Θεώρημα μέσης τιμής

Το θεώρημα μέσης τιμής αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Rolle. Λόγω όμως των πολλών και σημαντικών εφαρμογών του θεωρείται ένα από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα της ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις :

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \text{ ή } f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi) .$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

και ισχύει

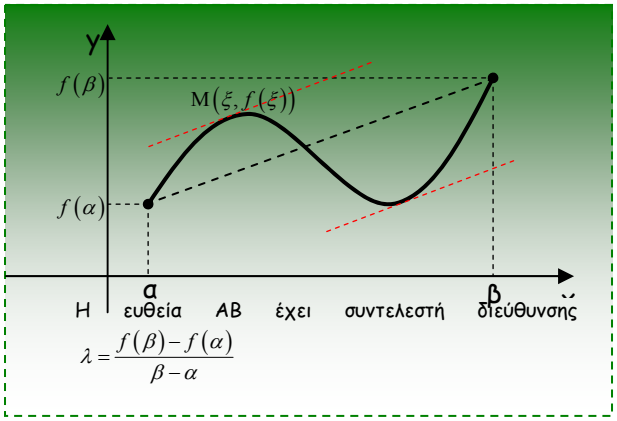
$$g(\alpha)=f(\alpha)=g(\beta)$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$, δηλαδή

$$f'(\xi)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0 \text{ ή } f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

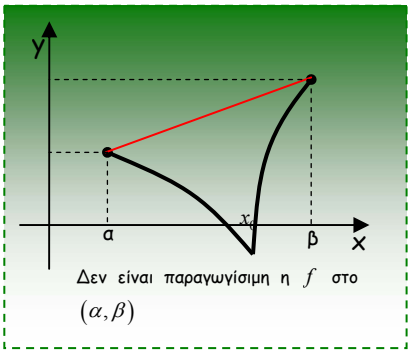
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης Τιμής

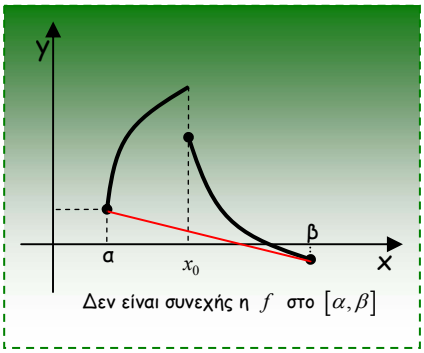
Γεωμετρικά, το θεώρημα της μέσης τιμής σημαίνει ότι αν ισχύουν για τη συνάρτηση f οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.



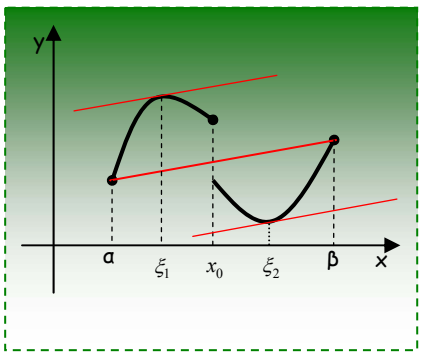
Παρατηρήσεις

1. Αν κάποια από της προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής δεν ισχύει, τότε το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.





2. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να μην ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλά να υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ΑΒ.



3. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε θα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα το Θεώρημα πάλι εφαρμόζεται.

Λυμένα παραδείγματα

Μέθοδος 1 (Προσδιορισμός Παραμέτρων ώστε να ισχύει το Θ.Μ.Τ)

- Απαιτούμε η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Απαιτούμε η f να είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta & x\le 1\\ \ln x & x>1\end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής για την f στο $[0,2]$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1)$ και στο $(1,2]$ και για να είναι συνεχής στο $[0,2]$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=1$, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}=f(1)$ (1). Είναι:
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha x+\beta)=\alpha+\beta$
- $f(1)=\alpha+\beta$.

  Άρα η (1) γίνεται : $\alpha+\beta=0$ (2).
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και στο $(1,2)$ και για να είναι παραγωγίσιμη και στο $(0,2)$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1$, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\in\mathbb{R}$$ (3). Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(\alpha+\beta)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha x+\beta-\alpha-\beta}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha(x-1)}{x-1}=\alpha.$$

Άρα η (3) γίνεται : $\alpha=1$. Με $\alpha=1$ από την (2) έπεται ότι $\beta=-1$. Επομένως, με $\alpha=1$ και $\beta=-1$ εφαρμόζεται το Θεώρημα της μέσης τιμής στη συνάρτηση f στο διάστημα $[0,2]$.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[1,5]$ όταν:

$$f(x)=\begin{cases}\ln^2 x & 0<x\le e\\ \alpha x-\beta & x>e\end{cases}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x & x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & x>1\end{cases}$. Να βρείτε τα α,β ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,2]$ και μετά να λύσετε την εξίσωση $2f'(x)=f(2)-f(0)$

Μέθοδος 2 (Διαχωρισμός του $[\alpha,\beta]$ σε υποδιαστήματα και εφαρμογή του Θ.Μ.Τ).

Συνήθως όταν ζητούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο τουλάχιστον σημείων του διαστήματος (α,β) ώστε να ισχύει κάποια σχέση, διαχωρίζουμε το διάστημα (α,β) σε δύο τουλάχιστον υποδιαστήματα (συνήθως του ίδιου πλάτους) και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ.

- Διαχωρισμός (α,β) σε ίσα υποδιαστήματα δύο ($\frac{\beta-\alpha}{2}$ πλάτος) $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τρία ($\frac{\beta-\alpha}{3}$ πλάτος) $\left(\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right),\left(\frac{2\alpha+\beta}{3},\frac{\alpha+2\beta}{3}\right),\left(\frac{\alpha+2\beta}{3},\beta\right)$.
- Αν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής $\lambda_1 f'(\xi_1)+\lambda_2 f'(\xi_2)+\cdots+\lambda_\nu f'(\xi_\nu)=\lambda$ όπου $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_\nu\in(\alpha,\beta)$, τότε χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα της μορφής $[\alpha,\gamma_1],[\gamma_1,\gamma_2],\ldots,[\gamma_{\kappa-1},\beta]$ με μήκη το καθένα $\lambda_1\frac{\beta-\alpha}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu}$, $\lambda_2\frac{\beta-\alpha}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu}$, …, $\lambda_\nu\frac{\beta-\alpha}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu}$ οπότε

  $\gamma_1=\alpha+\lambda_1\frac{\beta-\alpha}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu}$,

  $\gamma_2=\alpha+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\beta-\alpha}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu}$,…,

  $\gamma_{\nu-1}=\alpha+(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu)\frac{\beta-\alpha}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε καθένα από τα παραπάνω υποδιαστήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) να δειχθεί ότι υπάρχει ξ,ξ_1,ξ_2 του (α,β) ώστε να είναι:

$$2f(\xi)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$$

Λύση

Για τη συνάρτηση f ισχύει το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα: $\Delta=[\alpha,\beta]$, $\Delta_1=\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\Delta_2=\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

Υπάρχουν ξ,ξ_1,ξ_2 αντίστοιχα ώστε:

- $(\beta-\alpha)f'(\xi)=f(\beta)-f(\alpha)$ (1)
- $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)f'(\xi_1)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)\Leftrightarrow(\beta-\alpha)f'(\xi_1)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-2f(\alpha)$ (2)

- $\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f'(\xi_2)=f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow(\beta-\alpha)f'(\xi_2)=2f(\beta)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (3)

Με την πρόσθεση των (2) και (3) είναι:

$(\beta-\alpha)\left[f'(\xi_1)+f'(\xi_2)\right]=2\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)$ και λόγω της (1)

$(\beta-\alpha)\left[f'(\xi_1)+f'(\xi_2)\right]=2(\beta-\alpha)f'(\xi)\Leftrightarrow 2f(\xi)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\nu]$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\nu)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,...,\xi_\nu\in(0,\nu)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)+....+f'(\xi_\nu)=\nu f'(x_0)$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1],[1,2],[2,3],....,[\nu-1,\nu]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,1),(1,2),(2,3),....,(\nu-1,\nu)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχουν

$$\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(1,2),\xi_3\in(2,3),.....,\xi_\nu\in(\nu-1,\nu)$$

τέτοιο ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{c} f(1)-f(0)=f'(\xi_1)\\ f(2)-f(1)=f'(\xi_2)\\ f(3)-f(2)=f'(\xi_3)\\ .\\ .\\ .\\ f(\nu)-f(\nu-1)=f'(\xi_\nu)\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}f(\nu)-f(0)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)+...+f'(\xi_\nu)\ (1).$$

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\nu]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\nu)$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $x_0\in(0,\nu)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\nu)-f(0)=\nu f'(x_0)\ (2)$$

Επομένως, η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$\nu f'(x_0)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)+...+f'(\xi_\nu)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$4f'(\xi_1)+7f'(\xi_2)=0$$

Λύση

Η συνάρτηση f Θα είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέων ισχύει ότι $f(\alpha)=f(\beta)$ αφού για την συνάρτηση ισχύει το Θεώρημα Rolle.

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $4+7=11$ διαστήματα ίσου πλάτους $d=\dfrac{\beta-\alpha}{11}$.

Θεωρούμε το σημείο γ τέτοιο, ώστε να χωρίζει το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε δύο διαστήματα: $[\alpha,\gamma]$ πλάτους $4d$ και $[\gamma,\beta]$ πλάτους $7d$. Είναι $\gamma-\alpha=4d$ και $\beta-\gamma=7d$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στην f στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$. Οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\xi_2\in(\gamma,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{1}{4}\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{d}\Leftrightarrow 4f'(\xi_1)=f(\gamma)-f(\alpha) \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\frac{1}{7}\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{d}\Leftrightarrow 7f'(\xi_2)=f(\beta)-f(\gamma) \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε θα πάρουμε:

$$4f'(\xi_1)+7f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{d}=0$$

Ασκήσεις

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) .Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

5. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,10]$, με $f(1)=4$ και $f(10)=9$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,10)$ τέτοια, ώστε

$$2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=5$$

6. Έστω μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1,7]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,7)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)+3f'(\xi_3)=0$$

7. Αν για την συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$$

8. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με $\alpha>1$, για την οποία ισχύει $f(x^2)=2f(x)$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,\alpha)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f(\alpha)}{2(\sqrt{\alpha}-1)}$.

9. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και $f(0)=0$, $f(1)=1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε να ισχύει: $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

10. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\alpha+2006]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\alpha+2006)$. Αν ισχύει ότι $f(\alpha+2006)=f(\alpha)+2006$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\alpha+2006)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=-2$ και $f(\beta)=2$.

(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Μέθοδος 3 (Θ.Μ.Τ - Θ. Bolzano - Θ.Ε.Τ)

Όταν μας ζητείται να δείξουμε την ύπαρξη $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ των $f'(\xi_1)$ και $f'(\xi_2)$ τότε εφαρμόζουμε σε δύο διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής, όπου το x_0 θα μας δίνεται σε προηγούμενα υποερωτήματα της άσκησης ή θα προκύπτει από το Θεώρημα Bolzano ή το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$, ($\alpha<\beta$), να δειχτεί ότι:

(α) υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=x_0$

(β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$. Είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha>0$, $h(\beta)=f(\beta)-\beta=\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)<0$. Έτσι ισχύει το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$ και τελικά $f(x_0)=x_0$.

(β) Για τη συνάρτηση f ισχύει το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$. Έτσι προκύπτει ότι:

- Υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,x_0)$ ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=\dfrac{x_0-\beta}{x_0-\alpha}$ (1)
- Υπάρχει $\xi_2 \in (x_0,\beta)$ ώστε: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=\dfrac{\alpha-x_0}{\beta-x_0}$ (2)

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\frac{x_0-\beta}{x_0-\alpha}\cdot\frac{\alpha-x_0}{\beta-x_0}=1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Η συνάρτηση $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[1,5]$ και δύο παραγωγίσιμη στο $(1,5)$. Αν $f(1)=-2$ και για κάθε $x\in(1,5)$ είναι $f'(x)>1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μόνο μία ρίζα.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(1,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(5)-f(1)=(5-1)f'(\xi)\Leftrightarrow f(5)+2=4f'(\xi) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,5]$ και είναι $f(1)f(5)<0$, από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(1,5)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$, δηλαδή ο $\xi\in(1,5)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $(1,5)$ και άλλη ρίζα εκτός της ξ, τη ρ και π.χ. ρ<ξ. για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho,\xi]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ,ξ).
- $f(\rho)=f(\xi)$.

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\kappa\in(\rho,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(x)>1$ και για κάθε $x\in(1,5)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $(1,5)$ μοναδική λύση τον αριθμό ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο (α,β). Αν υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{f(\gamma)-f(\alpha)}>0$ (1), να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Λύση

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (α,γ). Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\gamma)-f(\alpha)=(\gamma-\alpha)f'(\xi_1) \quad (2).$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\gamma,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ,β). Επομένως, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\gamma)-f(\beta)=(\gamma-\beta)f'(\xi_2) \quad (3).$$

Η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται:

$$\frac{(\gamma-\beta)f'(\xi_1)}{(\gamma-\alpha)f'(\xi_2)}>0 \Leftrightarrow (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)f'(\xi_1)f'(\xi_2)>0 \underset{\gamma>\alpha}{\overset{\beta>\gamma}{\Rightarrow}} f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0 .$$

Για την f' έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.
- $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει $\kappa \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=0$ που σημαίνει ότι ο αριθμός κ είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Ασκήσεις

12. Δίνεται συνάρτηση f, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[0,2]$ και $f(2)=f(0)+2$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (0,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

(β) Υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $2f'(\xi)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$

13. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, για την οποία ισχύει $f(1)=4$ και $f(2)=1$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3x_0-2$

(β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=9$

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)=1-\gamma$

(β) Υπάρχουν $\alpha,\beta\in(0,1)$ με $\alpha\neq\beta$ τέτοια, ώστε $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$.

15. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+3f(\beta)}{4}$.

(β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{3}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{4}{f'(\xi)}$

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,2]$ με $f(1)=2$ και $f(2)=4$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=2(3-x_0)$

(β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$.

17. Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $3f(x_0)=f(\alpha)+2f(\beta)$

(β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)(x_0-\alpha)=2f'(\xi_2)(\beta-x_0)$.

(γ) Υπάρχουν ξ_1,ξ_2,ξ_3 τέτοια, ώστε $\dfrac{2}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{3}{f'(\xi_3)}$

Μέθοδος 4 (Ρίζες της f'')

Για να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(x)=0$ κάνουμε τα εξής:

- Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f σε δύο διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ και βρίσκουμε $\xi_1\in(\alpha,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$
- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και βρίσκουμε ένα $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει: $f(1)=7f(7)-6f(8)$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η $(1)\Leftrightarrow f(1)-f(7)=6\left[f(7)-f(8)\right]$ (2).

- Η f είναι συνεχής στο $[1,7]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,7)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1\in(1,7)$ τέτοιο ώστε:
$$f(1)-f(7)=(1-7)f'(\xi_1)\Leftrightarrow f(1)-f(7)=-6f'(\xi_1) \quad (3).$$
- Η f είναι συνεχής στο $[7,8]$ και παραγωγίσιμη στο $(7,8)$. Επομένως, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται υπάρχει $\xi_2\in(7,8)$ τέτοιο ώστε:
$$f(7)-f(8)=(7-8)f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(7)-f(8)=-f'(\xi_2) \quad (4).$$

Η (2) λόγω τον (3) και (4) γίνεται:
$$6f'(\xi_1)=-6f'(\xi_2)\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\ .$$

Για την f' έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2).
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$, $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f που είναι παράλληλες.

(β) Υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

(α) Έστω (ε) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ. Τότε είναι:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ και παραγωγίσιμη στα (α,β) και (β,γ), από τα θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ και $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (2) \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} \quad (3).$$

Επομένως η (1) γίνεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Έστω (ε_1) και (ε_2) οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ αντίστοιχα. Η (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi_1)$ και (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi_2)$. Επειδή $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

(β) Για την f' έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2).
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν είναι $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\alpha)+f(\beta)$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

Η $(1) \Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (2).

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

  Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)f'(\xi_1)\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{2}f'(\xi_1) \quad (3).$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$.

  Επομένως, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται υπάρχει $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f'(\xi_2)\Rightarrow f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}f'(\xi_2) \quad (4).$$

Η (2) λόγω των (3) και (4) γίνεται:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}f'(\xi_1)=\frac{\beta-\alpha}{2}f'(\xi_2)\Rightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2).$$

Για την f' έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2).
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Ασκήσεις

18. Η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-\alpha,\alpha]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε να είναι $f''(\xi)=0$.

19. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,3]$, για την οποία ισχύει $2f(1)=f(-1)+f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

20. Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-3,3]$ και ισχύει $f(-3)=6f(2)-5f(3)$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν εφαπτόμενες στη C_f που είναι παράλληλες.

(β) Υπάρχει $\xi\in(-3,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

21. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)\neq 0$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση της f τρία σημεία που να είναι συνευθεϊακά.

22. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με $\dfrac{f(1)+f(3)}{2}=f(2)+1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=2$.

23. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και η συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+1)-f(x)=\left(x^2-x\right)g(x)+1 \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

24. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(2-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=f''(\xi-2)$.

25. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $\gamma\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(2)=-2\gamma+2$, $f(4)=\gamma+2$, $f(6)=4\gamma+2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

26. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\alpha+1]$ και ισχύουν $f(\alpha+1)=f(\alpha)+\beta$, $f'(\alpha+1)=f'(\alpha)=\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha+1,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(9-x^2\right)\sigma\upsilon\nu x$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(-3,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $\xi_1\neq\xi_2$ και $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

28. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$x^2-1\le f(x)\le x^4-x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

(α) Να υπολογίσετε τα $f'(-1)$ και $f'(1)$

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=2$

29. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)+f(2)=f(0)+f(3)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Μέθοδος 5 (Πρόσημο της f' και f'')

Α. Για να δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο, ώστε $f'(x)<0$ ή $f'(x)>0$ σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ αρκεί να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ για την f στο $[\alpha,\beta]$.

Β. Για να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(x)<0$ ή $f''(x)>0$ κάνουμε τα εξής:

- Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f σε δύο διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ και βρίσκουμε $\xi_1\in(\alpha,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\ne f'(\xi_2)$
- Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)=f'(\beta)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi_1)\Leftrightarrow -f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi_1)\Leftrightarrow f'(\xi_1)=-\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,β). Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\beta)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\beta)-f'(\xi_1)=(\beta-\xi_1)f''(\xi)\Rightarrow\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}=(\beta-\xi_1)f''(\xi)\ \ (1)$$

Επειδή $\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$, από (1) έπεται ότι $(\beta-\xi_1)f''(\xi)>0\overset{\xi_1<\beta}{\Rightarrow}f''(\xi)>0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) τέτοια, ώστε $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ με $f(\gamma)<0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)>0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$. Οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\xi_2\in(\gamma,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<0$ αφού $f(\gamma)<0$ και $\gamma-\alpha>0$

$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=-\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}>0$ αφού $f(\gamma)<0$ και $\beta-\gamma>0$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq(\alpha,\beta)$ (Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β)). Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$. Οπότε υπάρχει ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(x_0)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0\Leftrightarrow f''(x_0)>0$$

Διότι $f'(\xi_2)>0$, $-f'(\xi_1)>0$ και $\xi_2-\xi_1>0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha],\alpha>0$ και είναι $f(\alpha)=\alpha$, $f(-a)=-a$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ και για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$ ισχύει $|f'(x)|\le 1$, να δείξετε ότι $f(0)=0$.

Λύση

- Η είναι συνεχής στο $[-\alpha,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,0)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1\in(-\alpha,0)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-\alpha)}{\alpha}\Rightarrow f'(\xi_1)=\frac{f(0)+\alpha}{\alpha}.$$

- Η είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_2\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}\Rightarrow f'(\xi_2)=\frac{\alpha-f(0)}{\alpha}.$$

Για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$ ισχύει $|f'(x)|\le 1$, οπότε και:

$$\begin{Bmatrix}|f'(\xi_1)|\le 1\\|f'(\xi_2)|\le 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\dfrac{|f(0)+\alpha|}{\alpha}\le 1\\\dfrac{|\alpha-f(0)|}{\alpha}\le 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|f(0)+\alpha|\le\alpha\\|\alpha-f(0)|\le\alpha\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}-\alpha\le f(0)+\alpha\le\alpha\\-\alpha\le\alpha-f(0)\le\alpha\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}f(0)\le 0\\f(0)\ge 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow f(0)=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x)\ge M$. Να δείξετε το: $f(\beta)\ge f(\alpha)+M(\beta-\alpha)$ (1).

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο (α,β). Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi)$ (2).

Η (1) γίνεται:

$$f(\beta)\ge f(\alpha)+M(\beta-\alpha)\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)\ge M(\beta-\alpha)\Leftrightarrow(\beta-\alpha)f'(\xi)\ge M(\beta-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)\ge M$$ π

ου είναι αληθής γιατί για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x)\ge M$.

Ασκήσεις

30. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f'(\beta)=f(\beta)f'(\alpha)$ και $f'(x)\neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)f''(\xi)>0$.

31. Η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ,x_0 με $0<x_0<\xi<1$, τέτοια ώστε $(1-\xi)f'(\xi)=f(\xi)$ και $\xi f'(x_0)<f'(\xi)$.

32. Η συνάρτηση $f:[5,6]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[5,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(5,6)$ και για κάθε $x\in(5,6)$ ισχύει $f'(x)>2$. Αν $f(5)=-2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(5,6)$.

33. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2006,2008]$, με $f(2006)=0$ και παραγωγίσιμη στο $(2006,2008)$, με $|f'(x)|\leq 2$, για κάθε $x\in(2006,2008)$. Να αποδείξετε ότι $|f(2008)|\leq 4$.

34. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ να δείξετε ότι $\dfrac{f(\alpha)}{x-\alpha}+\dfrac{f(\beta)}{x-\beta}>0$.

Μέθοδος 6 (Θ.Μ.Τ-Εφαπτομένη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$ και είναι $f(6)=3$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,6)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ μα είναι κάθετη με την ευθεία $(\delta):y=-\dfrac{1}{2}x+9$.

Λύση

1ος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε:

$$f(6)-f(2)=(6-2)f'(\xi) \Leftrightarrow 3-(-5)=4f'(\xi) \Leftrightarrow 8=4f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi)=2 .$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x$ η οποία ορίζεται στο $[2,6]$. Για την h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[2,6]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2,6)$ με $h'(x)=f'(x)-2$.
- $h(2)=f(2)-4=-5-4=-9$ και $h(6)=f(6)-12=3-12=-9$ δηλαδή $h(2)=h(6)$.

Από το θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-2=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=2 .$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ ορίζεται η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi)=2$.

Επειδή $f'(\xi)\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ έπεται ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη με την ευθεία $(\delta): y=-\frac{1}{2}x+9$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Η συνάρτηση $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(2)=4$ και $f(3)=6$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f. Έστω $A(\xi, f(\xi))$ σημείο της C_f και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο Α, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \quad (1).$$

Επειδή το σημείο $O(0,0)$ ανήκει στην (ε), από την(1) έπεται ότι:

$$-f(\xi)=-\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0 .$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x)-f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[2,3]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ η οποία ορίζεται στο $[2,3]$.

Για την h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[2,3]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
- $h(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ και $h(3)=\dfrac{f(3)}{3}=\dfrac{6}{3}=2$ δηλαδή $h(2)=h(3)$.

Από το Θεώρημα Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε: $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ που σημαίνει ότι ο αριθμός $\xi\in(2,3)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $xf'(x)-f(x)=0$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Ασκήσεις

35. Η συνάρτηση $f:[-2,6]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(6)=18$ και $f(-2)=2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-2,6)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y=2x+5$.

36. Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x+15$.

37. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, για την οποία ισχύει $f(3)=12$ και $f(1)=4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφι-

κής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=4x-1$.

Μέθοδος 7 (Εύρεση σχέσης μέσω Θ.Μ.Τ)

Όταν μας δίνεται να αποδείξουμε μία σχέση, τότε σχηματίζουμε τον λόγο μεταβολής και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε κατάλληλο διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο παραγωγίσιμη στο (α,β) και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)>0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln f(x)$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Επομένως, από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\alpha)-h(\beta)=(\alpha-\beta)h'(\xi)\Leftrightarrow \ln f(\alpha)-\ln f(\beta)=(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$$

Ασκήσεις

38. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$e^{f(\beta)}-e^{f(\alpha)}=(\beta-\alpha)f'(\xi)e^{f(\xi)}$$

39. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\neq 0$. Αν $f'(\alpha)=\alpha f(\alpha)$, $f'(\beta)=\beta f(\beta)$ και $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=1$.

(β) $f''(\xi)f(\xi)=\left[f'(\xi)\right]^2+\left[f(\xi)\right]^2$.

Μέθοδος 8 (Απόδειξη διπλών ανισοτήτων)

- Μετασχηματίζουμε τη διπλή ανισότητα έτσι ώστε στο κέντρο της να σχηματιστεί η διαφορά $f(\beta)-f(\alpha)$ όπου f συνάρτηση που ορίζουμε εμείς.
- Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο (α,β) και γράφουμε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1).
- Θέτουμε $\alpha<\xi<\beta$ και μορφοποιούμε την παράσταση $f'(\xi)$ οπότε σχηματίζεται μία ανισότητα της μορφής $\mathrm{A}<f'(\xi)<\mathrm{B}$ (Εδώ μας βοηθάει και η μονοτονία της f')(2).
- Θέτουμε στη (2) το $f'(\xi)$ από την (1) και αποδεικνύουμε τη ζητούμενη σχέση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Αν $\alpha>\beta>0$ **να δείξετε ότι:**

(α) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}<\ln\alpha-\ln\beta<\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}$ **(1)**

(β) $\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)<\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$ **(2)** $(\nu\geq 2)$.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\beta,\alpha]$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\beta,\alpha]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (β,α).

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (\beta,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)f'(\xi) \Leftrightarrow \ln\alpha-\ln\beta=(\alpha-\beta)\frac{1}{\xi} \quad (3).$$

Η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}<\frac{(\alpha-\beta)}{\xi}<\frac{\alpha-\beta}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta<\xi<\alpha \quad \text{αληθής.}$$

Επομένως $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}<\ln\alpha-\ln\beta<\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ με $\alpha>\beta>0$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$ η οποία ορίζεται στο $[\beta,\alpha]$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\beta,\alpha]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (β,α) με $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (\beta,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)f'(\xi) \Leftrightarrow \alpha^{\nu}-\beta^{\nu}=(\alpha-\beta)\nu\xi^{\nu-1} \quad (4).$$

Η σχέση (2) γίνεται:

$$\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)<(\alpha-\beta)\nu\xi^{\nu-1}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta) \Leftrightarrow \beta^{\nu-1}<\xi^{\nu-1}<\alpha^{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$\ln\beta^{\nu-1}<\ln\xi^{\nu-1}<\ln\alpha^{\nu-1} \Leftrightarrow (\nu-1)\ln\beta<(\nu-1)\ln\xi<(\nu-1)\ln\alpha \Leftrightarrow$$

$$\ln\beta<\ln\xi<\ln\alpha \Leftrightarrow \beta<\xi<\alpha$$

αληθής.

Επομένως $\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)<\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$ με $\alpha>\beta>0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

Να δείξετε ότι:

(α) $2-\frac{e}{2}<\ln 2<\frac{2}{e}$

(β) $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}<\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[2,e]$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[2,e]$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2,e)$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (2,e)$ τέτοιο ώστε:

$$f(2)-f(e)=(2-e)f'(\xi) \Leftrightarrow \ln 2-\ln e=(2-e)\frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \ln 2-1=\frac{2-e}{\xi}+1 \quad (1).$$

Η σχέση (α) λόγω της (1) γίνεται:

$$2-\frac{e}{2}<1+\frac{2-e}{\xi}<\frac{2}{e} \Leftrightarrow 1-\frac{e}{2}<\frac{2-e}{\xi}<\frac{2}{e}-1 \Leftrightarrow \frac{2-e}{2}<\frac{2-e}{\xi}<\frac{2-e}{e} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2<\xi<e$$

αληθής.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ η οποία ορίζεται στο $\left[\frac{5\pi}{18},\frac{\pi}{3}\right]$.

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{5\pi}{18},\frac{\pi}{3}\right]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{5\pi}{18},\frac{\pi}{3}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{5\pi}{18},\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f\left(\frac{5\pi}{18}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{3}\right)f'(\xi) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{18}(-\eta\mu\xi) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{18}\eta\mu\xi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}\eta\mu\xi+\frac{1}{2} \quad (2).$$

Η σχέση (β) λόγω της (2) γίνεται:

$$\frac{\pi}{18}\eta\mu\xi+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{36} \Leftrightarrow \frac{\pi}{18}\eta\mu\xi<\frac{\pi\sqrt{3}}{36} \Leftrightarrow \eta\mu\xi<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

αληθής, γιατί $\frac{5\pi}{18}<\xi<\frac{\pi}{3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Αν $0<\alpha\le\beta<\frac{\pi}{2}$**, να δείξετε ότι:** $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}\le\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ **(1).**

Λύση

- Αν $\alpha = \beta$, τότε η (1) γίνεται $0 \le 0 \le 0$ που ισχύει.
- Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha, \beta] \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για την f έχουμε :

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta) f'(\xi) \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta = (\alpha - \beta)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \xi} \quad (2).$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$\frac{\alpha - \beta}{\sigma\upsilon\nu^2 \beta} \le (\alpha - \beta)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \xi} \le \frac{\alpha - \beta}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \beta} \ge \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \xi} \ge \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 \beta \le \sigma\upsilon\nu^2 \xi \le \sigma\upsilon\nu^2 \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 \beta} \le \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 \xi} \le \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$|\sigma\upsilon\nu\beta| \le |\sigma\upsilon\nu\xi| \le |\sigma\upsilon\nu\alpha|$$

και επειδή $0 < \alpha < \xi < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\beta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\xi > 0$

έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu\beta \le \sigma\upsilon\nu\xi \le \sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow \alpha \le \xi \le \beta$ αληθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι: $2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < e^{\alpha} + e^{\beta}$ **(1).**

Λύση

Η $(1) \Leftrightarrow e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{\alpha} < e^{\beta} - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$. Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ με $f'(x) = e^x$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right) f'(\xi_1) \Leftrightarrow e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{2} e^{\xi_1}$$

(3).

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) f'(\xi_2) \Leftrightarrow e^{\beta} - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\beta-\alpha}{2} e^{\xi_2} \quad (4).$$

Η (2) λόγω των (3) και (4) γίνεται:

$$\frac{\beta-\alpha}{2} e^{\xi_1} < \frac{\beta-\alpha}{2} e^{\xi_2} \Leftrightarrow e^{\xi_1} < e^{\xi_2} \Leftrightarrow \xi_1 < \xi_2 \text{ αληθής.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22

Αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(1)+f(4) > f(2)+f(3)$.

Λύση

Αρκεί αν δείξουμε ότι: $f(4)-f(3) > f(2)-f(1)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα $[1,2]$, $[3,4]$. Σε κάθε ένα από τα προηγούμενα διαστήματα εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής, οπότε έχουμε ότι:

Στο διάστημα $[1,2]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1)$$

Στο διάστημα $[3,4]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (3,4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = f(4)-f(3)$$

Το $\xi_1 \in (1,2)$ και το $\xi_2 \in (3,4)$ άρα:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2)-f(1) < f(4)-f(3)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$ με $f(1)=2$ και για κάθε $x\in(1,5)$ ισχύει $2<f'(x)<3$. Να δείξετε ότι: $10<f(5)<14$ **(1).**

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,5)$ τέτοιο ώστε

$$f(5)-f(1)=(5-1)f'(\xi)\Leftrightarrow f(5)-2=4f'(\xi)\Leftrightarrow f(5)=4f'(\xi)+2.$$

Η (1) γίνεται: $10<4f'(\xi)+2<14\Leftrightarrow 8<4f'(\xi)<12\Leftrightarrow 2<f'(\xi)<3$ που ισχύει γιατί για κάθε $x\in(1,5)$ είναι $2<f'(x)<3$.

Ασκήσεις

40. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ με $f(0)=10$. Αν για κάθε $x\in(0,5)$ είναι $|f'(x)|<1$, να δείξετε ότι $5<f(5)<15$.

41. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ και για κάθε $x\in(1,4)$ ισχύει $1<f'(x)<2$. Αν $f(1)=2$, να δείξετε ότι $5<f(4)<8$.

42. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$, ισχύει: $\dfrac{1}{x+1}<\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}$

43. Αν $x\geq 2$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\ln(x+)^{x+1}}<\ln(\ln(x+1))-\ln(\ln x)<\dfrac{1}{\ln x^{x}}$.

44. Έστω f συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι $f(4)+f(5)<f(3)+f(6)$.

45. Η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha,\delta]$ και $\alpha<\beta\le\gamma<\delta$ με $\alpha+\delta=\beta+\gamma$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)+f(\delta)<f(\beta)+f(\gamma)$

46. Να λύσετε την εξίσωση $9^x+3^x=5^x+7^x$

47. Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι:

(α) $\frac{\beta-\alpha}{\eta\mu^2\beta}<\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta<\frac{\beta-\alpha}{\eta\mu^2\alpha}$

(β) $\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta$

(γ) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}<\frac{\alpha}{\beta}$

48. Αν $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι :

(α) $2^\alpha\ln 2<\frac{2^\beta-2^\alpha}{\beta-\alpha}<2^\beta\ln 2$

(β) $e^\alpha(\beta-\alpha)<e^\beta-e^\alpha<e^\beta(\beta-\alpha)$

49. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

(α) $|\eta\mu x-\eta\mu y|\le|x-y|$

(β) $|\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2y|\le|x-y|$.

50. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

(α) $\left|\ln\frac{x^2+1}{y^2+1}\right|\le|x-y|$

(β) $\left|\ln\frac{2e^x+1}{2e^y+1}\right|\le|x-y|$

51. Αν $0<x\le y<\frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι $(y-x)\sigma\upsilon\nu y\le\eta\mu y-\eta\mu x\le(y-x)\sigma\upsilon\nu x$.

52. Αν $0<x<y<1$, να δείξετε ότι $|x\sigma\upsilon\nu x-y\sigma\upsilon\nu y|<2|x-y|$.

53. Να δείξετε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|\sqrt{x^2+\alpha^2}-\sqrt{y^2+\alpha^2}\right|\le|x-y|$.

Μέθοδος 9 (Συνδυασμός Θ.Μ.Τ με όρια)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24

Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) \geq x^2+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,x]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,x]$.

Επομένως βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Επειδή $f'(x) \geq x^2+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(\xi) \geq \xi^2+1 \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq \xi^2+1 \Leftrightarrow f(x) \geq (\xi^2+1)x + f(0)$$

Επειδή $\xi^2+1>0$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\xi^2+1)x+f(0)\right] = +\infty$.

Ασκήσεις

54. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \leq M < 0$, να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x) \leq x \cdot M + f(0)$ αν $x>0$.

(β) $f(x) \geq x \cdot M + f(0)$ αν $x<0$.

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(δ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(ε) η f είναι αντιστρέψιμη.

55. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με f' γνησίως φθίνουσα.

(α) Να δείξετε ότι: $f(x+1)-f(x) < f'(x) < f(x)-f(x-1)$, $x \geq 1$

(β) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$

Ασκήσεις

56. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει εφαπτόμενη (ε) της C_f η οποία έχει με την C_f δύο τουλάχιστον κοινά σημεία, να αποδείξετε ότι:

(α) η f' δεν είναι ένα προς ένα.

(β) υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_0)=0$

57. Η συνάρτηση $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,a)$ ισχύει $|f''(x)|\le\theta$, $\theta>0$. Αν για κάθε $x\in[0,a]$ ισχύει $f(x)\le f(\xi)$ με $\xi\in(0,a)$ να δείξετε ότι $|f'(0)|+|f'(\alpha)|\le\alpha\theta$.

58. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ne 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $f'(\alpha)=\alpha f(\alpha)$ και $f'(\beta)=\beta f(\beta)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε

$$f''(x_0)f(x_0)=\left(f'(x_0)\right)^2+\left(f(x_0)\right)^2$$

59. Η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$, με $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_0 και ξ με $0<x_0<\xi<1$, ώστε $(1-\xi)f'(\xi)=f(\xi)$ και $\xi f'(x_0)<f'(\xi)$.

60. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ και ισχύει $f(1)=7$ και $|f'(x)|\le 2\sqrt{x}$ για κάθε $x\in[1,5]$, να αποδείξετε ότι:

(α) $-2\sqrt{x}(x-1)+7\le f(x)\le 2\sqrt{x}(x-1)+7$,

(β) $-5\le f(4)\le 19$.

61. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\mathrm{B}(1,7)$.

(α) Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left(-6+f\left(x^2-8\right)\right)=-2$

(γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $x+2y-2007=0$.

62. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και οι αριθμοί $0<\alpha<\beta$, ώστε $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$ και $f(\alpha+\beta)=0$. Να δείξετε ότι:

(α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0)=x_0$,

(β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, με $\xi_1<\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$

(γ) η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει λύση στο $(\alpha,\ \alpha+\beta)$.

63. Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)>0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<0$

(β) αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)<0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)>0$

64. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[1,2]$. Για την f ισχύουν:

(1) $f(1)=f(2)-\dfrac{7}{2}$

(2) $f'(1)>4$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=x_0^2$.

(β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4\xi$.

65. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[0,2]$ με τιμές στο $[0,4]$, που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in[0,2]$ ώστε $f(\xi)=2\xi$.

66. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0)=\alpha,\ \ \alpha>0$ και $f(1)=0$.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=\alpha x_0$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_1,x_2\in(0,1)$, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=\alpha^2$.

67. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f''(x_0)\le 0$.

68. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\ne x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

(β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

(γ)Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]=x_0.$$

(γ) Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0\in(1,e)$.

(δ) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\ne\xi_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1.$$

69. Α. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν $f'(\alpha)>0$, $f'(\beta)<0$

(α) Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο η f παίρνει μέγιστη τιμή.

(β) Αποδείξτε ότι $f'(\xi)=0$.

Β. Υποθέστε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f'(\alpha)f'(\beta)<0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, αποδείξτε τα επόμενα:

(α) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

(β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα το πολύ σε ένα σημείο.

70. Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma > 0$ με $\alpha < \beta < \gamma$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, $f(\gamma) = \gamma$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν $\kappa,\lambda > 0$ τέτοια ώστε $f(\kappa) = \kappa f'(\kappa)$, $f(\lambda) = \lambda f'(\lambda)$.

(β) Αν η ευθεία που περνά από τα $\mathrm{A}(\kappa, f(\kappa))$, $\mathrm{B}(\lambda, f(\lambda))$ περνάει και από την αρχή των αξόνων, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $f''(x_0) = 0$.

71. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \lambda$ για κάθε $\varepsilon > 0$

(β) αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \kappa,\ \kappa \in (0,+\infty)$, τότε $\lambda = 0$.

72. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [-2,2]$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}$ με $-2 < \xi_1 < 0 < \xi_2 < 2$ και ισχύει $|f'(\xi_1)| \leq 1$ και $|f'(\xi_2)| \leq 1$

(β) Υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $|f''(\xi)| \leq \dfrac{2}{\xi_2 - \xi_1}$.

73. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,\beta]$ συνάρτηση f ώστε:

$$f(a)f(\beta) + a^2 + \beta^2 = 2a\beta$$

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)$ ώστε: $f(x_0) = 0$.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (a,\beta)$ με $\xi_1 < x_0 < \xi_2$, ώστε:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)>0$$

(γ) Αν $f(a)>0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$: $f'(\xi)\le -2$.

(δ) Υπάρχει περίπτωση να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[a,\beta]$; Ισχύει το ίδιο διαστήματα υποσύνολα του $[a,\beta]$;

74. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(0)+f(2)=f(1)$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)+f(1)$

(β) Αν $|f''(x)|\le 1$ για κάθε $x\in(0,2)$, τότε $|f(1)|<2$.