Θεώρημα Rolle

Τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης f παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την μελέτη της αφού ως γνωστών αποτελούν θέσεις πιθανών ακροτάτων της.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Απόδειξη

- Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε $f'(\xi)=0$ για κάθε $\xi\in[\alpha,\beta]$.
- Αν η f δεν είναι σταθερή, τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_\varepsilon,x_\mu\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύουν

$$f(x_\varepsilon)=f(x_\mu) \quad \text{με} \quad f(x_\varepsilon)\neq f(x_\mu)$$

Τα σημεία x_ε,x_μ δεν μπορεί να είναι τα δύο άκρα του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, διότι π.χ αν ήταν $x_\varepsilon=\alpha$ και $x_\mu=\beta$, τότε θα ήταν

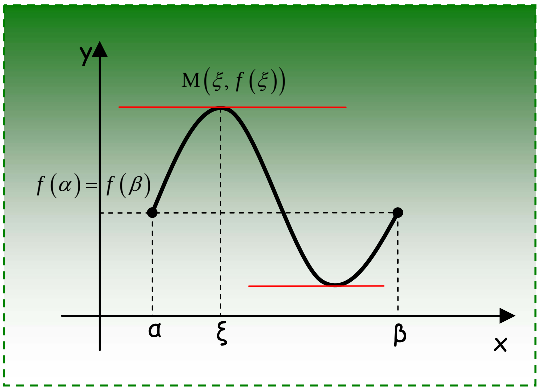
$$f(\alpha)=f(x_\varepsilon)<f(x_\mu)=f(\beta)$$

που είναι αδύνατον, αφού $f(\alpha)=f(\beta)$.

Επομένως ένα τουλάχιστον από αυτά είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος, έστω το x_ε. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_\varepsilon\in[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat, ισχύει $f'(x_\varepsilon)$, δηλαδή το x_ε είναι το ζητούμενο σημείο ξ.

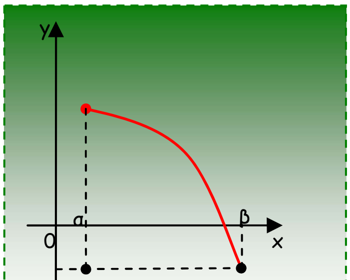
Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle

Γεωμετρικά του Θεώρημα Rolle σημαίνει ότι αν ισχύουν για τη συνάρτηση f οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (Σχήμα 1).

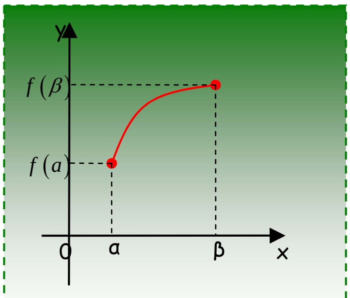


Παρατηρήσεις

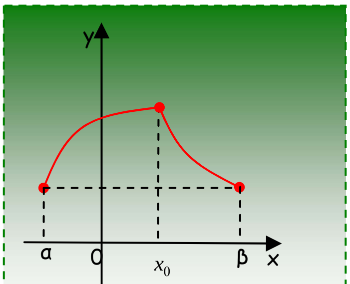
1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη σε διαστήματα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
2. Πρέπει να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος αλλιώς δεν ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$



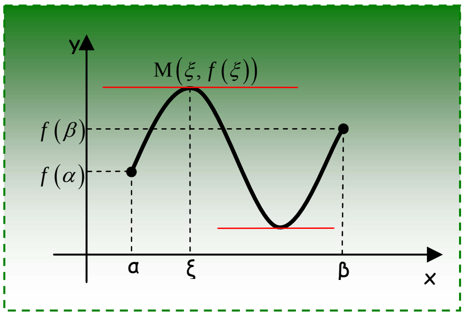
$f(\alpha) \neq f(\beta)$



Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in [\alpha, \beta]$

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα, πληρουμένων και των υπολοίπων προϋποθέσεων φυσικά.

4. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει ρίζα της παραγώγου χωρίς να ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου δεν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$.



Λυμένα παραδείγματα

Μέθοδος 1 (Έλεγχος αν ισχύει το Θ.Rolle)

Διαπιστώνουμε στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ που δίνεται αν:

- η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- η f παραγωγίσιμη στο (α,β).
- $f(\alpha)=f(\beta)$

Τότε ισχύει το Θ.Rolle, δηλαδή υπάρχει ρίζα της παραγώγου στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ($f'(x)=0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα Δ για την συνάρτηση f όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2x} & x<0 \\ x^3+\eta\mu^2\pi x & x\geq 0\end{cases}$ **και** $\Delta=[-1,1]$

(β) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ **και** $\Delta=[-2,2]$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2x} & x<0 \\ x^3+\eta\mu^2\pi x & x\geq 0\end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,1]$ και θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

➢ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3+\eta\mu\pi x\right)=0$

➢ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2\chi}\right)=0+0=0$

➢ $f(0)=0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ και στο $(0,1)$ και θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

➢ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+\eta\mu^2\pi x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^3+\eta\mu^2\pi x\right)'}{x'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+2\pi\cdot\eta\mu\pi x\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\right)=0$

➢ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2x}\right)=0+0=0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

- Είναι $f(-1)=1$ και $f(1)=1$, δηλαδή $f(-1)=f(1)$.

Επομένως εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,1]$.

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}}=+\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Επομένως, δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-2,2]$.

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα του Rolle στις παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα διαστήματα. Στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$, για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

(α) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x\le 0 \\ 1-x^3 & x>0 \end{cases}, x\in[-1,1]$

(β) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}, x\in[1,5]$

(γ) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-12 & x\le -2 \\ 4x^2+16x & x>-2 \end{cases}, x\in[-6,0]$

(δ) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}, x\in[0,3]$

(ε) $f(x)=|x-3|, x\in[0,6]$

2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle, για την συνάρτηση $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ στο διάστημα $[-1,2]$. Αν εφαρμόζεται, να βρεθεί το $\xi\in(-1,2)$, για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.

Μέθοδος 2 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να ισχύει το Θ.Rolle)

- Θέτουμε $f(\alpha)=f(\beta)$
- Ελέγχουμε τη συνέχεια στο $[\alpha,\beta]$
- Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα στο (α,β).
- Λύνουμε το σύστημα των σχέσεων που προκύπτουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+ax+\beta & x\le 0 \\ \gamma x^2+4x+4 & x>0 \end{Bmatrix}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,1]$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Για να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle στην f στο διάστημα $[-1,1]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και να ισχύει $f(-1)=f(1)$.

- $f(1)=f(-1)\Leftrightarrow \gamma+4+4=(-1)^2-\alpha+\beta\Leftrightarrow \gamma+8=1-\alpha+\beta\Leftrightarrow$ $\alpha-\beta+\gamma=-7$ **(1)**
- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,1]$ και για να είναι συνεχής στο $[-1,1]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \quad \textbf{(A)}$$

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(\gamma x^2+4x+4)=4$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x^2+\alpha x+\beta)=\beta$
- $f(0)=\beta$

Επομένως η **(Α)** γίνεται $4=\beta$ **(2)**.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ και στο $(0,1)$ και για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\in\mathbb{R} \quad \textbf{(B)}$$

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma x^2+4x+4-\beta}{x}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma x^2+4x+4}{x}=$
  $=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\gamma x+4)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(\gamma x+4)=4$
- $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-\beta}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+\alpha)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+\alpha)=\alpha$

Επομένως η **(Β)** γίνεται $\alpha=4$ **(3)**.

- Από (1),(2) και (3) έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+\gamma=-7\\ \beta=4\\ \alpha=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=4\\ \beta=4\\ \gamma=-7\end{matrix}\right\}$$

Ασκήσεις

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το Θεώρημα του Rolle στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια να βρεθούν οι ρίζες ξ της παραγώγου στο (α,β).

(α) $f(x)=x^2-(\alpha+1)x+3\alpha-5$ στο $[2,5]$

(β) $f(x)=x^3-(5-\alpha)x^2+9x-2\alpha+5$ στο $[1,4]$

(γ) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2\alpha-3-x}+1$ στο $[-1,1]$

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+2 & x<0 \\ x^3+\beta x^2+3x+\gamma & x\geq 0 \end{cases}$ (γ) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2\alpha-x}, x\in[2,4]$

(β) $f(x)=\begin{cases} \alpha x+x^2\eta\mu\dfrac{\pi}{2x} & x<0 \\ \beta x+\gamma & x\geq 0 \end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x\leq\gamma \\ x^2+2x+3 & x>\gamma \end{cases}$

Μέθοδος 3 (Ύπαρξη ρίζας με χρήση αρχικής συνάρτησης)

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μία εξίαωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Bolzano τότε:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο $1^{\text{ο}}$ μέλος.
- Παίρνουμε μια αρχική συνάρτηση $F(x)$ της $f(x)$ ($F'(x)=f(x)$) και εφαρμόζουμε το Θ.Rolle.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν $\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\gamma}{2}+\delta=0$ **να δείξετε ότι η εξίσωση** $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ **έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο** $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{4}x^4+\dfrac{\beta}{3}x^3+\dfrac{\gamma}{2}x^2+\delta x$ η οποία ορίζεται στο $[0,1]$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$
- $f(0)=0$ και $f(1)=\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=0$ δηλαδή $f(0)=f(1)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\alpha\xi^3+\beta\xi^2+\gamma\xi+\delta=0$,που σημαίνει ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα τις εξίσωσης $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-9x^2-2x+9=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-3x^3-x^2+9x$ η οποία ορίζεται στο $(1,2)$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f'(x)=4x^3-9x^2-2x+9$
- $f(1)=6$ και $f(2)=6$ δηλαδή $f(1)=f(2)=6$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 4\xi^3-9\xi^2-2\xi+9=0$,που σημαίνει ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα τις εξίσωσης $4x^3-9x^2-2x+9=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να δείξετε ότι η εξίσωση $8\alpha x^3-18\beta x^2+6x=2\alpha-6\beta+3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,0)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\alpha x^4-6\beta x^3+3x^2-(2\alpha-6\beta+3)x$ η οποία ορίζεται στο $[0,1]$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x)=8\alpha x^3-18\beta x^2+6x-2\alpha+6\beta-3$
- $f(0)=0$ και $f(1)=0$ δηλαδή $f(0)=f(1)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 8\alpha\xi^3-18\beta\xi^2+6\xi-2\alpha+6\beta-3=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\alpha\xi^3-18\beta\xi^2+6\xi=2\alpha-6\beta+3$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα τις εξίσωσης $8\alpha x^3-18\beta x^2+6x=2\alpha-6\beta+3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να δείξετε ότι η εξίσωση $12\alpha^2x^3-6\beta x^2+2\gamma x+3\alpha^2+2\beta+\gamma=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3\alpha^2x^4-2\beta x^3+\gamma x^2+(3\alpha^2+2\beta+\gamma)x$ η οποία ορίζεται στο $[-1,0]$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με $f'(x)=12\alpha x^3-6\beta x^2+2\gamma x+3\alpha^2+2\beta+\gamma$
- $f(0)=0$ και $f(-1)=0$ δηλαδή $f(0)=f(-1)$.

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 12\alpha^2\xi^3-6\beta\xi^2+2\gamma\xi+3\alpha^2+2\beta+\gamma=0$ που σημαίνει ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα τις εξίσωσης $12\alpha^2x^3-6\beta x^2+2\gamma x+3\alpha^2+2\beta+\gamma=0$.

Ασκήσεις

5. Αν $\alpha+\beta=e-1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x}=-2\alpha x+\beta$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $8\alpha x^3+9\beta x^2-6\beta x-2\alpha=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

7. Αν $\alpha+\pi=2\beta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\eta\mu x=2\beta\sigma\upsilon\nu x-2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $12\alpha x^3+12\beta x^2-8\beta x-3\alpha=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

9. Αν $\frac{\alpha_\nu}{\nu+1}+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\nu}+\frac{\alpha_{\nu-2}}{\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_0=0,\quad \nu\in\mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

10. Δίνεται $f(x)=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_0=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi\in(0,1)$.

11. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ για την οποία ισχύει $6\cdot x\cdot f(x)\neq(3x^2-12)f'(x)$, για κάθε $x\in[-2,2]$. Να αποδείξετε ότ:

(α) $f(2)\cdot f(-2)\neq 0$

(β) Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,2)$ (Με άτοπο)

12. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ και ισχύει $f(x)\sigma\upsilon\nu x\neq f'(x)\eta\mu x$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Να δείξετε ότι:

(α) $f(0)\cdot f(\pi)\neq 0$

(β) Η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$

13. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, να δείξετε ότι $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

Υπόδειξη: Με την μέθοδο της άτοπο επαγωγής.

Μέθοδος 4 (Απόδειξη σχέσεων με χρήση αρχικής συνάρτησης)

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ζητούμενης σχέσης στο 1ο μέλος και θέτουμε όπου ξ το x. Έστω ότι το 1ο μέλος είναι $A(x)$.
- Βρίσκουμε την αρχική συνάρτηση $A(x)$ ή κατάλληλο μετασχηματισμό αυτής έστω $h(x)$.
- Εφαρμόζουμε το Θ.Rolle για την $h(x)$.

Δίνεται ότι: η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ζητείται η ύπαρξη ξ που ικανοποιεί τη σχέση	Βοηθητική συνάρτηση στην οποία εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle.
$f'(\xi)=c$	$h(x)=f(x)-cx$
$f'(\xi)=n\xi^{n-1}$	$h(x)=f(x)-x^n$
$f'(\xi)(c-\xi)=f(\xi)$	$h(x)=(x-c)f(x)$
$f'(\xi)(\xi-c)=f(\xi)$	$h(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$
$\xi f'(\xi)=nf(\xi)$	$h(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$
$f'(\xi)=cf(\xi)$	$h(x)=e^{-cx}f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ και ισχύει $f(3)=f(1)+8$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^2$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[1,3]$. Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[1,3]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $h'(x)=f'(x)-2x$
- $h(1)=f(1)-1$ και $h(3)=f(3)-9=f(1)+8-9=f(1)-1$ δηλαδή $h(1)=h(3)$

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-2\xi=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει $f(-1)=f(1)+2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi-1$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^2+x$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[-1,1]$. Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $h'(x)=f'(x)-2x+1$
- $h(-1)=f(-1)-2$ και $h(1)=f(1)=f(-1)-2$ δηλαδή $h(-1)=h(1)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-2\xi+1=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει $f(2)=2f(1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[1,2]$. Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $h(1)=f(1)$ και $h(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{2f(1)}{2}=f(1)$ δηλαδή $h(1)=h(2)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)=f(\xi)$$

που σημαίνει ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό $\xi\in(1,2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) και ισχύει $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $g(x)\neq 0$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $g'(x)\neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $h(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $h(\beta)=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) και για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f(x)g(x)\neq 0$. Αν $f(\alpha)=0$ και $g(\beta)=0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $h(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)=0$ και $h(\beta)=f(\beta)g(\beta)=0$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0\overset{f(x)g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{f'(\xi)g(\xi)}{f(\xi)g(\xi)}+\frac{f(\xi)g'(\xi)}{f(\xi)g(\xi)}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$$

Ασκήσεις

14. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0)=f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3\xi^2-1$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^3-x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

15. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f(0)=-1$ και $f(\pi)=3$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\eta\mu\xi-\sigma\upsilon\nu\xi$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)+2\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

16. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(0)=-2$ και $f(2)=-8$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=-3x^2+2x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

17. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=\frac{3}{2}$ και $f(e)=\frac{e^2}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\xi-\frac{1}{\xi}$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}+\ln x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

18. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(1)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi)=-2f(\xi)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=x^2 f(x)$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

19. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(1)=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{f(x)}{\eta\mu x}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)\eta\mu x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

20. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(1)=f(0)\sigma\upsilon\nu 1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{\eta\mu x}+\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)/\sigma\upsilon\nu x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

21. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,4)$ με $f(\alpha)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=(4-\xi)f'(\xi)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)(4-x)$ και εφαρμόστε το θεώρημα του Rolle.

22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ με $f(0)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $2f(\xi)=(a-\xi)f'(\xi)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)(\alpha-\xi)^2$ και εφαρμόστε το θεώρημα του Rolle.

23. Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) . Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)[g(\beta)-g(\xi)]=g'(\xi)[f(\xi)-f(\alpha)]$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=(f(x)-f(\alpha))(g(\beta)-g(x))$ και εφαρμόστε το θεώρημα του Rolle.

24. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$ με $f'(x)\neq 0$ στο $(1,2)$ και $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}+\xi\ln\xi=0$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)\ln x$ και εφαρμόστε το θεώρημα του Rolle.

25. Δίνεται η συνάρτηση f , που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f(2)-f(0)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi)=3-2\xi$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)+x^2-3x$ και εφαρμόστε το θεώρημα του Rolle.

26. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(0)=0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{2g'(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{g'(1-\xi)}{g(1-\xi)}$.

27. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)(1-\varepsilon\varphi\xi)=(1+\varepsilon\varphi\xi)g(\xi)$.

28. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-3)f(x)+\left(x^2-3x\right)f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,3)$.

29. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και ισχύει $f(2)-f(1)=3-\ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $x_0 f'(x_0)=2x_0^2-1$.

30. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=f'(2-\xi)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(1)}=1$. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=2x_0 f^2(x_0)$.

32. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη το $(0,1)$ και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αν $f(0)=\ln 2$ και $f(1)=\ln(e+1)$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=2x_0\left(1-e^{-f(x_0)}\right)$.

33. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0>0$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0)=2-\frac{f(x_0)}{x_0}$.

34. Έστω η συνάρτηση $f:[3,4]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[3,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,4)$ με $3f(3)=2f(4)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)\cdot(\xi-1)=f(\xi)$.

35. Δίνεται συνάρτηση g, παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, με g' συνεχής στο $[0,1]$ και $g(1)=g(0)+\frac{1}{2}$, $g'(0)>0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=\xi$

(β) Υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\rho)=2\rho$

36. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $h>0$ υπάρχει $\theta\in(0,1)$, ώστε $f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x+\theta h)$.

Μέθοδος 5

Στις ασκήσεις που ζητείται να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ που ικανοποιεί μια σχέση της μορφής $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$ (1), τότε:

- Αντικαθιστούμε όπου ξ το x.
- Βρίσκουμε την αρχική $G(x)$ της $g(x)$ ($G'(x)=g(x)$)
- Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με $e^{G(x)}$, οπότε: $e^{G(x)}f'(x)+e^{G(x)}G'(x)f(x)=0\Rightarrow\left(e^{G(x)}f(x)\right)'=0$.
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $[-3,3]$, παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ και $f(-3)=f(3)=e^9$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-3,3)$, ώστε να ισχύει η σχέση $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

Λύση

Θέτοντας όπου ξ το x, έχουμε: $f'(x)-2xf(x)=0$ (1)

Η αρχική της $-2x$ είναι η $-x^2$, οπότε πολλαπλασιάζουμε την (1) με e^{-x^2} και είναι:

$$e^{-x^2} f'(x)-2xe^{-x^2} f(x)=0 \Rightarrow \left(e^{-x^2} f(x)\right)'=0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^{-x^2} f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[-3,3]$ ως πράξη συνεχών, παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ με $h'(x)=e^{-x^2} f'(x)-2xe^{-x^2} f(x)$ και $h(3)=h(-3)=1$. Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (-3,3)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{-\xi^2} f'(\xi)-2\xi e^{-\xi^2} f(\xi)=0 \overset{e^{-\xi^2}\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=2\xi f(\xi)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\sigma\phi\xi$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}\eta\mu x$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[0,\pi]$. Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $h'(x)=f'(x)e^{f(x)}\eta\mu x+e^{f(x)}\sigma\upsilon\nu x$
- $h(0)=e^{f(0)}\eta\mu 0=0$ και $h(\pi)=e^{f(\pi)}\eta\mu\pi=0$ δηλαδή $h(0)=h(\pi)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{f(\xi)} f'(\xi)\eta\mu\xi+e^{f(\xi)}\sigma\upsilon\nu\xi=0 \Leftrightarrow f'(\xi)\eta\mu\xi+\sigma\upsilon\nu\xi=0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)\eta\mu\xi=-\sigma\upsilon\nu\xi \overset{\xi\in(0,\pi)\Rightarrow\eta\mu\xi\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=-\frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu\xi} \Leftrightarrow f'(\xi)=-\sigma\phi\xi$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ (1). Αν $f(\alpha)=f(\beta)=0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Λύση

Για $x=\alpha$, από την (1) έπεται:

$$f'(\alpha)g(\alpha)\neq f(\alpha)g'(\alpha)\Rightarrow f'(\alpha)g(\alpha)\neq 0\Rightarrow g(\alpha)\neq 0.$$

Για $x=\beta$, από την (1) έπεται :

$$f'(\beta)g(\beta)\neq f(\beta)g'(\beta)\Rightarrow f'(\beta)g(\beta)\neq 0\Rightarrow g(\beta)\neq 0$$

Υποθέτουμε ότι είναι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $h(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=0$ και $h(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}=0$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$$

Άτοπο γιατί για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$.

Επομένως θα υπάρχει $\kappa\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\kappa)=0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\kappa\in(\alpha,\beta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^{\lambda x}}$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$$h'(x)=\frac{f'(x)e^{\lambda x}-f(x)e^{\lambda x}\lambda}{\left(e^{\lambda x}\right)^2}=\frac{f'(x)-\lambda f(x)}{e^{\lambda x}}$$

- $h(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{e^{\lambda\alpha}}=0$ και $h(\beta)=\frac{f(\beta)}{e^{\lambda\beta}}=0$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)-\lambda f(\xi)}{e^{\lambda\xi}}=0\Leftrightarrow f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\lambda f(\xi)$$

Ασκήσεις

37. Η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=\frac{1}{e}$ και $f(1)=e^2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3f(\xi)$.
Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)/e^{3x}$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

38. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=e^{\kappa}$ και $f(1)=1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\kappa f(\xi)$.
Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)/e^{-kx}$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

39. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$.
Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)/e^{-f(x)}$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

40. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=f(x)/e^x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

41. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\varepsilon\phi\xi$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}\sigma\upsilon\nu x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle.

42. Αν η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης g τέμνει τη γραφική παράσταση της $f(x)=e^x$ σε δύο σημεία, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $g'(\xi)=g(\xi)$.

43. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(-\alpha)=f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

44. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύει $f(0)=1$ και $f(2)=\frac{1}{e^8}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=-3\xi^2\cdot f(\xi)$.

Μέθοδος 6 (Εύρεση της αρχικής μέσω της σχέσης $F(\alpha)=F(\beta)$)

Σε ασκήσεις που μας δίνεται ότι ισχύει μια δοσμένη σχέση μπορούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό να καταλήξουμε στην σχέση $F(\alpha)=F(\beta)$, οπότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την F στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$ να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.

(β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $h(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ και $h(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$ (επειδή $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)\Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$).

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)=f(\xi)$$

(β) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ έπεται ότι ορίζεται η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ η οποία έχει εξίσωση:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \quad (1).$$

Για το $x=0$ και $y=0$ η (1) γίνεται $-f(\xi)=-f'(\xi)\xi \Rightarrow \xi f'(\xi)=f(\xi)$ που ισχύει. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ασκήσεις

45. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμες στο (α,β) και $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Αν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

46. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha^{f(\beta)}=\beta^{f(\alpha)}$ με $1<\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi\cdot f'(\xi)\cdot\ln\xi$.

47. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g(x)=e^x f(x)$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\alpha-\beta=\ln(f(\beta))-\ln(f(\alpha))$, να δείξετε ότι :

(α) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$.

(α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $B(1,\xi f(\xi))$.

(γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και είναι $g''(\xi)=0$, τότε είναι $f'(\xi)=-f''(\xi)$.

48. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμες στο (α,β) . Αν ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $\ln\left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\right]=g(\beta)-g(\alpha)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

49. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει ότι $e^{f(\alpha)-f(\beta)}=\frac{\beta}{\alpha}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f'(x)+1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

50. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ και $f(\beta)\ln\alpha=f(\alpha)\ln\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi^2 f'(\xi)$.

51. Έστω ότι ισχύει η σχέση $\beta \cdot \eta\mu\alpha = \alpha \cdot \eta\mu\beta$ με $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon\varphi\xi = \xi$.

52. Αν η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} = e^{\alpha-\beta}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = f'(\xi)$.

53. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους για τις οποίες ισχύει $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $g(x)=0$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μέθοδος 7 (Εύρεση ρίζας για την $f''(x)=0$)

Όταν μας ζητείται η ύπαρξη μιας ρίζας της $f''(x)=0$ σε ένα διάστημα (α,β), τότε:

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την f σε δύο κατάλληλα υποδιαστήματα του (α,β) οπότε εξασφαλίζουμε δύο τουλάχιστον ρίζες της $g'(x)=0$, έστω $\xi_1<\xi_2$.
- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την g' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ οπότε εξασφαλίζουμε την ρίζα της $g''(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $f(1)-f(2)=-\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 2$ και $f(2)-f(e)=\frac{5-e^3+3\ln 2}{6}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοια, ώστε $2f''(\xi)=2\xi-\frac{1}{\xi^2}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=2f(x)-\frac{1}{3}x^3-\ln x$.

Η g είναι συνεχής στα διαστήμα $[1,2]$ και $[2,e]$ ως άθροισμα συνεχών.
Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,e)$ με $g'(x)=2f'(x)-x^2-\frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} g(1)=2f(1)-\frac{1}{3} \\ g(2)=2f(2)-\frac{8}{3}-\ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(1)=g(2) \Leftrightarrow f(1)-f(2)=-\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 2$$

Ισχύει.

$$\left.\begin{array}{l} g(e)=2f(e)-\frac{1}{3}e^3-1 \\ g(2)=2f(2)-\frac{8}{3}-\ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(e)=g(2) \Leftrightarrow f(2)-f(e)=\frac{5-e^3+3\ln 2}{6}$$

Ισχύει.
Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον από ένα $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (2,e)$ τέτοια ώστε: $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

Η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2] \subseteq [1,e]$ ως άθροισμα συνεχών.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\xi_2) \subseteq (1,e)$ με $g''(x)=2f''(x)-2x+\frac{1}{x^2}$

$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

Οπότε υπάρχει ένα $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$g''(\xi)=0 \Leftrightarrow 2f''(\xi)=2\xi-\frac{1}{\xi^2}$$

Ασκήσεις

54. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)-1=f(e)=1+f(e^2)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,e^2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=\frac{1}{\xi^2}$.

55. Αν η εξίσωση $3\alpha x^4+4(\alpha-2)x^3+6(\alpha-2)x^2+x+1=0$ έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες να δειχθεί ότι $-1<\alpha<2$.

56. Αν η εξίσωση $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+x+2=0$ έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες να δειχθεί ότι $3\beta^2>8\alpha\gamma$.

57. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(3)=9$, $f(-3)=-9$ και $f(0)=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3,3)$.

58. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η καμπύλη $y=f(x)$ δέχεται δύο παράλληλες εφαπτόμενες να δειχθεί ότι η καμπύλη $y=f'(x)$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

Μέθοδος 8 (Ύπαρξη μοναδικής ρίζας)

- Με την βοήθεια του τύπου της εξίσωσης θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.
- Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ_1 στο διάστημα αυτό. Εάν δεν προκύπτει κάποια ρίζα από το θεώρημα του Bolzano εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στην αρχική της f, έτσι εξασφαλίζουμε στο (α,β) μία τουλάχιστον ρίζα. Εάν η ρίζα της εξίσωσης είναι προφανής δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε το Θ.Bolzano
- Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει άλλη ρίζα ρ_2 στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.
- Εφαρμόζουμε το Θ.Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+2x=10$ (1) έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (e,e^3).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+2x-10$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[e,e^3]$. Για την f ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[e,e^3]$.

- $f(e) = 2e - 9 < 0$
- $f(e^3) = 3e^3 - 7 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(e)=2e-9<0 \\ f(e^3)=3e^3-7>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(e)f(e^3)<0$$

Από το Θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (e, e^3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο (e, e^3) μία τουλάχιστον ρίζα την ξ.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο διάστημα (e, e^3) και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, την ρ και π.χ. $\rho < \xi$. Τότε :

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho, \xi] \subset (e, e^3)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ, ξ) με $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$.
- $f(\rho) = f(\xi) = 0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (\rho, \xi)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\kappa} + 2\kappa = 0$ άτοπο γιατί $\kappa \in (\rho, \xi) \subset (e, e^3)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2x = 10$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (e, e^3) τον αριθμό ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x + 2x = \frac{1}{2}$ έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + 2x - \frac{1}{2}$ η οποία ορίζεται στο $(0,1)$.

Τότε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \eta\mu 1 + \frac{3}{2}$
- $f(0)f(1) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $(0,1)$ μία τουλάχιστον ρίζα.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο διάστημα $(0,1)$ και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, την ρ και π.χ. $\rho<\xi$. Τότε :

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho,\xi]\subset(0,1)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ,ξ) με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+2$.
- $f(\rho)=f(\xi)=0$.

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(\rho,\xi)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\kappa+2=0$ άτοπο.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x+2x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\eta\mu x+2x=\frac{1}{2}$ έχει στο διάστημα $(0,1)$ μοναδική ρίζα τον αριθμό ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+4x+a=0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+4x+a$ με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

1ος τρόπος:

Η εξίσωση $f(x)=0$ είναι πολυωνυμικού περιττού βαθμού και επομένως έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος:

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+4x+a)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. Επομένως υπάρχει $\kappa>0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+4x+a)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$. Επομένως υπάρχει $\lambda<0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)<0$.

Για την f ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[\lambda,\kappa]$
- $f(\lambda)f(\kappa)<0$.

  Από το θεώρημα του Bolzano ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\lambda,\kappa)\subset\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, την ρ και π.χ. $\rho<\xi$. Τότε :

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho,\xi]\subset\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ,ξ) με $f'(x)=3x^2+4$.
- $f(\rho)=f(\xi)=0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(\rho,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=0\Rightarrow 3\kappa^2+4=0$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+4x+a=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τον αριθμό ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-9x^2+24x=1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2+24x-1$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[0,2]$. Τότε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$
- $f(0)=-1$, $f(2)=19$
- $f(0)f(2)<0$

Από το Θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $(0,2)$ μία τουλάχιστον ρίζα.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο διάστημα $(0,2)$ και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, την ρ και π.χ. $\rho<\xi$. Τότε :

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho,\xi]\subset(0,2)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ,ξ) με $f'(x)=3x^2-18x+24$.
- $f(\rho)=f(\xi)=0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(\rho,\xi)\subset(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=0\Rightarrow 3\kappa^2-18\kappa+24=0\Leftrightarrow \kappa^2-6\kappa+8=0\Leftrightarrow \kappa=4$ ή $\kappa=2$ άτοπο γιατί το κ είναι εσωτερικό σημείο του $(0,2)$. Επομένως η εξίσωση : $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-9x^2+24x-1=0\Leftrightarrow x^3-9x^2+24x=1$ έχει στο $(0,2)$ μοναδική ρίζα τον αριθμό ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22

Να δείξετε ότι η εξίσωση $a^x = \lambda x + \beta$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα όταν είναι $0 < a < 1$ και $\lambda > 0$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = a^x - \lambda x - \beta$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(a^x - \lambda x - \beta\right) = +\infty$. Επομένως υπάρχει $\kappa < 0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) > 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(a^x - \lambda x - \beta\right) = -\infty$. Επομένως υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mu) < 0$.

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\kappa, \mu]$
- $f(\kappa) f(\mu) < 0$.

Από το Θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa, \mu)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$ που σημαίνει ότι ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, την ρ και π.χ. $\rho < \xi$. Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho, \xi]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ, ξ) με $f'(x) = a^x \ln a - \lambda$.
- $f(\rho) = f(\xi) = 0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho, \xi)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1) = 0 \Rightarrow a^{\xi_1} \ln a - \lambda = 0 \Leftrightarrow a^{\xi_1} \ln a = \lambda$$

άτοπο γιατί είναι $\lambda > 0$ και $a^{\xi_1} \ln a < 0$ $\left(0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0\right)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow a^x - \lambda x - \beta = 0 \Leftrightarrow a^x = \lambda x + \beta$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τον αριθμό ξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23

Έστω μια συνάρτηση f τέτοια, ώστε $f''(x)\neq 2+\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in[1,e]$ και $f(1)=1, f(e)=e^2-1$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(1,e)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=2\xi-\frac{1}{\xi}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2+\ln x$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,e)$

$$\left.\begin{aligned} g(1)&=f(1)-1=0\\ g(e)&=f(e)-e^2+1=0\end{aligned}\right\} g(1)=g(e)$$

Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi-\frac{1}{\xi}$$

Έστω ότι υπάρχουν δύο ρίζες της $g'(x)=0$, τις $\xi<\xi'\in(1,e)$.

Η g' είναι συνεχής στο $[\xi,\xi']$ ως άθροισμα συνεχών.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ξ,ξ') με $g''(x)=f''(x)-2x+\frac{1}{x^2}$

$g'(\xi)=g'(\xi')=0$

Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi,\xi')$ τέτοιο ώστε:

$$g''(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=2+\frac{1}{x_0^2} \text{ άτοπο.}$$

Άρα το $\xi\in(1,e)$ είναι μοναδική ρίζα της $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi-\frac{1}{\xi}$.

Ασκήσεις

59. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν στο διάστημα Δ μοναδική ρίζα όταν:

(α) $x^3+4x+2=0$ και $\Delta=(-3,0)$

(β) $\sigma\upsilon\nu x=x$ και $\Delta=(0,\pi)$

(γ) $e^{-x}-x-2=0$ και $\Delta=(-1,0)$

(δ) $x^3-9x^2+24x-1=0$ και $\Delta=(0,2)$

(ε) $\ln 3x + e^{x} - 2 = 0$ και $\Delta = (0, +\infty)$

(ζ) $x\varepsilon\phi x = -1$ και $\Delta = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

60. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

(α) $\alpha x^{3} + 2x + \beta = 0 \quad \alpha > 0$.

(β) $e^{x} + x^{3} - 2 = 0$.

(γ) $\alpha^{x} = \lambda x + \beta \quad , \alpha > 1,\ \lambda < 0$.

(δ) $\ln\left(x^{2} + 1\right) + 3x = 2$.

61. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, συνεχής στο $[0,1]$. Αν ισχύει $1 < f(x) < \sqrt{2}$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f'(x) \neq 5$ για κάθε $x \in (0,1)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα μόνο $\rho \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 5\rho - 2$.

62. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{3} - \alpha x^{2} + \left(\alpha^{2} + 1\right)x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

63. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^{x} + 1 = e^{x}$ έχει μοναδική ρίζα.

64. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^{x} + 3^{x} = 5^{x}$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

65. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f''(x) \neq e^{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) - f(1) = 2 - e$. Να δείξετε ότι η $C_{f'}$ και $C_{g'}$ όπου $g(x) = e^{x} - x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

66. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) - f(1) = -e$ και $f''(x) \neq e^{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $f'(x_0) = e^{x_0} + 1$.

Μέθοδος 9 (Ύπαρξη μοναδικών ριζών)

- Με το Θεώρημα Bolzano ή το Θεώρημα Rolle δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ν ρίζες. (Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις παραπάνω μεθόδους)
- Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει $\nu+1$ ρίζες.
- Καταλήγουμε σε άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+3x^2-x+a=0$, $a<0$ έχει δύο μόνο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+3x^2-x+a$ με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Είναι $f(0)=a<0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+3x^2-x+a\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$. Επομένως υπάρχει $\lambda<0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)>0$.

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\lambda,0]$
- $f(\lambda)f(0)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\lambda,0)\subset\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$ που σημαίνει ότι ο ξ_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+3x^2-x+a\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$. Επομένως υπάρχει $\kappa>0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)<0$.

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\kappa]$
- $f(0)f(\kappa)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(0,\kappa)\subset\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=0$ που σημαίνει ότι ο ξ_2 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ τρεις ρίζες, τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2).
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\kappa_1) = 0$.

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3).
- $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε: $f'(\kappa_2) = 0$.

Είναι $f'(x) = 4x^3 + 6x - 1$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\kappa_1, \kappa_2]$ και παραγωγίσιμη στο (κ_1, κ_2) με $f''(x) = 12x^2 + 6$. Ισχύει $f'(\kappa_1) = f'(\kappa_2) = 0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa_1, \kappa_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0 \Rightarrow 12\kappa^2 + 6 = 0$ άτοπο. Επομένως, η συνάρτηση f έχει στο $\mathbb{R}$ δύο μόνο ρίζες, τις ξ_1, ξ_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 9x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in A$ είναι $f'(x) = 12x^3 + 3x^2 + 10x - 9$.

1ος τρόπος:

Για την f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
- $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$ δηλαδή $f(0) = f(1)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2^{ος} τρόπος:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $f'(0)=-9$, $f'(1)=16$
- $f'(0)f'(1)<0$

Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, δηλαδή ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο $(0,1)$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει στο διάστημα $(0,1)$ και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, την ρ και π.χ. $\rho<\xi$. Τότε για την f' έχουμε :

- Η f' είναι συνεχής στο $[\rho,\xi]$.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ρ,ξ) με $f''(x)=36x^2+6x+10$.
- $f'(\rho)=f'(\xi)=0$.

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(\rho,\xi)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\kappa)=0\Rightarrow 36\kappa^2+6\kappa+10=0$ άτοπο γιατί ο $\kappa\in(\rho,\xi)\subset(0,1)$.

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει στο διάστημα $(0,1)$ μοναδική ρίζα τον αριθμό ξ.

Ασκήσεις

67. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο μόνο ρίζες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

68. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο μόνο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(α) $\sigma\upsilon\nu x=x^2$.

(β) $x^4+x^3+2x^2-3\alpha x+\beta=0 \quad \beta<0$

Μέθοδος 10 (Ύπαρξη ν το πολύ ριζών)

- Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει $(\kappa+1)$ ρίζες στο Δ, τις $\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_\kappa<\rho_{\kappa+1}$.
- Κατόπιν εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση f στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],\ldots,[\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1}]$
- Καταλήγουμε κάποια στιγμή σε άτοπο.

Τονίζουμε ότι:
Αν η συνάρτηση f είναι ν φορές παραγωγίσιμη στο Δ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει κ ρίζες στο Δ, τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον $(\kappa-1)$ ρίζες στο Δ, η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον $(\kappa-2)$ ρίζες στο Δ κ.τ.λ. Τα παραπάνω αποδεικνύονται εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)\neq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$. Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.
Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι f' είναι παραγωγίσιμη και συνεπώς είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για την f' έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2)
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\kappa)=0$ άτοπο γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)\neq 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ και είναι $3\beta^2<8\alpha^2\gamma^2$ να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha^2x^4+\beta x^3+\gamma^2x^2+2x+1=0$$

δεν έχει τέσσερις ρίζες άνισες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^2x^4+\beta x^3+\gamma^2x^2+2x+1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=4\alpha^2x^3+3\beta x^2+2\gamma^2x+2$$

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 4 ρίζες, τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ και $[\rho_3,\rho_4]$. Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ και $\xi_3\in(\rho_3,\rho_4)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$f''(x)=12\alpha^2x^2+6\beta x+2\gamma^2$$

Η συνάρτηση f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$ και $[\xi_2,\xi_3]$. Επομένως υπάρχουν $\kappa_1\in(\xi_1,\xi_2)$ και $\kappa_2\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοια ώστε $f''(\kappa_1)=f''(\kappa_2)=0$. Δηλαδή η εξίσωση $f''(x)=0$ που είναι δεύτερου βαθμού έχει 2 ρίζες άνισες $\kappa_1<\kappa_2$. Επομένως, πρέπει:

$\Delta>0\Rightarrow 36\beta^2-4\cdot12\alpha^2\cdot2\gamma^2>0\Leftrightarrow 3\beta^2-8\alpha^2\gamma^2>0\Leftrightarrow 3\beta^2>8\alpha^2\gamma^2$ άτοπο, γιατί $3\beta^2<8\alpha^2\gamma^2$.

Άρα η εξίσωση $\alpha^2x^4+\beta x^3+\gamma^2x^2+2x+1=0$ δεν μπορεί να έχει 4 ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$ υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Λύση

Έστω α,β $(\alpha<\beta)$ δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$. Τότε είναι $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες στο (α,β), τις $\rho_1<\rho_2$. Για την συνάρτηση f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2)
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ άτοπο γιατί για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x) \neq 0$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο (α, β).

Ασκήσεις

69. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες.

70. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $3\alpha^2 < 8\beta$ δεν μπορεί να έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες.

71. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 - x - 1 = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες.

72. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - \alpha x^3 + \alpha x^2 + x - 1 = 0$ με $0 < \alpha < 2$ έχει δύο το πολύ ρίζες.

73. Αν η παράγωγος $f'(x)$ της συνάρτησης f έχει μοναδική ρίζα να δειχθεί ότι η $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

74. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta = 0$ με $\alpha > 4$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$. Ομοίως για την εξίσωση $x^3 - 3x + \lambda = 0$.

75. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\nu} + \alpha x + \beta = 0$ $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

76. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες άνισες.

77. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x e^x = e$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο πραγματικές τιμές.

78. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x)-e^{f(x)}-f(x)=x^3+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια το πολύ ρίζα.

79. Δίνεται μια συνάρτηση f με $e^x f''(x)\neq x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{x}{e^x}$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

80. Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2f(x)=x^2$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Μέθοδος 11 (Rolle-εφαπτομένη)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 29

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3+\left(\frac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$ όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

Λύση

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f. Για τη συνάρτηση f έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
- $f(0)=\delta$ και $f(1)=\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\delta+\gamma-\delta+\delta=\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma+\delta=\delta$ δηλαδή $f(0)=f(1)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Η ευθεία (ε) που εφάπτεται στην C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi)$ και επειδή $f'(\xi)=0$ έπεται ότι $\varepsilon//x'x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30

(α) Να λύσετε την εξίσωση $2x+\sigma\upsilon\nu x=1$.

(β) Αν $f(x)=x^2+\eta\mu x+5$ **να δείξετε ότι η ευθεία** $(\varepsilon): y=x+5$ **εφάπτεται στη** C_f.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x-1$ με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι $h(0)=2\cdot 0+\sigma\upsilon\nu 0-1=0$. Άρα ο αριθμός 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ και άλλη ρίζα εκτός του 0, τη ρ και π.χ. $\rho>0$. Για την h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[0,\rho]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ με $h'(x)=2-\eta\mu x$
- $h(0)=0=h(\rho)$.

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\rho)$ τέτοιο ώστε: $h'(\xi)=0\Rightarrow 2-\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow \eta\mu\xi=2$ άτοπο. Ομοίως αν υποθέσουμε ότι $\rho<0$.

Άρα η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow 2x+\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow 2x+\sigma\upsilon\nu x=1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ τον αριθμό 0.

(β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f. Για να εφάπτεται η ευθεία $(\varepsilon): y=x+5$ στη C_f πρέπει να υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ τέτοιο ώστε το σύστημα:

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{c} f'(\xi)=1 \\ f(\xi)=\xi+5 \end{array}\right\}$$

για να είναι συμβιβαστό. Είναι:

$$\Sigma=\left\{\begin{array}{c} 2\xi+\sigma\upsilon\nu\xi=1 \\ \xi^2+\eta\mu\xi+5=\xi+5 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} 2\xi+\sigma\upsilon\nu\xi=1 \\ \xi^2+\eta\mu\xi=\xi \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} \xi=0 \\ \xi^2+\eta\mu\xi=\xi \end{array}\right\}\Rightarrow\xi=0$$

Επομένως η ευθεία $(\varepsilon): y=x+5$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $\mathrm{A}=(0, f(0)=5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*, \nu \geq 2$. Να δείξετε ότι οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f έχει με αυτήν ένα μόνο κοινό σημείο.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in A$ είναι $f'(x)=2\nu \cdot x^{2\nu-1}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f. Έστω (ε) η εφαπτομένη στης C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$. Η (ε) έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned} & y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y-\xi^{2\nu}=2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}(x-\xi) \Leftrightarrow \\ & y-\xi^{2\nu}=2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}x-2\nu \cdot \xi^{2\nu} \Leftrightarrow y=2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}x+\xi^{2\nu}-2\nu \cdot \xi^{2\nu} \end{aligned} \quad (1)$$

Θα βρούμε τα κοινά σημεία της C_f και της (ε).

$$f(x)=y \Rightarrow x^{2\nu}-2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}x-\xi^{2\nu}-2\nu \cdot \xi^{2\nu}=0 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^{2\nu}-2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}x-\xi^{2\nu}-2\nu \cdot \xi^{2\nu}$ με πεδίο ορισμού το $A_h=\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(\xi)=0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ και άλλη ρίζα εκτός από την ξ, τη ρ και π.χ. $\rho<\xi$. Για την h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\rho, \xi]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (ρ, ξ) με $h'(x)=2\nu \cdot x^{2\nu-1}-2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}$
- $h(\rho)=0=h(\xi)$.

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (\rho, \xi)$ τέτοιο ώστε: $h'(\kappa)=0 \Rightarrow 2\nu \cdot \kappa^{2\nu-1}-2\nu \cdot \xi^{2\nu-1}=0 \Leftrightarrow \kappa^{2\nu-1}=\xi^{2\nu-1} \Rightarrow \kappa=\xi$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση (2) έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό ξ. επομένως η C_f και η ευθεία (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(\xi, f(\xi))$.

Ασκήσεις

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5-\beta^2x^3-\alpha^3x^2+\alpha^3\beta^2+4=0$ με $\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

82. Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $2f(1)=f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

83. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(-1)=f(1)=1$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο σημείο $M(\xi, f'(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x-3$.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6+3x^4+2x^2-8x-7$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους.

85. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[1,e]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ και $f(e)=0$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_h όπου $h(x)=f(x)\cdot\ln x$ με τετμημένη $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(β) Η εξίσωση $x\cdot f'(x)\cdot \ln x = -f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

86. Αν $\varepsilon: y=x$ είναι εφαπτόμενη της παραγωγίσημης συνάρτησης f στο $x=0$ και για την συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} ae^{f(x)}+\beta x, & x\le 0 \\ 2x=\eta\mu x+1, & x>0 \end{cases}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$, να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ, ώστε $f'(\xi)=-2e^{-f(\xi)}$.