να βρείτε την f.

34. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$ και $f(x)\ln f(x)=f'(x)$ και $f(0)=e$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε την f.

35. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ όταν:

(α) $xf'(x)=-f(x)+xf(x)+1$ για κάθε $x\in A$ με $A=\mathbb{R}^*$ και $f(1)=e-1$.

(β $f'(x)\eta\mu x=f(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x\in A$ με $A=(0,\pi)$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$.

36. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση : $f(x)-2f'(x)+f''(x)=e^x$. Αν $g(x)=f'(x)-f(x)$ με $g(0)=1$ τότε:

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}-x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ κα να βρεθεί η g.

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν $f(0)=1$.

37. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left(x^2+1\right)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0$.

(α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)=2xf(x)+\left(x^2+1\right)f'(x)$.

(β) Να βρείτε τον τύπο της f όταν γνωρίζουμε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=2$.

38. Οι συναρτήσεις f,g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(0)=g(0)$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=g''(x)$ να δείξετε ότι $f(x)-g(x)=cx$.

39. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όταν γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ της C_f ορίζεται εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x_0-\eta\mu x_0}{e^{x_0}}$ και ότι το σημείο $A(0,3)$ ανήκει στη C_f.

40. Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $e^{f'(x)}x^x=x$. Αν $f(1)=-\dfrac{3}{4}$, να βρείτε τον τύπο της f.

41. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+x\cdot f'(x)+f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f'(0)=0$ και $f(0)=2$.

42. Δίνεται συνάρτηση f, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x_0)=f'(x_0)=0$, $x_0\in\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x_0\}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

43. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$.

44. Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,\pi)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f'(x)\eta\mu x=f(x)(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$.

45. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-f'(x)=(x-1)^2$ και $f(0)=4$, να βρεθεί η συνάρτηση f.

46. (α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'=f$ αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$ όπου c πραγματική σταθερά.

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot\eta\mu x=g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$.

47. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

48. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=\sqrt{3}$ και $f'(x)f(x)-e^x\sqrt{1+f^2(x)}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

49. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με $f(1)=\dfrac{1}{2}$ και $f'(x)=-2f^3(x)$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

(α) την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{f^2(x)}$

(β) τον τύπο της συνάρτησης f.

Μέθοδος 5 (Εύρεση τύπου συνάρτησης μέσω συναρτησιακών σχέσεων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=1$, $f(1)=7$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να ισχύει $f(x+y)-f(x)=\lambda x(\lambda+x)$ (1) με $\lambda>0$.

(α) Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την f'

(β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

(α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda h(\lambda+x)}{h}=\lambda^2+\lambda x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\lambda^2+\lambda x$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$.

(β) Από την σχέση (1) για $x=1$ και $y=-1$ έχουμε ότι:

$$f(0)-f(1)=\lambda(\lambda+1)\Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-3 \text{ απορρίπτεται } \lambda>0\end{cases}$$

Για $\lambda=2$ η f' γίνεται: $f'(x)=2x+4\Leftrightarrow f(x)=x^2+4x+c$

Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$

Άρα $f(x)=x^2+4x+1$, $x\in\mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34

Αν για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύουν $f(x+y)\leq f(x)f(y)$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$, να βρεθεί η f.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και $f(0)=f'(0)=1$, οπότε για $h\neq 0$ ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=1$$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα υπάρχει το όριο:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Για $y=h$ η σχέση (1) γράφεται:

$$f(x+h)\leq f(x)f(h)\overset{-f(x)}{\Leftrightarrow} f(x+h)-f(x)\leq f(x)f(h)-f(x)$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $h\neq 0$ θα πάρουμε ότι:

Αν $h>0$ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$

Επειδή τα όρια υπάρχουν, ισχύει

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x)\left[f(h)-1\right]}{h}\Leftrightarrow f'(x)\leq f(x)\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\leq f(x)\ (3)$$

Αν $h<0$, όμοια βρίσκουμε ότι $f'(x)\leq f(x)$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε ότι $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x$. Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)=e^x$

Ασκήσεις

50. Αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $f(x)=1+x\cdot g(x)$, όπου g συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$, να βρείτε τη συνάρτηση f.

51. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(0)=2$ και $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f.

52. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu y+f(y)\cdot\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

(β) Είναι $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(1)=-2$, $f(2)=3$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)-f(x)=2(\lambda^2-1)xy-y^2$ όπου $\lambda>1$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την f'.

(β) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f

54. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$. Αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)e^{2y}+f(y)e^{2x}$, να δείξετε ότι:

(α) $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

(β) $f'(x)=2f(x)+e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(γ) $f(x)=xe^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μέθοδος 6 (Σταθερή συνάρτηση σε ένωση διαστημάτων)

Όταν έχουμε ότι ισχύει η σχέση: $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in A\cup B$ τότε:

- Αν $x\in A$, τότε $f(x)=g(x)+c_1$.
- Αν $x\in B$, τότε $f(x)=g(x)+c_2$.

Οπότε:

$$f(x)=\begin{cases} g(x)+c_1 & x\in A \\ g(x)+c_2 & x\in B \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $x^2f'(x)=x^2\sigma\upsilon\nu x-1$ για κάθε $x\neq 0$. Αν $f(\pi)=f(-\pi)=0$, να βρείτε την f.

Λύση

Για $x<0$ έχουμε ότι:

$x^2 f'(x) = x^2 συνx - 1 \Leftrightarrow f'(x) = συνx - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = ημx + \frac{1}{x} + c_1$

Για $x = -\pi$ έχουμε ότι: $f(-\pi) = 0 \Leftrightarrow ημ(-\pi) - \frac{1}{\pi} + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{\pi}$. Άρα για $x < 0$, $f(x) = ημx + \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi}$.

Για $x > 0$ όμοια έχουμε ότι: $f(x) = ημx + \frac{1}{x} + c_2$.

Για $x = \pi$ έχουμε ότι: $f(\pi) = 0 \Leftrightarrow ημ(\pi) + \frac{1}{\pi} + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{\pi}$. Οπότε η συνάρτηση είναι $f(x) = ημx + \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi}$. Τελικά η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ημx + \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} & x < 0 \\ ημx + \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi} & x > 0 \end{cases}$$

Ασκήσεις

55. Η συνάρτηση f έχε πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 2) \cup (3, 6]$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

56. Μια συνάρτηση f έχε πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (2, 5) \cup [8, 10]$ και ισχύει $f'(x) = 2x$ για κάθε $x \in A$. Αν $f(3) = 10$ και $f(10) = 25$ να βρεθεί η συνάρτηση f.

57. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει η σχέση: $xf'(x) = (x+1) f(x)$. Αν $f(1) = e$, $f(-1) = \frac{1}{e}$ να βρείτε την f.