Παράγωγος συνάρτησης

Η εύρεση της παραγώγου με τον ορισμό που δώσαμε δεν είναι πάντα εύκολη. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό).

Ορισμός

- Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και ονομάζουμε $\Delta_1\left(\Delta_1 \neq \varnothing\right)$ το σύνολο των σημείων του Δ στα οποία η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη. Αν σε κάθε $x_0 \in \Delta_1$ αντιστοιχούμε τον αριθμό $f'(x_0)$, τότε με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η οποία έχει πεδίο ορισμού το Δ_1 και ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή πιο απλά παράγωγος της f. Την παράγωγο της f τη συμβολίζουμε με f' ή $\dfrac{df(x)}{dx}$ ή $\dfrac{dy}{dx}$. Είναι φανερό ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού της Δ τότε και η f' θα έχει πεδίο ορισμού το Δ.
- Έστω $f':\Delta_1 \to \mathbb{R}$ η παράγωγος της $f:\Delta \to \mathbb{R}\left(\Delta_1 \subseteq \Delta\right)$. Αν η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in \Delta_1$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Η παράγωγος f' στο x_0 ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f''(x_0)$. Είναι φανερό ότι $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$.
- Αν $\Delta_2 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta$ είναι το ευρύτερο υποσύνολο του Δ στο οποίο η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και σε κάθε $x_0 \in \Delta_2$ αντιστοιχούμε τον αριθμό $f''(x_0)$, τότε με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια νέα συνάρτηση η

οποία έχει πεδίο ορισμού το Δ_2, ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται $f''(x)$ ή $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

- Όμοια ορίζονται και οι παράγωγοι 3ης, 4ης και γενικότερα ν-οστής τάξης και συμβολίζονται αντίστοιχα $f^{(3)}, f^{(4)}, ..., f^{(\nu)}$. Είναι φανερό ότι $f^{(3)} = (f'')', f^{(4)} = \left(f^{(3)}\right)', ..., f^{(\nu+1)} = \left(f^{(\nu)}\right)'$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων I

Αποδεικνύονται τα παρακάτω:

1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=0$.

$$\boxed{(c)'=0}$$

Απόδειξη

Έστω x_0 τυχαίο σημείο που ανήκει στο $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$$

2. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=1$.

$$\boxed{(x)'=1}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο με $x \neq x_0$ τότε,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{x-x_0}} = 1.$$

3. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=nx^{n-1}$.

$$\boxed{\left(x^n\right)'=nx^{n-1}}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Τότε για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\frac{\cancel{(x-x_0)}\left(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\ldots+x_0^{n-1}\right)}{\cancel{(x-x_0)}}=$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}\right)=x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1}=n\cdot x_0^{n-1}$$

Άρα $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$.

4. **Η συνάρτηση** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ **με** $f(x)=x^{-\nu},\nu\in\mathrm{N}^*$ **είναι παραγωγίσιμη και για κάθε** $x\in\mathbb{R}^*$ **ισχύει** $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$.

$$\boxed{\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}}$$

5. **Η συνάρτηση** $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **με** $f(x)=\sqrt{x}$ **είναι παραγωγίσιμη στο** $\mathrm{A}=(0,+\infty)$ **και για κάθε** $x\in\mathrm{A}$ **ισχύει** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο** $x_0=0$.

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Τότε για $x\neq x_0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{(x-x_0)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Άρα $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. **Η συνάρτηση** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **με** $f(x)=\eta\mu x$ **είναι παραγωγίσιμη και για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **ισχύει** $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

$$\boxed{(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x-x_0} = \frac{2\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \frac{\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Θέτω $\frac{x-x_0}{2} = h$

Τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2h+x_0+x_0}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}\cdot\sigma\upsilon\nu(h+x_0) = .$$

$$= 1\cdot\sigma\upsilon\nu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0$$

Άρα $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

* Υπενθυμίζουμε ότι $\eta\mu\mathrm{A} - \eta\mu\mathrm{B} = 2\eta\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$.

7. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$.

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x_0}{x-x_0}=\frac{-2\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}=$$

$$=-\frac{\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\eta\mu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Άρα

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\eta\mu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Θέτω $x-x_0=2h$ τότε:

$$\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\eta\mu h}{h}\cdot\eta\mu(h+x_0)\right)=-1\cdot\eta\mu x_0=-\eta\mu x_0 .$$

Άρα $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

* Υπενθυμίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}-\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}=-2\eta\mu\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\cdot\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$.

8. Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$.

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x-x_0}=\frac{\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{\frac{x-x_0}{x_0}\cdot x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)-1}.$$

Αλλά $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x-x_0}{x_0}\right)}{\left(1+\dfrac{x-x_0}{x_0}\right)-1}=1$. Άρα $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{x_0}$. Άρα $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

9. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=e^x$.

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

Απόδειξη

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίο σημείο. Τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}\cdot\frac{\dfrac{e^x}{e^{x_0}}-1}{x-x_0}=e^{x_0}\cdot\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=e^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}\ .$$

Το $\lim_{x\to x_0}\dfrac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}e^{x-x_0}=e^0=1$.

Άρα $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}$.

Άρα $(e^x)'=e^x$.

Παρατηρήσεις-Σχόλια

Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f με $f(x)=x^a, a\in\mathbb{R}$ εξαρτάται από το a. Συγκεκριμένα είναι το :

1. $A=\mathbb{R}$ όταν $a\in\mathbb{N}^*$ $(\pi.\chi.\ x^3,x^8)$
2. $A=\mathbb{R}^*$ όταν $a\in\mathbb{Z}_-$ $(\pi.\chi.\ x^{-3},x^{-4})$
3. $A=\mathbb{R}_+$ όταν $a>0$ και $a\notin\mathbb{N}^*$ $\left(\pi.\chi.\ x^{\frac{3}{2}},x^{\frac{5}{6}}\right)$
4. $A=\mathbb{R}_+^*$ όταν $a<0$ και $a\notin\mathbb{Z}$ $\left(\pi.\chi.\ x^{-\frac{3}{2}},x^{-\frac{5}{6}}\right)$

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^a, a\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού της (εκτός από το 0 όταν $0<\alpha<1$) και η παράγωγός της είναι η συνάρτηση $f'(x)=ax^{a-1}$.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$$

Κανόνες παραγώγισης

Με τις παρακάτω προτάσεις έχουμε τη δυνατότητα να βρίσκουμε την παράγωγο συναρτήσεων που προκύπτουν από τις απλές βασικές συναρτήσεις με τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της σύνθεσης.

Πρόταση 1 (παράγωγος αθροίσματος)
Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in\Delta$ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 άρα :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άρα $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Υποσημείωση

- Γενικότερα

  $(f_1+f_2+\ldots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_k'(x),\quad k\in\mathbb{N}^*$ και $f_1,f_2,\ldots,f_k$ παραγωγίσιμες στο $x\in\Delta$.

- Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $(f-g)' = f' - g'$.

Πρόταση 2 (παράγωγος γινομένου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

όμως επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς στο x_0 έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Άρα $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

- Ανάλογος τύπος ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Πρόταση 3

$$\left[\left(a \cdot f(x)\right)\right]' = a \cdot f'(x) \text{ όπου } a \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη

$$\frac{a \cdot f(x) - a \cdot f(x_0)}{x - x_0} = a \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Τότε $\lim_{x \to x_0} \dfrac{a \cdot f(x) - a \cdot f(x_0)}{x - x_0} = a \cdot \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \cdot f'(x_0)$

Άρα $\left(a\cdot f(x)\right)'=a\cdot f'(x)$.

Πρόταση 4 (παράγωγος πηλίκου)

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in\Delta$ και $g(x_0)\neq 0$ τό-τε ι συναρτήσεις $\frac{1}{g},\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύει:

1. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$

2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

Απόδειξη

1. $$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{g(x_0)-g(x)}{(x-x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)}=-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}.$$

Άρα $$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\right]=$$

$$=-g'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

Πρόταση 5

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και στο σημείο $x_0\in\Delta$ είναι $f'(x_0)\neq 0$, τότε υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $f(x_0)\in f(\Delta)$.

Πρόταση 6

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και συνάρτηση g είναι πα-ραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε και η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει :

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων ΙΙ

1. Η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\varepsilon\phi x$, όπου $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$, είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

$$\boxed{(\varepsilon\phi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι: $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$. Οπότε με τον κανόνα παραγώγισης του πηλίκου προκύπτει ότι:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

2. Η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sigma\phi x$, όπου $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}\}$, είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

$$\boxed{(\sigma\phi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι: $\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$. Οπότε με τον κανόνα παραγώγισης του πηλίκου προκύπτει ότι:

$$(\sigma\varphi x)'=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)'=\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x-(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{-\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

3. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$.

$$\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}}$$

Απόδειξη

- Για $x>0$ έχουμε ότι: $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$.
- Για $x<0$ έχουμε ότι: $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln(-x)\right)'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$ (Από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης)

4. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=a^x, 0<a\neq 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=a^x\ln a$.

$$\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\ln a}$$

Απόδειξη

Από τον κανόνα παραγώγισης της σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}\left(x\ln a\right)'=a^x\ln a$$

Τέλος αναφέρουμε ότι κάθε **πολυωνυμική** και **ρητή** συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο το πεδίου ορισμού της.

Παράγωγοι	
Βασικών Συναρτήσεων	Σύνθετων Συναρτήσεων
$(c)'=0$	
$(x)'=1$	
$\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}, \nu\in\mathbb{N}^*$	$\left(f(x)^\nu\right)'=\nu f(x)^{\nu-1}\cdot f'(x)$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f(x))'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}, x>0$	$(\ln f(x))'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x), f(x)>0$
$\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}, x\neq 0$	$\left(\ln|f(x)|\right)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x), f(x)\neq 0$

$(\varepsilon\phi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\varepsilon\phi f(x))' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(\sigma\phi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$(\sigma\phi f(x))' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$(x^a)' = ax^{a-1}, a \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}^*$	$(f(x)^a)' = af(x)^{a-1} \cdot f'(x), a \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

Παρατηρήσεις

1. Αν ο τύπος της $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συναρτήσεων που όλες είναι παραγωγίσιμες στο Δ τότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ.
2. Όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ τότε υπάρχει ο αριθμός $f'(\xi)$ που είναι ίσος με το $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$.
   Επίσης, ο αριθμός $f'(\xi)$ είναι η τιμή της συνάρτησης f' για $x = \xi$. Επομένως, για να υπολογίσουμε το $f'(\xi)$ θα βρίσκουμε με τους κανόνες παραγώγισης τον τύπο της $f'(x)$ και θα θέτουμε σε αυτών όπου x το ξ.
3. Παράγωγος της $h(x) = \sqrt[\nu]{[f(x)]^\lambda}, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2, \lambda \in \mathbb{R}^*$
   Έστω Δ το πεδίο ορισμού της h και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ.
   Ο τύπος της h' βρίσκεται ως εξής:
   (α) Αν είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $h(x) = \sqrt[\nu]{[f(x)]^\lambda} = [f(x)]^{\lambda/\nu}$ και επομένως:
   $$h'(x) = \left[\sqrt[\nu]{[f(x)]^\lambda}\right]' = \left[[f(x)]^{\lambda/\nu}\right]' = \frac{\lambda}{\nu}[f(x)]^{\frac{\lambda}{\nu}-1} \cdot f'(x).$$
   (β) Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, τότε ισχύει $h(x) = \left[[f(x)]^\lambda\right]^{1/\nu}$ και επομένως:

$$h'(x)=\left[\sqrt[\nu]{\left[f(x)\right]^{\lambda}}\right]'=\left[\left[\left(f(x)\right)^{\lambda}\right]^{1/\nu}\right]'$$

$$=\frac{1}{\nu}\cdot\left[\left(f(x)\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\nu}-1}\cdot\left[\left(f(x)\right)^{\lambda}\right]'=\frac{1}{\nu}\cdot\left[\left(f(x)\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\nu}-1}\cdot\lambda\cdot f(x)^{\lambda-1}\cdot f'(x).$$

Κατόπιν θα χρησιμοποιούμε τον ορισμό για να εξετάσουμε αν η h είναι παραγωγίσιμη στους αριθμούς εκείνους του Δ που μηδενίζουν την f.

4. Παράγωγος της $h(x)=\log_{g(x)} f(x)$. Έστω Δ το πεδίο ορισμού της h και ότι η συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ. Τότε η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ο τύπος της παραγώγου της βρίσκεται με τους κανόνες παραγώγισης, αφού πρώτα μετατρέψουμε τον λογάριθμο σε νεπέριο. Επομένως:
$$h'(x)=\left(\log_{g(x)} f(x)\right)'=\left(\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}\right)'=\dots.$$
5. Παράγωγος της $h(x)=f(x)^{g(x)}$. Έστω Δ το πεδίο ορισμού της h και ότι f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ. Τότε η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ο τύπος της παραγώγου της h' βρίσκεται ως εξής: $h'(x)=\left[f(x)^{g(x)}\right]'=\left[e^{g(x)\ln f(x)}\right]'=\cdots.$
6. Αν ο τύπος της συνάρτησης f περιέχει απόλυτες τιμές, τότε τον απαλλάσσουμε από τα απόλυτα και η f γίνεται κλαδωτή. Με τους κανόνες παραγώγισης βρίσκουμε την παράγωγο του κάθε κλάδου και χρησιμοποιούμε τον ορισμό για να εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στους αριθμούς εκείνους που δεξιά και αριστερά τους η f αλλάζει τύπο.
7. Αν ο τύπος της f περιέχει δυνάμεις της μορφής $\left[g(x)\right]^{a}$ με $0<a<1$, τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό για να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη σε εκείνους τους αριθμούς που μηδενίζουν τη g.
8. Όταν η συνάρτηση f είναι ν φορές παραγωγίσιμη στο Δ, τότε οι συναρτήσεις $f, f', f'',\dots, f^{(\nu)}$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ (επομένως είναι και συνεχής στο Δ) και δεν γνωρίζουμε αν είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο Δ η συνάρτηση $f^{(\nu+1)}$.

9. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x)=g'(x)$.
10. Ο ορισμός την παραγώγου, στο εξής θα εφαρμόζεται μόνο για τις παρακάτω περιπτώσεις
    (α) Στα σημεία που μηδενίζεται το απόλυτο ή το υπόριζο
    (β) Στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της f
    (γ) Στα άκρα κλειστών διαστημάτων
    (δ) Όταν δεν αναφέρεται αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Εύρεση παραγώγου απλής συνάρτησης)
Χρησιμοποιούμε όλους τους κανόνες παραγώγισης απλών και σύνθετων συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:
(α) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x-1$
(β) $f(x)=\frac{x^3+2x+3}{x^2-6x+5}$
(γ) $f(x)=5\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu 8x+3e^x-4\ln x$
(δ) $f(x)=3^x-4^{x+2}+x^2\eta\mu x\cdot\ln x$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x \in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x-1\right)'=x^2-4x+5$$

Άρα $f'(x)=x^2-4x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{1,5\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x \in A$ είναι:

$$\left(f(x)\right)'=\left(\frac{x^3+2x+3}{x^2-6x+5}\right)'=\frac{\left(x^3+2x+3\right)'\left(x^2-6x+5\right)-\left(x^3+2x+3\right)\left(x^2-6x+5\right)'}{\left(x^2-6x+5\right)^2}=$$

$$\frac{\left(3x^2+2\right)\left(x^2-6x+5\right)-\left(x^3+2x+3\right)\left(2x-6\right)}{\left(x^2-6x+5\right)^2}=\frac{x^4-12x^3+13x^2-6x+28}{\left(x^2-6x+5\right)^2}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{x^4-12x^3+13x^2-6x+28}{\left(x^2-6x+5\right)^2}$ με $x\in\mathbb{R}-\{1,5\}$.

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(5\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu 8x+3e^x-4\ln x\right)'=\left(5\eta\mu 3x\right)'-\left(\sigma\upsilon\nu 8x\right)'+\left(3e^x\right)'-\left(4\ln x\right)'=$$

$$=5\sigma\upsilon\nu 3x\cdot(3x)'+\eta\mu 8x\cdot(8x)'+3e^x-4\frac{1}{x}=15\sigma\upsilon\nu 3x+8\eta\mu 8x+3e^x-\frac{4}{x}$$

Άρα $f'(x)=15\sigma\upsilon\nu 3x+8\eta\mu 8x+3e^x-\dfrac{4}{x}$

(δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$\left(f(x)\right)'=\left(3^x-4^{x+2}+x^2\eta\mu x\cdot\ln x\right)'=\left(3^x\right)'-\left(4^{x+2}\right)'+\left(x^2\eta\mu x\cdot\ln x\right)'=$$

$$=3^x\ln 3-4^{x+2}\ln 4(x+2)'+\left(x^2\right)'\eta\mu x\cdot\ln x+x^2\left(\eta\mu x\right)'\cdot\ln x+x^2\eta\mu x\cdot(\ln x)'=$$

$$=3^x\ln 3-4^{x+2}\ln 4+2x\eta\mu x\cdot\ln x+x^2\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+x^2\eta\mu x\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=3^x\ln 3-4^{x+2}\ln 4+2x\eta\mu x\cdot\ln x+x^2\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+x\eta\mu x$$

Άρα $f'(x)=3^x\ln 3-4^{x+2}\ln 4+2x\eta\mu x\cdot\ln x+x^2\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+x\eta\mu x$ με $x\in(0,+\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\left(\dfrac{x^2+2}{x^3-1}\right)^4$

(β) $f(x)=\ln^4\left(x^2+x+2\right)^3$

(γ) $f(x)=\eta\mu^5\left(x^2+3\right)^2$

(ε) $f(x)=e^{x^3+2x-1}$

(στ) $f(x)=\varepsilon\phi^3 x$

(ζ) $f(x)=\sigma\phi^4 x$

(δ) $f(x)=3\sigma\upsilon\nu^4(x+2)^3$	**(η)** $f(x)=e^{\eta\mu x+\frac{1}{x}}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{1\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left[\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}\right)^4\right]'=4\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}\right)^3\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}\right)'=$$

$$=4\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}\right)^3\frac{(x^2+2)'(x^3-1)-(x^2+2)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}=$$

$$=4\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}\right)^3\frac{2x(x^3-1)-3x^2(x^2+2)}{(x^3-1)^2}=$$

$$4\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}\right)^3\frac{-x(x^3+6x+2)}{(x^3-1)^2}=\frac{-4(x^2+2)^3(x^3+6x+2)}{(x^3-1)^5}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{-4(x^2+2)^3(x^3+6x+2)}{(x^3-1)^5}$ με $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(\ln^4(x^2+x+2)^3\right)'=4\ln^3(x^2+x+2)^3\frac{1}{(x^2+x+2)^3}\left((x^2+x+2)^3\right)'=$$

$$=4\ln^3(x^2+x+2)^3\frac{1}{(x^2+x+2)^3}3(x^2+x+2)^2(x^2+x+2)'=$$

$$=\frac{12\ln^3(x^2+x+2)^3(2x+1)}{(x^2+x+2)}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{12\ln^3(x^2+x+2)^3(2x+1)}{(x^2+x+2)}$ με $x\in\mathbb{R}$

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(\eta\mu^5\left(x^2+3\right)^2\right)'=5\eta\mu^4\left(x^2+3\right)^2\left[\eta\mu\left(x^2+3\right)^2\right]'=$$

$$=5\eta\mu^4\left(x^2+3\right)^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3\right)^2\left[\left(x^2+3\right)^2\right]'=$$

$$=5\eta\mu^4\left(x^2+3\right)^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3\right)^2 2\left(x^2+3\right)\left(x^2+3\right)'=$$

$$=5\eta\mu^4\left(x^2+3\right)^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3\right)^2 2\left(x^2+3\right)2x=$$

$$=20\eta\mu^4\left(x^2+3\right)^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+3\right)x$$

Άρα $f'(x)=20\eta\mu^4\left(x^2+3\right)^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+3\right)x$ με $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(3\sigma\upsilon\nu^4\left(x+2\right)^3\right)'=12\sigma\upsilon\nu^3\left(x+2\right)^3\left(\sigma\upsilon\nu\left(x+2\right)^3\right)'=$$

$$=12\sigma\upsilon\nu^3\left(x+2\right)^3(-\eta\mu\left(x+2\right)^3)\left(\left(x+2\right)^3\right)'=$$

$$=12\sigma\upsilon\nu^3\left(x+2\right)^3(-\eta\mu\left(x+2\right)^3)3\left(x+2\right)^2\left(x+2\right)'=$$

$$=-36\sigma\upsilon\nu^3\left(x+2\right)^3\eta\mu\left(x+2\right)^3\left(x+2\right)^2$$

Άρα $f'(x)=-36\sigma\upsilon\nu^3\left(x+2\right)^3\eta\mu\left(x+2\right)^3\left(x+2\right)^2$ με $x\in\mathbb{R}$.

(ε) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(e^{x^3+2x-1}\right)'=e^{x^3+2x-1}\left(x^3+2x-1\right)'=e^{x^3+2x-1}\left(3x^2+2\right)$$

Άρα $f'(x)=e^{x^3+2x-1}\left(3x^2+2\right)$ με $x\in\mathbb{R}$.

(στ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(\varepsilon\phi^3x\right)'=3\varepsilon\phi^2x\left(\varepsilon\phi x\right)'=3\varepsilon\phi^2x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{3\varepsilon\phi^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

Άρα $f'(x)=\frac{3\varepsilon\phi^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}$ με $x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$.

(ζ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sigma\phi^4 x\right)'=4\sigma\phi^3 x\left(\sigma\phi x\right)'=4\sigma\phi^3 x\left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)=\frac{-4\sigma\phi^3 x}{\eta\mu^2 x}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{3\varepsilon\phi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ με $x\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}\}$.

(η) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}^*$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(e^{\eta\mu x+\frac{1}{x}}\right)'=e^{\eta\mu x+\frac{1}{x}}\left(\eta\mu x+\frac{1}{x}\right)'=e^{\eta\mu x+\frac{1}{x}}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{x^2}\right)$$

Άρα $f'(x)=e^{\eta\mu x+\frac{1}{x}}\left(\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ με $x\in\mathbb{R}^*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=x^{x^2+3x}$

(β) $f(x)=(x-1)^{x+2}$

(γ) $f(x)=x^{\eta\mu x}$

(δ) $f(x)=\left(x^2+4\right)^{\sigma\upsilon\nu x}$

(ε) $f(x)=x^{\ln x}$

(στ) $f(x)=\left(x^2+3x+5\right)^{x^2+3}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^{x^2+3x}\right)'=\left(e^{\left(x^2+3x\right)\ln x}\right)'=e^{\left(x^2+3x\right)\ln x}\left(\left(x^2+3x\right)\ln x\right)'=$$

$$=e^{\left(x^2+3x\right)\ln x}\left(\left(x^2+3x\right)'\ln x+\left(x^2+3x\right)(\ln x)'\right)=$$

$$=e^{\left(x^2+3x\right)\ln x}\left((2x+3)\ln x+\left(x^2+3x\right)\frac{1}{x}\right)=$$

$$=x^{x^2+3x}\left[(2x+3)\ln x+x+3\right]$$

Άρα $f'(x)=x^{x^2+3x}\left[(2x+3)\ln x+x+3\right]$ με $x\in(0,+\infty)$.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=(1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left((x-1)^{x+2}\right)'=\left(e^{(x+2)\ln(x-1)}\right)'=e^{(x+2)\ln(x-1)}\left[(x+2)\ln(x-1)\right]'=$$
$$=e^{(x+2)\ln(x-1)}\left[(x+2)'\ln(x-1)+(x+2)\left(\ln(x-1)\right)'\right]=$$
$$=e^{(x+2)\ln(x-1)}\left[\ln(x-1)+(x+2)\frac{1}{x-1}\right]=(x-1)^{x+2}\left(\ln(x-1)+\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Άρα $f'(x)=(x-1)^{x+2}\left(\ln(x-1)+\frac{x+2}{x-1}\right)$ με $x\in(1,+\infty)$.

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\eta\mu x\ln x}\right)'=e^{\eta\mu x\ln x}(\eta\mu x\ln x)'=$$
$$=e^{\eta\mu x\ln x}\left((\eta\mu x)'\ln x+\eta\mu x(\ln x)'\right)=$$
$$=e^{\eta\mu x\ln x}\left(\sigma\upsilon\nu x\ln x+\eta\mu x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\eta\mu x}\left(\sigma\upsilon\nu x\ln x+\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

Άρα $f'(x)=x^{\eta\mu x}\left(\sigma\upsilon\nu x\ln x+\frac{\eta\mu x}{x}\right)$ με $x\in(0,+\infty)$.

(δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(\left(x^2+4\right)^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\left(e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)}\right)=e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)}\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right]'=$$
$$=e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)}\left[(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\ln\left(x^2+4\right)\right)'\right]=$$
$$=\left(x^2+4\right)^{\sigma\upsilon\nu x}\left[-\eta\mu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x^2+4}\left(x^2+4\right)'\right]=$$
$$=\left(x^2+4\right)^{\sigma\upsilon\nu x}\left[-\eta\mu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x^2+4}2x\right]=$$
$$=\left(x^2+4\right)^{\sigma\upsilon\nu x}\left[-\eta\mu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{2x}{x^2+4}\right]$$

Άρα $f'(x)=\left(x^2+4\right)^{\sigma\upsilon\nu x}\left[\eta\mu x\cdot\ln\left(x^2+4\right)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{2x}{x^2+4}\right]$ με $x\in\mathbb{R}$.

(ε) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\ln x}\right)'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)'=e^{\ln^2 x}\left(2\ln x\left(\ln x\right)'\right)=x^{\ln x}\frac{2\ln x}{x}$$

Άρα $f'(x)=x^{\ln x}\dfrac{2\ln x}{x}$ με $x\in(0,+\infty)$.

(στ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left[\left(x^2+3x+5\right)^{x^2+3}\right]'=\left[e^{\left(x^2+3\right)\ln\left(x^2+3x+5\right)}\right]'=$$

$$=e^{\left(x^2+3\right)\ln\left(x^2+3x+5\right)}\left[\left(x^2+3\right)\ln\left(x^2+3x+5\right)\right]'=$$

$$=e^{\left(x^2+3\right)\ln\left(x^2+3x+5\right)}\left[\left(x^2+3\right)'\ln\left(x^2+3x+5\right)+\left(x^2+3\right)\left(\ln\left(x^2+3x+5\right)\right)'\right]=$$

$$=e^{\left(x^2+3\right)\ln\left(x^2+3x+5\right)}\left[2x\ln\left(x^2+3x+5\right)+\left(x^2+3\right)\frac{1}{x^2+3x+5}\left(x^2+3x+5\right)'\right]=$$

$$=e^{\left(x^2+3\right)\ln\left(x^2+3x+5\right)}\left[2x\ln\left(x^2+3x+5\right)+\left(x^2+3\right)\frac{1}{x^2+3x+5}(2x+3)\right]=$$

$$=\left(x^2+3x+5\right)^{x^2+3}\left[2x\ln\left(x^2+3x+5\right)+\frac{\left(x^2+3\right)(2x+3)}{x^2+3x+5}\right]$$

Άρα $f'(x)=\left(x^2+3x+5\right)^{x^2+3}\left[2x\ln\left(x^2+3x+5\right)+\dfrac{\left(x^2+3\right)(2x+3)}{x^2+3x+5}\right]$ με $x\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με $f(x)=(x-2)\sqrt{4-x^2}$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[-2,2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-2,2)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left[(x-2)\sqrt{4-x^2}\right]'=$$
$$=(x-2)'\sqrt{4-x^2}+(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)'=$$
$$=\sqrt{4-x^2}+(x-2)\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2\right)'=$$
$$=\sqrt{4-x^2}+(x-2)\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)=$$
$$=\sqrt{4-x^2}-\frac{x(x-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

Χρησιμοποιούμε τον ορισμό για να εξετάσουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στους αριθμούς εκείνους του πεδίου ορισμού της που μηδενίζουν την υπόριζη ποσότητα.

Θα εξετάσουμε εάν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=-2$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{4-x^2}=0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=2$ με $f'(2)=0$.
- $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{4-x^2}}{x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(x+2)^2}}=$
$=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sqrt{\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)^2}}=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}=-4(+\infty)=-\infty$. Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_2=-2$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{4-x^2}} & x\in(-2,2)\\ 0 & x=2\end{cases}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\sqrt{3x^2-27}$

(β) $f(x)=\sqrt{x-1}$

(γ) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$

(δ) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=(-\infty,3]\cup[3,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{3x^2-27}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3x^2-27}}\left(3x^2-27\right)'=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2-27}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-27}}$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=3$ και $x_2=-3$

- $$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-27}}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-27}{(x-3)\sqrt{3x^2-27}}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x+3)}{\sqrt{3x^2-27}}=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{3x^2-27}}{x+3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -3}\frac{3x^2-27}{(x+3)\sqrt{3x^2-27}}=\lim_{x\to -3}\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x^2-27}}=-\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_2=-3$

Άρα $f'(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-27}}$ με $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[1,+\infty)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x-1)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

- $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ με $x\in(1,+\infty)$.

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=\mathbb{R}-\{1\}$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)'=\left(\left((x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left[(x-1)^2\right]^{\frac{1}{3}-1}\left[(x-1)^2\right]'=$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{4}{3}}2(x-1)=\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ με $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

(δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt[5]{x^2}\right)'=\left[\left(x^2\right)^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}\left(x^2\right)^{\frac{1}{5}-1}\left(x^2\right)'=\frac{1}{5}\left(x^2\right)^{-\frac{4}{5}}2x=\frac{2x}{5\sqrt[5]{x^8}}$$

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}=+\infty\,.$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα $f'(x)=\dfrac{2x}{5\sqrt[5]{x^8}}$ με $x\neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=x\sqrt{x}+3x-1$ **(β)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x-2}+4$ **(γ)** $f(x)=\sqrt{\ln x}-2x$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x}+3x-1\right)'=\left(x\sqrt{x}\right)'+(3x)'-(1)'=$$

$$=\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}+3=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}+3==\frac{3}{2}\sqrt{x}+3$$

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}+3x-1+1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}+3x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}+3\right)=3$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=3$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{x}+3 & x>0\\ 3 & x=0\end{cases}$

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[2,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(2,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x-2}+4\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'+\left(\sqrt{x-2}\right)'+(4)'=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}+\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)}{\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Άρα $f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ με $x\in(2,+\infty)$.

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{\ln x}-2x\right)'=\left(\sqrt{\ln x}\right)'-2(x)'=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}(\ln x)'-2=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}-2$$

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\ln x}-2x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x-1}-2\right)=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Άρα $f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}-2$ με $x\in(1,+\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\ln(\eta\mu x)-e^{x+3}\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right),\ \ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

(β) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)+\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left[\ln(\eta\mu x)-e^{x+3}\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\right]'=\left[\ln(\eta\mu x)\right]'-\left[e^{x+3}\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{\eta\mu x}(\eta\mu x)'-\left(e^{x+3}\right)'\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-e^{x+3}\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)'=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-e^{x+3}\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-e^{x+3}\left(3\sigma\upsilon\nu 3x+2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x\right)=$$

$$=\sigma\phi x-e^{x+3}\left(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu^2 x-3\sigma\upsilon\nu 3x-\eta\mu 2x\right)$$

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)+\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)\right]'=\left[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)\right]'+\left[\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)\right]'=$$

$$=\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x)'-\eta\mu(\eta\mu x)(\eta\mu x)'=-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu(\eta\mu x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(β) $f(x)=x^4e^{\sqrt{x}+1}+\eta\mu^3 x^5$

(γ) $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=[0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^4e^{\sqrt{x}+1}+\eta\mu^3x^5\right)'=\left(x^4e^{\sqrt{x}+1}\right)'+\left(\eta\mu^3x^5\right)'=$$

$$=4x^3e^{\sqrt{x}+1}+x^4e^{\sqrt{x}+1}\left(\sqrt{x}+1\right)'+3\eta\mu^2x^5\left(\eta\mu x^5\right)'=$$

$$=4x^3e^{\sqrt{x}+1}+x^4e^{\sqrt{x}+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\eta\mu^2x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x^5\cdot5x^4=$$

$$=4x^3e^{\sqrt{x}+1}+x^4e^{\sqrt{x}+1}\frac{\sqrt{x}}{2x}+15x^4\eta\mu^2x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x^5=$$

$$=x^3e^{\sqrt{x}+1}\left(4+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+15x^4\eta\mu^2x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x^5$$

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^4e^{\sqrt{x}+1}+\eta\mu^3x^5}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^3e^{\sqrt{x}+1}+\frac{\eta\mu x^5}{x}\eta\mu^2x^5\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(x^3e^{\sqrt{x}+1}+\frac{\eta\mu x^5}{x^5}x^4\eta\mu^2x^5\right)=0+1\cdot0=0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}x^3e^{\sqrt{x}+1}\left(4+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+15x^4\eta\mu^2x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x^5 & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f'(x)=\left[\left(x^2+x+1\right)^{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}\right]'=\left[e^{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\ln\left(x^2+x+1\right)}\right]'=$$

$$e^{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\ln\left(x^2+x+1\right)}\left[(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\ln\left(x^2+x+1\right)\right]'=$$

$$\left(x^2+x+1\right)^{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}\left[(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)'\ln\left(x^2+x+1\right)+(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)'\right]=$$

$$\left(x^2+x+1\right)^{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}\left[(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\right]\ln\left(x^2+x+1\right)+(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=3x^6-5x^3+3x^2-6x+7$

(β) $f(x)=3x^2+\dfrac{x}{x+1}-\ln x+2$

(γ) $f(x)=\left(x^2-x\right)(3x+2)-6x+4$

(δ) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}+2x-1$

(ε) $f(x)=\ln^2\left(x^2+2\right)^6-4x^3-2\eta\mu x$

(στ) $f(x)=e^x\eta\mu 3x-4x\ln x+1$

(ζ) $f(x)=\eta\mu^2\left(x^2+2x\right)^4-\ln^3(x+2)^6$

(η) $f(x)=e^{-2x}+3^{x^2+4}-x^{x^2+2}-\ln x$

(θ) $f(x)=\eta\mu^3\left(x^2+5x-1\right)^7-7\sigma\upsilon\nu x$

(ι) $f(x)=e^{\eta\mu x+3x^2}-x\ln x+5^{x-1}$

2. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\left(\dfrac{3x^2+2x-1}{5x-1}\right)^3+3\ln^2 x^3$

(β) $f(x)=e^{\frac{x}{x+2}}-3^x-\ln 4+\ln x$

(γ) $f(x)=x^{x+1}-\left(x^2+3\right)^{\eta\mu x}$

(δ) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}-4x(x+2)-4\eta\mu a$

(ε) $f(x)=\left(\dfrac{x}{\ln x^4}\right)^3-\varepsilon\varphi^3 x-5\sigma\varphi^4 x$

(στ) $f(x)=x^{\eta\mu x+2}+3^{\sigma\upsilon\nu x}-5x+2$

(ζ) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}+3\ln^3(x-2)-5x$

(η) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}+5x-8\eta\mu x$

(θ) $f(x)=\left(x^2+4\right)^{\eta\mu x}-2x\ln x-1$

(ι) $f(x)=e^{-3x+1}+2x^2-\ln\left(x^2+3\right)^2$

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\dfrac{e^{-3x}-1}{e^{-3x}+1}+2$

(β) $f(x)=x^2(\eta\mu 3x-\sigma\upsilon\nu 4x)^3$

(γ) $f(x)=e^{3x}\eta\mu x-3^x\ln x+2$

(δ) $f(x)=2\cdot 3^x-4^{x^2+4}-x^{x+3}-2$

4. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\ln(\ln x)-xe^{x^2+4}+\eta\mu 4x$

(β) $f(x)=\dfrac{\ln x+2}{3\ln x-1}$

(γ) $f(x)=3x-(x-2)^{\frac{5}{6}}$

(δ) $f(x)=\sqrt{\ln x}-3x^2+2x-x\ln x$

(ε) $f(x)=\sqrt{e^x+1}-3\sqrt[3]{(x-1)^2}$

(στ) $f(x)=x^{x^2+2}+\eta\mu x^x+2$

(ζ) $f(x)=\ln(\varepsilon\varphi x)-\ln(\sigma\varphi x), x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

(η) $f(x)=\sqrt{\eta\mu x}+\eta\mu\sqrt{x}-3^x, x\in(0,\pi)$

(θ) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+2}\right)-3\ln 4$

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=x\sqrt{x}-\eta\mu 3x+2$

(β) $f(x)=x^{\sqrt{x}}+3\eta\mu^2 x^4+1$

(γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}$

(δ) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$

(ε) $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)+\varepsilon\varphi(1+x^2), x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

(στ) $f(x)=\eta\mu x-x^2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-1$

Μέθοδος 2 (Εύρεση της παραγώγου κλαδωτής συνάρτησης)

Αν η συνάρτηση f είναι κλαδωτή, για να βρούμε την παραγωγό της εξετάζουμε με τον ορισμό αν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία εκείνα του πεδίου ορισμού της που δεξιά και αριστερά τους η f αλλάζει τύπο και κατόπιν με τους κανόνες παραγώγισης βρίσκουμε την f' στα ανοικτά διαστήματα στα οποία χωρίζεται το πεδίο ορισμού της από κάθε κλάδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} e^x-\eta\mu x & x\le 0\\ \eta\mu 3x-4^x & x>0\end{cases}$

(β) $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x<0\\ \dfrac{x-1}{x+1} & 0\le x<1\\ \ln x+3 & x\ge 1\end{cases}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(e^x-\eta\mu x\right)'=e^x-\sigma\upsilon\nu x.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$$f'(x)=\left(\eta\mu 3x-4^x\right)'=3\sigma\upsilon\nu 3x-4^x\ln 4.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu 3x-4^x\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x-\eta\mu x\right)=1$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ και επομένως όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} e^x-\sigma\upsilon\nu x & x<0 \\ 3\sigma\upsilon\nu 3x-4^x\ln 4 & x>0 \end{cases}$.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

  $f'(x)=(3x+2)'=3$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,1)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_3=(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_3$ είναι:

$$f'(x)=(\ln x+3)'=\frac{1}{x}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x+1}=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2)=2$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ και επομένως όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x+3)=3$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x+1}=0$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_1=1$ και επομένως όχι παραγωγίσιμη στο $x_1=1$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 3 & x<0 \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x} & x>1 \end{cases}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & x\le 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$ **(β)** $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ -x^2 & 0<x<2 \\ x^3+4x & x\ge 2 \end{cases}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

  $f'(x)=\left(x^3+1\right)'=3x^2$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

  $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3+1\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2\right)=0$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ και επομένως όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x<0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^2\right)'=2x$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,2)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$$f'(x)=\left(-x^2\right)'=-2x.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_3 = (2,+\infty)$ και για κάθε $x \in A_3$ είναι:

$$f'(x) = \left(x^3 + 4x\right)' = 3x^2 + 4.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^3 + 4x\right) = 16$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-x^2\right) = -4$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$ και επομένως όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x + 3) = 3$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x+1} = 0$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_2 = 2$ και επομένως όχι παραγωγίσιμη στο $x_2 = 2$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 1$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x) = 0$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -2x & 0 < x < 2 \\ 3x^2 + 4 & x > 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ **(β)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **(γ)** $f(x) = \sqrt{x}\cdot \eta\mu 2x$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1 = (-\infty, 0)$ και για κάθε $x \in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{-x}\right)'=(-x)^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=(x)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x<0\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x>0\end{cases}$

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=\mathbb{R}-\{0\}$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(x^2\right)^{-\frac{2}{3}}2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=+\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άρα $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$ με $x\neq 0$

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\cdot\eta\mu 2x\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'\eta\mu 2x+\sqrt{x}\left(\eta\mu 2x\right)'=\frac{\eta\mu 2x}{2\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\eta\mu 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)=0\cdot 1=0$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x}{2\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$

Ασκήσεις

6. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^3+\beta x+\gamma & x\le 1\\ \dfrac{\gamma x^2+1}{x} & x>1\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(2)=3$.

7. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta & x<0\\ \dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x^2}{\sigma\upsilon\nu x} & x\ge 0\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

8. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x-1} & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x^2}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0=0$

10. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (β) $f(x)=\sqrt[4]{x}$

(γ) $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ (δ) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$

(ε) $f(x)=\sqrt[4]{3-x}$ (ζ) $f(x)=\eta\mu x\cdot(x-2)^{\frac{4}{5}}$

(η) $f(x)=\sqrt[5]{(x-2)^4}$ (θ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^3}$

Μέθοδος 3 (Εύρεση της παραγώγου συνάρτησης που περιέχει απόλυτα)

Όταν ο τύπος της f περιέχει απόλυτες τιμές, για να βρούμε της f' μετατρέπουμε την f σε κλαδωτή και χρησιμοποιούμε την μέθοδο 1 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f όταν:

(α) $f(x)=x^2+|x^2-1|+2$ **(β)** $f(x)=x|x|-3x^2+2$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ 3 & x\in(-1,1)\end{cases}$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

  $f'(x)=(2x^2+1)'=4x$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(-1,1)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

  $f'(x)=(3)'=0$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=1$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}[2(x+1)]=4$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3-3}{x-1}=0$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_1=1$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_2=-1$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3-3}{x+1}=0$
- $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^2+1-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x+1}=-4$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_2=-1$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}4x & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ 0 & x\in(-1,1)\end{cases}$

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2+2 & x<0\\ -2x^2+2 & x>0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(-4x^2+2\right)'=-8x.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$$f'(x)=\left(-2x^2+2\right)'=-4x.$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2x^2+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-4x^2+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-4x)=0$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}-8x & x<0\\ -4x & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$. Να βρείτε, εφόσον υπάρχει το $f''(0)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & x<0\\ \dfrac{x}{1+x} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+x}=1$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & x<0\\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & x>0\\ 1 & x=0\end{cases}$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-(1+x)^2}{x(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x(x+2)}{x(1+x)^2}=-2$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{(1-x)^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-(1-x)^2}{x(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(2-x)}{x(1-x)^2}=2$

Άρα η f δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Επομένως δεν υπάρχει στο $f''(0)$.

Ασκήσεις

11. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=|x-1|,\ x\neq 1$

(β) $f(x)=\left|x^2-4\right|,\ x\neq \pm 2$

(γ) $f(x)=x|3x-5|,\ x\neq \dfrac{5}{3}$

12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=|x-1|+3x+2$

(β) $f(x)=x^2\left|x^4-x^2\right|$

13. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

(α) $f(x)=\ln|x-1|$

(β) $f(x)=x|x|+2$

Μέθοδος 4 (Εύρεση παραγώγων ανώτερης τάξης)

Για να βρούμε την ν-οστή παράγωγο μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε την $\nu-1$ παραγωγό της κ.ο.κ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\leq 1 \\ x^2+x-1 & x>1 \end{cases}$$

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα $f'(-2), f'(3), f'(1), f''(5), f''(-4), f''(1)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,1)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^2$. Άρα $f'(-2)=3(-2)^2=12$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$f'(x)=\left(x^2+x-1\right)'=2x+1$. Άρα $f'(3)=2\cdot 3+1=7$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-1-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=3$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=3$

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\le 1 \\ 2x+1 & x>1 \\ 3 & x=1 \end{cases}$

- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,1)$ δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A_1 και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$f''(x)=\left(3x^2\right)'=6x$. Άρα $f''(-4)=6(-4)=-24$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(1,+\infty)$ δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A_2 και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

$f''(x)=(2x+1)'=2$. Άρα $f''(5)=2$.

Θα εξετάσουμε αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, δηλαδή αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x^2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=6$

Άρα η f' δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, δηλαδή η f δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Άρα δεν υπάρχει το $f''(1)$.

Είναι $f'(x)=\begin{cases} 6x & x<1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\eta\mu x & x\le 0 \\ e^x+1 & x>0 \end{cases}$$

Να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right), f'(3), f''(0)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

  $f'(x)=\left(x^2-\eta\mu x\right)'=2x-\sigma\upsilon\nu x$.

  Άρα $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_2$ είναι:

  $f'(x)=\left(e^x+1\right)'=e^x$. Άρα $f'(3)=e^3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+1\right)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-\eta\mu x\right)=0$ έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^4\eta\mu\frac{1}{x} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$$

(Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$ γιατί για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $\left|x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq\left|x^3\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left|x^3\right|=0$ από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$)

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A_1$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^4\eta\mu\frac{1}{x}\right)'=\left(x^4\right)'\eta\mu\frac{1}{x}+x^4\left(\eta\mu\frac{1}{x}\right)'=4x^3\eta\mu\frac{1}{x}+x^4\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'=$$
$$4x^3\eta\mu\frac{1}{x}+x^4\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=4x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}4x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

- Θα εξετάσουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0-0=0$$

Επομένως η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f''(0)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\eta\mu x$. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $x^2f''(x)+\left(x^2+2\right)f(x)=2xf'(x)$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=(x\eta\mu x)'=(x)'\eta\mu x+x(\eta\mu x)'=\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x)=(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'=(\eta\mu x)'+(x)'\sigma\upsilon\nu x+x(\sigma\upsilon\nu x)'=$$
$$\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x=2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$$

Επομένως:

$$x^2(2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x)+(x^2+2)x\eta\mu x = 2x(\eta\mu x + x\cdot\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$
$$2x^2\sigma\upsilon\nu x - x^3\eta\mu x + x^3\eta\mu x + 2x\eta\mu x = 2x\eta\mu x + 2x^2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$
$$2x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x = 2x\eta\mu x + 2x^2\sigma\upsilon\nu x$$

που ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε $f(0)=-8,\ f'(1)=2,$ $f''(2)=4,\ f'''(1)=4$.

Λύση

Αν $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha\neq 0$ τότε:

- $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$
- $f''(x)=6\alpha x+2\beta$
- $f'''(x)=6\alpha$

Είναι:

$$\begin{Bmatrix} f(0)=-8 \\ f'(1)=2 \\ f''(2)=4 \\ f'''(1)=6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \delta=-8 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma=2 \\ 12\alpha+2\beta=4 \\ 6\alpha=6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \delta=-8 \\ \gamma=7 \\ \beta=-4 \\ \alpha=1 \end{Bmatrix}$$

Άρα $f(x)=x^3-4x^2+7x-8$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

(α) Έστω πολυώνυμο $f(x)$ **βαθμού** ν **με** $\nu\geq 2$. **Να δείξετε ότι ο** $(x-\rho)^2$ **είναι παράγοντας του πολυωνύμου** $f(x)$ **όταν και μόνο όταν είναι** $f(\rho)=f'(\rho)=0$.

(β) Αν το πολυώνυμο $f(x)=x^3-\alpha x+\beta$ **με** $\alpha,\beta>0$ **έχει παράγοντα το** $(x-\rho)^2$, **να δείξετε ότι** $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3=\left(\frac{\beta}{3}\right)^2$

Λύση

(α) Ευθύ

Αφού ο $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x)$ ισχύει $f(x)=(x-\rho)^2\Pi(x)$. Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\left[(x-\rho)^2\Pi(x)\right]'=2(x-\rho)\Pi(x)+(x-\rho)^2\Pi'(x)$$

Είναι $f(\rho)=(\rho-\rho)\Pi(\rho)=0$ και $f'(\rho)=2(\rho-\rho)\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\Pi'(\rho)=0$.

Αντίστροφο

- Επειδή $f(\rho)=0$ έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $g(x)$ βαθμού $(\nu-1)$ τέτοιο ώστε $f(x)=(x-\rho)g(x)$. Οπότε:
$$f'(x)=\left[(x-\rho)g(x)\right]'=g(x)+(x-\rho)g'(x)$$
- Επειδή $f'(\rho)=0\Leftrightarrow g(\rho)+(\rho-\rho)g'(x)=0\Leftrightarrow g(\rho)=0$ έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ βαθμού $(\nu-2)$ τέτοιο ώστε $g(x)=(x-\rho)\Pi(x)$.

Άρα $f(x)=(x-\rho)g(x)=(x-\rho)^2\Pi(x)$ που σημαίνει ότι ο $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x)$

(β) Επειδή ο $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x)$ βάσει του (α) ερωτήματος ισχύει $f(\rho)=f'(\rho)=0$ (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2-\alpha$. Επομένως:

$f'(\rho)=0\Rightarrow 3\rho^2-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=3\rho^2$

$f(\rho)=0\Rightarrow \rho^3-\alpha\rho+\beta=0\Leftrightarrow \rho^3-3\rho^3+\beta=0\Leftrightarrow \rho^3=\dfrac{\beta}{2}$

Οπότε $\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^3=\left(\dfrac{\beta}{3}\right)^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Να βρείτε τον τύπο της πολυωνυμικής συνάρτησης f που ικανοποιεί τη σχέση $\left[f'(x)\right]^2=f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Αν η πολυωνυμική συνάρτηση f είναι βαθμού ν, τότε η πολυωνυμική συνάρτηση f' θα είναι βαθμού ν-1 και η $\left[f'(x)\right]^2$ θα είναι βαθμού $2(\nu-1)$. Επομένως από τη σχέση (1) έπεται ότι: $2(\nu-1)=\nu\Leftrightarrow \nu=2$.

Άρα η συνάρτηση f είναι δευτέρου βαθμού και έστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ ο τύπος της. Η (1) γίνεται:

$$\left[\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'\right]^2=\alpha x^2+\beta x+\gamma \Leftrightarrow \left(2\alpha x+\beta\right)^2=\alpha x^2+\beta x+\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\left(2\alpha x+\beta\right)^2=\alpha x^2+\beta x+\gamma \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}4\alpha^2=\alpha\\4\alpha\beta=\beta\\\beta^2=\gamma\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha=\dfrac{1}{4}\\\beta=\beta\\\beta^2=\gamma\end{array}\right\}$$

Άρα $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\beta x+\beta^2, \beta\in\mathbb{R}$

Ασκήσεις

14. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, όταν:

(α) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3+3x^2+2 & x<1\\ x^4+5x & x\geq 1\end{cases}$

(β) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x+1 & x<1\\ 2\sqrt{x}+x^2 & x\geq 1\end{cases}$

15. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f\left(x\right)=\begin{cases}-2\sqrt{x^2+3} & x\leq 1\\ x^2-3x+5 & x>1\end{cases}$ (γ) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3-x^2+x & x\leq 0\\ 2x\sqrt{x}+\eta\mu x & x>0\end{cases}$

(β) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+\eta\mu 3x & x\leq 0\\ x^2+3x & x>0\end{cases}$ (δ) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+\eta\mu 2x & x\leq 0\\ x^2+\eta\mu 3x & x>0\end{cases}$

16. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1} & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$ (γ) $f\left(x\right)=e^x+x\ln x+4x-1$

(β) $f\left(x\right)=\begin{cases}\eta\mu^2 x & x\geq 0\\ x^3 & x<0\end{cases}$

17. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της g όταν:

(α) $g(x)=3^{f(x)+1}$

(β) $g(x)=f(\eta\mu x)+2x-1$

(γ) $g(x)=\left[1+f(x)\right]^4$

18. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x)=f\left(2x^2-3\right)$, να βρείτε το $g'(1)$

19. Αν η συνάρτηση g είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

(β) $f(x)=g(x-1)+g\left(e^x+2\right)-3x^2$

(γ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(g(x)\right)^3$

(δ) $f(x)=e^{g(x)}+8x$

20. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=xe^{x^2}$. Να δείξετε ότι: $f^{(3)}(x)-6f'(x)-2xf''(x)=0$.

21. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x\cdot\eta\mu(\ln x)$. Να δείξετε ότι: $x^2f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0$

22. Να βρείτε πολυώνυμο τετάρτου βαθμού τέτοιο ώστε να είναι $f(0)=-1$, $f(-1)=-3$, $f'(0)=2$, $f'(0)=2$, $f''(1)=18$, $f^{(3)}(1)=30$.

23. Να βρείτε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $P(x)-P'(x)=3x^2+4x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

24. (α) Αν $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\nu\geq 2$, να δείξετε ότι: $f(x)=(x-\rho)^2\Pi(x)\Leftrightarrow f(\rho)=f'(\rho)=0$

(β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x)=\alpha x^{\nu+2}-\beta x^{\nu+1}+2$.

25. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και περιττή, να δείξετε ότι $f(0)=f''(0)=0$.

Μέθοδος 5 (Εύρεση παραγώγου από δοσμένη σχέση)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=g(x-1)-g(\eta\mu x)$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\left[g(x-1)-g(\eta\mu x)\right]' \Leftrightarrow f'(x)=g'(x-1)(x-1)'-g'(\eta\mu x)(\eta\mu x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=g'(x-1)-g'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x$$

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\left[f'(x)\right]'=\left[g'(x-1)-g'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x\right]' \Leftrightarrow f''(x)=g''(x-1)-\left[g'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x\right]' \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=g''(x-1)-g''(\eta\mu x)(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-g'(\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=g''(x-1)-g''(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu^2 x+g'(\eta\mu x)\eta\mu x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22

Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(-1)=0, g'(-1)=2$. Να βρείτε την $f'(0)$ όταν $f(x)=g^3(x-1)+g(2x-1)$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\left[f(x)\right]'=\left[g^3(x-1)+g(2x-1)\right]' \Leftrightarrow f'(x)=\left[g^3(x-1)\right]'+\left[g(2x-1)\right]' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=3g^2(x-1)g'(x-1)(x-1)'+g'(2x-1)(2x-1)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=3g^2(x-1)g'(x-1)+2g'(2x-1)$$

Επομένως για $x=0$: $f'(0)=3g^2(-1)g'(-1)+2g'(-1)=3\cdot 0\cdot 2+2\cdot 2=4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(e^{x-2}\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi x)+x$ (1). Να υπολογίσετε τα $f'(1), f''(1)$.

Λύση

Για $x=2$ από την σχέση (1) έχουμε: $f\left(e^{0}\right)=\sigma\upsilon\nu(2\pi)+2 \Leftrightarrow f(1)=2$

Από την (1) έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[f\left(e^{x-2}\right)\right]'=\left[\sigma\upsilon\nu(\pi x)+x\right]' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^{x-2}\right)\left(e^{x-2}\right)'=\left[\sigma\upsilon\nu(\pi x)\right]'+(x)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^{x-2}\right)e^{x-2}=-\pi\cdot\eta\mu(\pi x)+1 \quad (2)$$

Για $x=2$ από την σχέση (2) έχουμε: $f'\left(e^{0}\right)e^{0}=-\pi\cdot\eta\mu(0)+1 \Leftrightarrow f'(1)=1$

Από την (2) έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[f'\left(e^{x-2}\right)e^{x-2}\right]'=\left[-\pi\cdot\eta\mu(\pi x)+1\right]' \Leftrightarrow$$

$$f''\left(e^{x-2}\right)e^{x-2}+f'\left(e^{x-2}\right)\left(e^{x-2}\right)'=-\pi^{2}\sigma\upsilon\nu(\pi x) \Leftrightarrow$$

$$f''\left(e^{x-2}\right)e^{x-2}+f'\left(e^{x-2}\right)e^{x-2}=-\pi^{2}\sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad (3)$$

Για $x=2$ από την σχέση (2) έχουμε: $f''(1)+f'(1)=-\pi^{2}\sigma\upsilon\nu(\pi) \Leftrightarrow$ $f''(1)=-\pi^{2}-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x\sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)=f(x)e^{x+1}$ (1). Να βρείτε το $f'(0)$.

Λύση

Για $x=0$ η (1) γίνεται: $0\sigma\upsilon\nu\left(f(0)\right)=f(0)e^{0+1} \Leftrightarrow 0=f(0)e \Leftrightarrow f(0)=0$

Από την (1) έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[x\sigma\upsilon\nu\left(f\left(x\right)\right)\right]' = \left[f\left(x\right)e^{x+1}\right]' \Leftrightarrow$$

$$\left(x\right)'\sigma\upsilon\nu\left(f\left(x\right)\right) + x\left[\sigma\upsilon\nu\left(f\left(x\right)\right)\right]' = f'\left(x\right)e^{x+1} + f\left(x\right)\left(e^{x+1}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(f\left(x\right)\right) - x\eta\mu\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right) = f'\left(x\right)e^{x+1} + f\left(x\right)e^{x+1} \quad (2)$$

Για $x = 0$, η (2) γίνεται:

$$\sigma\upsilon\nu\left(f\left(0\right)\right) - 0\eta\mu\left(f\left(0\right)\right)f'\left(0\right) = f'\left(0\right)e^{0+1} + f\left(0\right)e^{0+1} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 0 = f'\left(0\right)e + f\left(0\right)e \Leftrightarrow f'\left(0\right)e = 1 \Leftrightarrow f'\left(0\right) = \frac{1}{e}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(2x+1\right) - f\left(3x-2\right) = \eta\mu\left(\pi x\right)$ (1). Να δείξετε ότι $f''\left(7\right) = \pi$.

Λύση

Από τη σχέση (1) έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[f\left(2x+1\right) - f\left(3x-2\right)\right]' = \left[\eta\mu\left(\pi x\right)\right]' \Leftrightarrow \left[f\left(2x+1\right)\right]' - \left[f\left(3x-2\right)\right]' = \left[\eta\mu\left(\pi x\right)\right]' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(2x+1\right)\left(2x+1\right)' - f'\left(3x-2\right)\left(3x-2\right)' = \sigma\upsilon\nu\left(\pi x\right)\left(\pi x\right)' \Leftrightarrow$$

$$2f'\left(2x+1\right) - 2f'\left(3x-2\right) = \pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi x\right) \quad (2)$$

Για $x = 3$, η (2) γίνεται:

$$2f'\left(7\right) - 2f'\left(7\right) = \pi\sigma\upsilon\nu\left(7x\right) \Leftrightarrow -f'\left(7\right) = -\pi \Leftrightarrow f'\left(7\right) = \pi$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f'\left(x\right) = f\left(\frac{3}{x}\right)$ (1). Να δείξετε ότι:

(α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

(β) Ισχύει $x^2 f''\left(x\right) + 3f\left(x\right) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f\left(\frac{3}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\frac{3}{x}$ και $f\left(x\right)$. Επομένως από τη σχέση (1) έπεται ότι και η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

(β) Από τη σχέση (1) έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$\left[f'(x)\right]' = \left[f\left(\frac{3}{x}\right)\right]' \Leftrightarrow f''(x) = f'\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{3}{x}\right)' \Leftrightarrow f''(x) = f'\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + \frac{3}{x^2} f'\left(\frac{3}{x}\right) = 0 \ (2)$$

Αν θέσουμε στην (1) όπου x το $\frac{3}{x}$ έχουμε: $f'\left(\frac{3}{x}\right) = f(x)$

Επομένως η (2) γίνεται: $x^2 f''(x) + 3f(x) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27

Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\eta\mu x) = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x$ (1). Να δείξετε ότι $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Λύση

Από την σχέση (1) έπεται ότι για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\left[f(\eta\mu x)\right]' = \left(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x\right)' \Rightarrow f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x + \eta\mu x \ (2)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2) έχουμε ότι για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\left[f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x\right]' = \left(\eta\mu 2x + \eta\mu x\right)' \Rightarrow$$

$$\left[f'(\eta\mu x)\right]'\sigma\upsilon\nu x + f'(\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu 2x)' + (\eta\mu x)' \Rightarrow$$

$$f''(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu^2 x - f'(\eta\mu x)\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x \ (3)$$

Για $x = \frac{\pi}{4}$ η (3) γίνεται:

$$f''\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}-f'\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\frac{\pi}{4}=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=2\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in\mathbb{R}$ και ισχύουν οι $g(x_0)\neq 0$ και $g'(x_0)\neq 0$. Αν $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ με $h'(x_0)=0$, να δείξετε ότι $h(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Λύση

$$h'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}=0\Rightarrow f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0)g(x_0)=f(x_0)g'(x_0)\Rightarrow\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\Rightarrow h(x)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 29

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=(x-1)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $x_0=1$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι συνεχής και στο $x_0=1$. Άρα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

- Θα εξετάσουμε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Είναι:

  $$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

  Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=f(1)$ έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ με $g'(1)=f(1)$.

- Με $x \neq 1$ έχουμε $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-1}$

  Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $\xi \neq 1$, τότε η f θα είναι παραγωγίσιμη και αυτή στο ξ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο ξ. Άτοπο, γιατί η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $x_0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή.

(β) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.

Λύση

(α) Επειδή η f είναι άρτια, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(-x)=f(x)$ (1)

Η συνάρτηση $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $-x$ και $f(x)$. Επομένως, από την (1) έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[f(-x)\right]'=f'(x)\Rightarrow f'(-x)(-x)'=f'(x)\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f' είναι περιττή.

(β) Επειδή η f είναι περιττή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(-x)=-f(x)$ (2)

Η συνάρτηση $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $-x$ και $f(x)$. Επομένως, από την (2) έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[f(-x)\right]'=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)(-x)'=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f' είναι άρτια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 31

Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=g(\eta\mu x)+\eta\mu(g(x))+8x$, να δείξετε ότι $f'(0)=8$.

Λύση

Επειδή η g είναι άρτια και παραγωγίσιμη έπεται ότι η συνάρτηση g' είναι περιττή (Βλέπε παράδειγμα 28). Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $g'(-x)=-g'(x)$ (1).

Για $x=0$, η (1) γίνεται: $g'(0)=-g'(0)\Rightarrow g'(0)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\left[g(\eta\mu x)+\eta\mu(g(x))+8x\right]'=$$
$$\left[g(\eta\mu x)\right]'+\left[\eta\mu(g(x))\right]'+(8x)'=$$
$$=g'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu(g(x))g'(x)+8$$

Επομένως:

$$f'(0)=g'(\eta\mu 0)\sigma\upsilon\nu 0+\sigma\upsilon\nu(g(0))g'(0)+8=$$
$$=g'(0)+g'(0)+8\Rightarrow f'(0)=8$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 32

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιοδική και παραγωγίσιμη να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι περιοδική.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι περιοδική θα υπάρχει $T\in\mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $f(x+T)=f(x)$ (1).

Η συνάρτηση $f(x+T)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επειδή είναι σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x+T$ και $f(x)$. Επομένως από την (1) έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left[f(x+T)\right]'=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)(x+T)'=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f' είναι περιοδική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x)=\left(\frac{x^6}{6}+6\right)f(x)+3x$, να δείξετε ότι $g'(0)=3$.

Λύση

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x)=\left[\left(\frac{x^6}{6}+6\right)f(x)+3x\right]'=x^5 f(x)+\left(\frac{x^6}{6}+6\right)f'(x)+3$$

Άρα: $g'(0)=6f'(0)+3$ (1).

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη, η συνάρτηση f' είναι περιττή (Βλέπε παράδειγμα 28). Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f'(-x)=-f'(x)$ (2).

Για $x=0$, η (2) γίνεται: $f'(0)=-f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=0$.

Επομένως, η (1) γίνεται: $g'(0)=6\cdot 0+3=3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=4x+f^3(x)$ (1), να δείξετε ότι:

(α) $f'(0)=0$ **(β)** $f''(0)=4$ **(γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$

Λύση

(α) Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f'(0)=4\cdot 0+f^2(0)=0$.

(β) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\left[f'(x)\right]'=\left[4x+f^3(x)\right]'\Leftrightarrow f''(x)=4+3f^2(x)f'(x)$$

Άρα για $x=0$ έχουμε ότι: $f''(0)=4+3f^2(0)f'(0)\Rightarrow f''(0)=4$.

(γ) Είναι $f'(0)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση f' είναι συνεχής. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-\sqrt{x+2}}{x}=0$ (1), να δείξετε ότι $f''(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Λύση

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι συνεχής και στο $x_0=0$.
Άρα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$ (2).

Αν $h(x)=\dfrac{f'(x)-\sqrt{x+2}}{x}$ με $A_h=[-2,0)\cup(0,+\infty]$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$ και $f'(x)=xh(x)+\sqrt{x+2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left[xh(x)+\sqrt{x+2}\right]=0\cdot 0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\sqrt{2}\overset{(1)}{\Rightarrow}f'(0)=\sqrt{2}$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[h(x)+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[h(x)+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}=\lim_{x\to 1}\left[h(x)-1\right]=0+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Επομένως η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f''(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση f' είναι συνεχής. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)+x+1}{x-1}=8$ (1), να δείξετε ότι $f''(1)=7$.

Λύση

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι συνεχής και στο $x_0=1$.
Άρα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=f'(1)$ (1).

Αν $h(x)=\frac{f'(x)+x+1}{x-1}$ με $A_h=\mathbb{R}-\{1\}$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=8$ και $f'(x)=h(x)(x-1)-x-1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left[h(x)(x-1)-x-1\right]=8\cdot 0-2=-2$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=-2\overset{(1)}{\Rightarrow}f'(1)=-2$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)(x-1)-x-1+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)(x-1)-x+1}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{h(x)(x-1)}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[h(x)-1\right]=8-1=7$$

Επομένως η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f''(1)=7$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 37

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\alpha_1\eta\mu x+\alpha_2\eta\mu 2x+\alpha_3\eta\mu 3x+\cdots+\alpha_\nu\eta\mu\nu x$$

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)|\le|\eta\mu 4x|$ (1), να δείξετε ότι:

$$|\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+\nu\alpha_\nu|\le 4 \quad \textbf{(2)}$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\alpha_1\sigma\upsilon\nu x+2\alpha_2\sigma\upsilon\nu 2x+3\alpha_3\sigma\upsilon\nu 3x+\cdots+\nu\alpha_\nu\sigma\upsilon\nu(\nu x)$$

Είναι $f'(0)=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+\nu\alpha_\nu$ και $f(0)=0$. Επομένως η σχέση (2) που θέλουμε να δείξουμε γίνεται $|f'(0)|\le 4$.

Για κάθε $x\ne 0$ η (1) γίνεται:

$$\frac{|f(x)|}{|x|}\le\frac{|\eta\mu 4x|}{|x|}\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{\eta\mu 4x}{x}\right| \quad (3)$$

Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=|f'(0)|$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}4\frac{\eta\mu 4x}{4x}=4\cdot 1=4$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\eta\mu 4x}{x}\right|=4$.

Από την (3) έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}\left|\frac{\eta\mu 4x}{x}\right| \Rightarrow |f'(0)| \le 4 \Leftrightarrow |\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + \nu\alpha_\nu| \le 4$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 38

Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = 1 + 2x + 3x + \cdots + \nu x^{\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

- Αν $x = 0$, τότε $\Sigma = 1$
- Αν $x = 1$, τότε $\Sigma = 1 + 2 + \cdots + \nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$
- Αν $x \ne 0$ και $x \ne 1$, τότε έχουμε:

$$\Sigma = 1+2x+3x+\cdots+\nu x^{\nu-1} = (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \cdots + (x^\nu)' = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^\nu)' =$$

$$= \left[\frac{x(x^\nu - 1)}{x-1}\right]' = \left[\frac{x^{\nu+1} - x}{x-1}\right]' = \frac{(x^{\nu+1}-x)(x-1) - (x-1)'(x^{\nu+1}-x)}{(x-1)^2} = \frac{\nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^\nu + 1}{(x-1)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 39

Αν $f(x) = e^{ax}$, **να δείξετε ότι** $f^{\nu}(x) = a^\nu e^{ax}$ **(1).**

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

- Θα δείξουμε ότι η (1) ισχύει για $\nu = 1$, δηλαδή ότι $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ (2). Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$$

- Δεχόμαστε ότι η (1) ισχύει για $\nu = \kappa$ δηλαδή δεχόμαστε ότι $f^{\kappa}(x) = a^\kappa e^{ax}$ (3).
- Θα δείξουμε ότι η (1) ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση $f^{\kappa+1}(x) = a^{\kappa+1}e^{ax}$

Η συνάρτηση $f^{(\kappa)}$ είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή η f είναι $(\kappa+1)$ φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^{(\kappa+1)}(x) = \left[f^{(\kappa)}(x)\right]' = (\alpha^\kappa e^{\alpha x})' = \alpha^{\kappa+1} e^{\alpha x}$$

Επομένως βάση της μαθηματικής επαγωγής ισχύει η σχέση (1).

Ασκήσεις

26. Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f'' είναι συνεχής στο $x_0=2$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f''(x)+5x+1}{x-2}=7$, να δείξετε ότι η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

27. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-3x+5}{x-1}=8$, να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f''(1)=11$.

28. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(xe^x\right)=e^x$, να δείξετε ότι $f'(e)=\dfrac{1}{2}$.

29. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 1$ και $f(\alpha x+\beta)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'\left(\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)=0$.

30. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(e^x+\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu 3x+e^x-\eta\mu x$, να δείξετε ότι $f'(2)=3$.

31. Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(x^3\right)=3x^4$, να βρείτε τον αριθμό $f''(8)$.

32. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f^2(x)+f(x)+1=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(1)=2$.

33. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και ισχύει $f^3(x)+f(x)+8=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(2)=12$.

34. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f(x+1) - f(2x-2) = 4\eta\mu\pi x + e^x$, να υπολογίσετε το $f''(4)$.

35. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $e^{f(x)} + x\sigma\upsilon\nu\left(f(x)+x\right) = 2 - e^x$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

36. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h(x) = x^2 g(x) + (2+\eta\mu x) f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

37. Για τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν και μόνο όταν είναι $g(x_0) = 0$.

38. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να είναι $f(0) = g(0) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) \cdot g(x) = \eta\mu 2x$.

39. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 4x + f^2(x)$, να δείξετε ότι:

(α) $f''(0) = 0$

(β) $f^{(3)}(0) = 4$

(γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(x)}{x} = 4$

40. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+xf'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=2f'(0)$.

41. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=4+f^2(x)$. Να δείξετε ότι:

(α) $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=2f(x)$

(β) $f''(0)=0$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

42. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$\Sigma_1=2x+4x^3+\cdots+2\nu\cdot x^{2\nu-1},\nu\in\mathbb{N}^*$

$\Sigma_2=e^x+2e^{2x}+\cdots+\nu e^{\nu x},\nu\in\mathbb{N}^*$

43. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη με $f(0)=1, f(1)=2$ και $f'(1)=3$. Αν $g(x)=\left(x^2+3x+1\right)f(x)+4x-2$, να βρείτε το $g'(0)$ και το $g'(-1)$.

44. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g τέτοιες, ώστε $e^{f(x^3)}=g(2x-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\dfrac{g'(1)}{f'(1)}=\dfrac{3}{2}g(1)$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+1\right)f(x)+x$. Αν η f είναι άρτια και παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι $g'(0)=1$.

46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\left(\frac{x^5}{5}-x\right)f(x)+x$. Αν η f είναι περιττή και $f'(1)=-1$, να δείξετε ότι $g'(-1)=\frac{1}{5}$.

47. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν δύο συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύουν $f(x)g(x)=e^{\eta\mu x}-1$ και $f(x)+g(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

48. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g με $f(x_0)=0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν για τη συνάρτηση $h(x)=e^{\frac{f(x)}{g(x)}}$ είναι $h'(x_0)=0$ να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

49. Δίνονται οι παραγωγίσιμες $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει $f(x)g(x)=e^{f(x)+g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}=f'(x)+g'(x)$.

50. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Αν για τη συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$, $x\in\Delta$ ισχύει ότι $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$, να δείξετε ότι $\left[f'(x)\right]^2>f(x)\cdot f''(x)$.

51. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x+y)+f(x-y)=4f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\frac{f''(x)}{f''(y)}=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

52. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x+\kappa \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0)=-\kappa=0$

(β) $f'(x)=f'(0)\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$