Κεφάλαιο: Συνέχεια Συνάρτησης

Θεώρημα Bolzano

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες που είναι χρήσιμες για τις εφαρμογές. Οι ιδιότητες αυτές εποπτικά είναι προφανείς οι αποδείξεις τους όμως γενικά είναι δύσκολες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

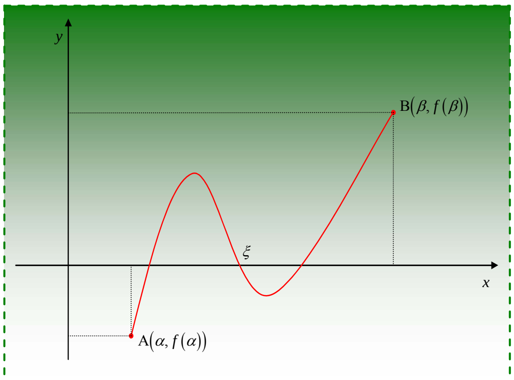
Αν μια συνάρτηση f

- **Είναι συνεχείς στο διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **και**
- $f(\alpha)f(\beta)<0$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο ώστε:** $f(\xi)=0$**, δηλαδή η εξίσωση** $f(x)=0$ **έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα** (α,β).

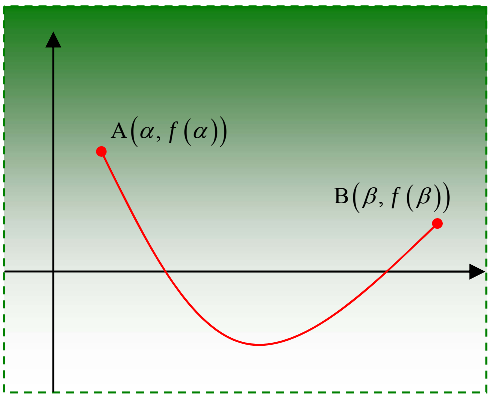
Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

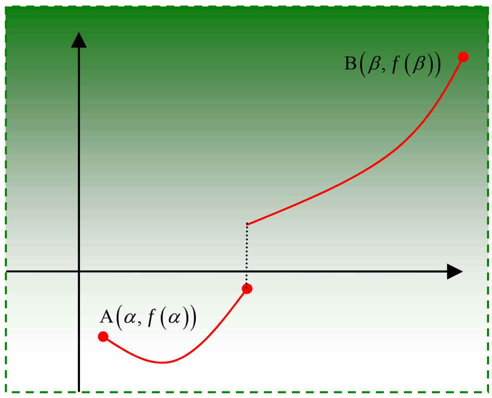


Παρατηρήσεις-Σχόλια

- Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες από μια ρίζες της, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.
- Το αντίστροφο του Θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει γενικά, δηλαδή:
  - Υπάρχει συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, με ρίζα στο (α,β), χωρίς όμως να ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$. (Σχήμα 1)
  - Υπάρχει συνάρτηση f που δεν έχει ρίζα στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. (Σχήμα 2)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Εύρεση μίας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης)

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $A(x)=B(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$ και αποδεικνύουμε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x+1=4\eta\mu x$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=4\eta\mu x-x-1$ η οποία ορίζεται στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} f(0)=-1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3-\frac{\pi}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3+\frac{\pi}{2}<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0\Leftrightarrow 4\eta\mu\xi-\xi-1=0\Leftrightarrow 4\eta\mu\xi=\xi+1$$

Άρα ο αριθμός $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x+1=4\eta\mu x$.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+x=2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-2$ η οποία ορίζεται στο $[1,e]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(e)=e-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(1)\cdot f(e)=-e+1<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0\Leftrightarrow \ln\xi+\xi-2=0\Leftrightarrow \ln\xi+\xi=2$$

Άρα ο αριθμός $\xi\in(1,e)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\ln x+x=2$.

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^2+2x=a, a\neq 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$ ομόσημη του a.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=ax^2+2x-a$ η οποία ορίζεται στο $[-1,1]$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: i) $\alpha<0$ ii) $\alpha>0$.

i) $\alpha<0$

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{cases} f(-1)=-2 \\ f(0)=-\alpha \end{cases}\right\} \Rightarrow f(-1)\cdot f(0)=2\alpha<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_1)=0 \Leftrightarrow a\xi_1^{\,2}+2\xi_1-a=0 \Leftrightarrow a\xi_1^{\,2}+2\xi_1=\alpha$$

Άρα ο αριθμός $\xi_1\in(-1,0)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2+2x=a$ και είναι ομόσημη του $\alpha<0$.

ii) $\alpha<0$

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{cases} f(1)=2 \\ f(0)=-\alpha \end{cases}\right\} \Rightarrow f(1)\cdot f(0)=-2\alpha<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_1)=0 \Leftrightarrow a\xi_1^{\,2}+2\xi_1-a=0 \Leftrightarrow a\xi_1^{\,2}+2\xi_1=\alpha$$

Άρα ο αριθμός $\xi_1\in(0,1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2+2x=a$ και είναι ομόσημη του $\alpha<0$.

Ασκήσεις

1. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & -2\le x<0 \\ -x^2+2 & 0\le x\le 2 \end{cases}$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει ρίζα της $f(x)=0$ στο $(-2,2)$.

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^7+8x=7$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$. Ομοίως για την εξίσωση $x^4-x^3+5x-1=0$.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^4+(a^2-1)x^2+(a-2)=a^2$ $a\neq 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\alpha^2-2)x^2+(\alpha-1)x-\alpha^2$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+ax=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$ όταν $0<a<e$.

6. Να δειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

7. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^2x-x+1$ τέμνει τον άξονα $x'x$.

8. Να αποδειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα οι εξισώσεις:
(α) $x^3-2x^2-5x+6=0$ στο $(-1,2)$
(β) $7x^4+(\alpha^2-3)x^2+(\alpha-2)^2x=\alpha^2+3$ στο $(0,1)$
(γ) $(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu^2x)=2\eta\mu^3x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Μέθοδος 2
Αν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποια από τα διαστήματα α,β τότε κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και εφαρμόζοντας την μέθοδο 1 καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Παράδειγμα 5
Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2+2}{x}+\frac{x^4+8}{x-1}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x^2+2)+x(x^4+8)$ η οποία ορίζεται στο $[0,1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

➢ $\left.\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(1)=9 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)=-18<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi-1)(\xi^2+2)+\xi(\xi^4+8)=0 \underset{\xi\neq 0}{\overset{\xi\neq 1}{\Leftrightarrow}} \frac{\xi^2+2}{\xi}+\frac{\xi^4+8}{\xi-1}=0$$

Άρα ο αριθμός $\xi \in (0,1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\frac{x^2+2}{x}+\frac{x^4+8}{x-1}=0$.

Παράδειγμα 7

Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x+1}=\frac{1}{x+1}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,0)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=(x+1)e^{x+1}-1$ η οποία ορίζεται στο $[-1,0]$.

➢ Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

➢ $\left.\begin{cases} f(0)=e-1 \\ f(-1)=-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(-1)=-e+1<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi+1)e^{\xi+1}-1=0 \Leftrightarrow (\xi+1)e^{\xi+1}=1 \overset{\xi\neq -1}{\Leftrightarrow} e^{\xi+1}=\frac{1}{\xi+1}$$

Άρα ο αριθμός $\xi \in (-1,0)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $e^{x+1}=\frac{1}{x+1}$.

Παράδειγμα 8

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi x=-x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\pi)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x$ η οποία ορίζεται στο $[0,\pi]$.

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου

➢ Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

➢ $\left.\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \\ f(\pi)=-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(\pi)=-\frac{\pi}{2}<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\subset(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi+\xi\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi=-\xi\eta\mu\xi \overset{\eta\mu\xi\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu\xi}=-1\Leftrightarrow \sigma\phi\xi=-1$$

Άρα ο αριθμός $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\subset(0,\pi)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\sigma\phi x=-x$.

Ασκήσεις

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2+2}{x}+\frac{x^4+4}{x-1}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{10}+1}{x}+\frac{x^8+3}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\varepsilon\phi x}{4x-\pi}+\frac{\sigma\phi x}{3x-\pi}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$.

12. Να αποδειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα οι εξισώσεις:

(α) $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^3+1}{x-2}=0$ στο $(1,2)$

(β) $\frac{x^{2006}+2006}{x-1}+\frac{x^{2007}+2007}{x-2}=0$ στο $(1,2)$

13. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$ και $g(x)=\sigma\phi x$ τέμνονται στο (ξ,κ) όταν $\xi\in(0,\pi)$.

Μέθοδος 3 (Ύπαρξη τουλάχιστον δύο ριζών μιας εξίσωσης)
Όταν μας ζητάνε να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον ρίζες σε ένα διάστημα (α,β) τότε χωρίζουμε κατάλληλα το διάστημα αυτό σε δύο υποδιαστήματα έστω (α,γ), (γ,β) και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano σε καθένα από αυτά αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Παράδειγμα 3
Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x=x^2$ **έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x-x^2$ η οποία ορίζεται στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}\right) \\ f(0)=3 \end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)=3\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_1)=0\Leftrightarrow \xi_1\eta\mu\xi_1+3\sigma\upsilon\nu\xi_1-\xi_1^{\,2}=0\Leftrightarrow \xi_1\eta\mu\xi_1+3\sigma\upsilon\nu\xi_1=\xi_1^{\,2}$$

Άρα ο αριθμός $\xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x=x^2$.

➢ Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

➢ $\left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}\right) \\ f(0)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)=3\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_2)=0 \Leftrightarrow \xi_2\eta\mu\xi_2+3\sigma\upsilon\nu\xi_2-\xi_2^{\,2}=0 \Leftrightarrow \xi_2\eta\mu\xi_2+3\sigma\upsilon\nu\xi_2=\xi_2^{\,2}$$

Άρα ο αριθμός $\xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x=x^2$.

Άρα η εξίσωση $x\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x=x^2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Παράδειγμα 6

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}=0$ **με** $0<a<b<c$ **έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο** (a,c).

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση

$f(x)=a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)$ η οποία ορίζεται στο $[a,c]$.

➢ Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$.

➢ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=a(a-b)(a-c) \\ f(b)=b(b-a)(b-c) \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)\cdot f(b)=ab(a-b)(a-c)(b-a)(b-c)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(a,b)\subset(a,c)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_1)=0 \Leftrightarrow a(\xi_1-b)(\xi_1-c)+b(\xi_1-a)(\xi_1-c)+c(\xi_1-a)(\xi_1-b)=0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\xi_1\neq c}{\overset{\xi_1\neq\alpha,\xi_1\neq b}{\Leftrightarrow}} \frac{a}{\xi_1-a}+\frac{b}{\xi_1-b}+\frac{c}{\xi_1-c}=0$$

Άρα ο αριθμός $\xi_1 \in (a,b) \subset (a,c)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}=0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[b,c]$.
- $\left.\begin{cases} f(c)=c(c-a)(c-b) \\ f(b)=b(b-a)(b-c) \end{cases}\right\} \Rightarrow f(c)\cdot f(b)=ab(c-a)(c-b)b(b-a)(b-c)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (b,c) \subset (a,c)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_2)=0 \Leftrightarrow a(\xi_2-b)(\xi_2-c)+b(\xi_2-a)(\xi_2-c)+c(\xi_2-a)(\xi_2-b)=0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\xi_2\neq c}{\overset{\xi_2\neq \alpha,\xi_2\neq b}{\Leftrightarrow}} \frac{a}{\xi_2-a}+\frac{b}{\xi_2-b}+\frac{c}{\xi_2-c}=0$$

Άρα ο αριθμός $\xi_2 \in (b,c) \subset (a,c)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}=0$.

Επομένως, η εξίσωση $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (a,c).

Ασκήσεις

14. Να αποδειχθεί ότι έχουν δύο τουλάχιστον ρίζες στο αντίστοιχο διάστημα οι εξισώσεις:

(α) $x^3-6x^2+3=0$ στο $(-1,1)$

(β) $\dfrac{x^6+1}{x-1}+\dfrac{x^4+1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x-3}=0$ στο $(1,3)$

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1,1)$ όταν $\beta>0$ και $\alpha+\beta+1<0$.

16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες αντίθετες στο $(-1,1)$.

Μέθοδος 3 (Ύπαρξη $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ή $[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$)

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ με $x\in[\alpha,\beta]$
- Αναφέρουμε για ποιο λόγο η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

- Βρίσκουμε τις τιμές $h(\alpha), h(\beta)$ και διαπιστώνουμε ότι $h(\alpha)\cdot h(\beta)\le 0$
- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
  1. $h(\alpha)\cdot h(\beta)=0 \Leftrightarrow h(\alpha)=0$ ή $h(\beta)=0$ και
  2. $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ τότε λόγω του θεωρήματος Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$

Παράδειγμα 9

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu\xi+1=\xi$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+1-x$ η οποία ορίζεται στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} f(0)=2 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}\end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)=2-\pi<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi+1-\xi=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi+1=\xi$$

Παράδειγμα 10

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\ne 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $\frac{f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)(\beta-\alpha) \\ h(\beta)=-f(\alpha)(\beta-\alpha) \end{cases}\right\} \Rightarrow h(\alpha)\cdot h(\beta)=-f^2(\alpha)(\beta-\alpha)^2<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)-(\xi-\alpha)\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\alpha)=(\xi-\alpha)\left[f(\alpha)+f(\beta)\right] \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

Παράδειγμα 11

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)g(\beta)>0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\frac{g(\beta)}{\xi-\beta}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)(\beta-x)-(x-a)g(x)$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)(\beta-\alpha) \\ h(\beta)=-g(\beta)(\beta-\alpha) \end{cases}\right\} \Rightarrow h(\alpha)\cdot h(\beta)=-f(\alpha)g(\beta)(\beta-\alpha)^2<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\xi)-(\xi-a)g(\xi)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\xi)(\beta-\xi)=(\xi-a)g(\xi) \underset{\xi\neq\beta}{\overset{\xi\neq\alpha}{\Leftrightarrow}} \frac{f(\xi)}{\xi-a}=\frac{g(\xi)}{\beta-\xi}$$

Παράδειγμα 12

Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[0,1]$. Αν για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $0<f(x)<1$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ η οποία ορίζεται στο $[0,1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} h(0)=f(0) \\ h(1)=f(1)-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow h(0)\cdot h(1)=-f(0)\left[f(1)-1\right]<0$

(Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $0<f(x)<1$. Άρα $0<f(0)<1$ και $0<f(1)<1$)

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$$

Παράδειγμα 13

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon\phi\xi+\xi=0$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ η οποία ορίζεται στο $[0,\pi]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ f(\pi)=-\pi \end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(\pi)=-\pi<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\subset(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi+\xi\sigma\upsilon\nu\xi=0 \overset{\sigma\upsilon\nu\xi\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi}+\xi=0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\xi+\xi=0$$

Παράδειγμα 14

Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $\alpha\le f(x)\le\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha \\ h(\beta)=f(\beta)-\beta \end{cases}\right\} \Rightarrow h(\alpha)\cdot h(\beta)=\left(f(\alpha)-\alpha\right)\left(f(\beta)-\beta\right)\leq 0$

Το ίσον ισχύει όταν $h(\alpha)=0$ ή $h(\beta)=0$.

(Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $\alpha\leq f(x)\leq\beta$. Άρα $\alpha\leq f(\alpha)\leq\beta$ και $\alpha\leq f(\beta)\leq\beta$)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $h(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$ οπότε το ζητούμενο ξ είναι το α.

(β) Αν $h(\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta)=\beta$ οπότε το ζητούμενο ξ είναι το β.

(γ) Αν $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi$$

Επομένως υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

Παράδειγμα 15

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)=g(\beta)$ και $f(\beta)=g(\alpha)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων
- $\left.\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha) \\ h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=g(\alpha)-f(\alpha) \end{cases}\right\} \Rightarrow h(\alpha)\cdot h(\beta)=-\left[f(\alpha)-g(\alpha)\right]^2\leq 0$

Η ισότητα ισχύει όταν $h(\alpha)=0$ ή $h(\beta)=0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $h(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha)$ οπότε το ζητούμενο ξ είναι το α.

(β) Αν $h(\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta)=g(\beta)$ οπότε το ζητούμενο ξ είναι το β.

(γ) Αν $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)-g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)$$

Επομένως υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

Παράδειγμα 16

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $0<f(x)<\frac{\pi}{2}$ και $0<g(x)<\frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu\xi)+g(\sigma\upsilon\nu\xi)=2\xi$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(\eta\mu x)+g(\sigma\upsilon\nu x)-2x$ η οποία ορίζεται στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} h(0)=f(\eta\mu 0)+g(\sigma\upsilon\nu 0)-2\cdot 0=f(0)+g(1) \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)+g\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)-2\cdot\frac{\pi}{2}=f(1)+g(0)-\pi \end{cases}\right\}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $0<f(x)<\frac{\pi}{2}$ και $0<g(x)<\frac{\pi}{2}$. Άρα ισχύουν οι σχέσεις:

$\left.\begin{array}{l} 0<f(0)<\frac{\pi}{2} \\ 0<g(1)<\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)+g(1)>0$ και $\left.\begin{array}{l} 0<f(1)<\frac{\pi}{2} \\ 0<g(0)<\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)+g(0)<\pi$

Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\eta\mu\xi)+g(\sigma\upsilon\nu\xi)-2\xi=0 \Leftrightarrow f(\eta\mu\xi)+g(\sigma\upsilon\nu\xi)=2\xi$$

Παράδειγμα 17

Αν οι συναρτήσεις $f:[0,1]\to(-1,0)$ είναι συνεχής, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi)+f(\xi)+\xi=0$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f^2(x)+f(x)+x$ η οποία ορίζεται στο $[0,1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\begin{cases} h(0)=f^2(0)+f(0)=f(0)\left[f(0)+1\right] \\ h(1)=f^2(1)+f(1)-1 \end{cases}$

Άρα $h(0)\cdot h(1)=f(0)\left[f(0)+1\right]\left[f^2(1)+f(1)-1\right]<0$

(Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $-1<f(x)<0$. Άρα $-1<f(0)<0\Rightarrow f(0)<0$ και $f(0)+1>0$. Επίσης $-1<f(1)<0\Rightarrow f(1)+1>0\Rightarrow f^2(1)+f(1)+1>0$)

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f^2(\xi)+f(\xi)+1=0$$

Παράδειγμα 18

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to(-\infty,1)$ και $g:\mathbb{R}\to(1,+\infty)$ και ότι υπάρχουν $\alpha>0$ και $\beta>0$ τέτοια ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)g(\xi)=\xi$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)-x$ η οποία ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)g(a)-\alpha=\alpha g(a)-\alpha=\alpha\left[g(a)-1\right] \\ h(\beta)=f(\beta)g(\beta)-\beta=\beta f(\beta)-\beta=\beta\left[f(\beta)-1\right] \end{cases}$

Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta)=\alpha\beta\left[g(\alpha)-1\right]\left[f(\beta)-1\right]<0$

(Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) < 1$ και $g(x) > 1$. Άρα $f(\beta) < 1 \Rightarrow f(\beta) - 1 < 0$ και $g(\alpha) > 1 \Rightarrow g(\alpha) - 1 > 0$)

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)g(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi)g(\xi) = \xi$$

Παράδειγμα 19

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = x$ και η γραφική παράσταση της $g(x) = \eta\mu 2x$ τέμνονται σε ένα σημείο $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = x - \eta\mu 2x$ η οποία ορίζεται στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

- Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $$\left.\begin{cases} h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 4}{4} \\ h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \end{cases}\right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ όπου $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Παράδειγμα 20

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ $(\alpha > 0)$ και $f(0) \neq 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{f(0) + f(\alpha)}{\alpha}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)\alpha - x\left[f(0)+f(\alpha)\right]$ η οποία ορίζεται στο $[0,\alpha]$. Ισχύουν:

- Η h είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} h(0)=f(0)\alpha \\ h(\alpha)=-\alpha f(0) \end{cases}\right\} \Rightarrow h(0)\cdot h(\alpha)=-\alpha^2 f^2(0)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)\alpha-\xi\left[f(\alpha)+f(0)\right]=0 \Leftrightarrow f(\xi)\alpha=\xi\left[f(\alpha)+f(0)\right] \Leftrightarrow$$

$$\underset{\alpha\neq 0}{\overset{\xi\neq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{f(\alpha)+f(0)}{\alpha}$$

Παράδειγμα 21

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+x-1=0$ έχει λύση την $\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2},\rho\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu\xi=\dfrac{1-2\xi}{\xi\left(\xi^2-1\right)}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$ η οποία ορίζεται στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{cases} f(1)=1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8} \end{cases}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^2+\rho+1=0$$

Δηλαδή ο αριθμός $\rho \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3+x-1=0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\sigma\upsilon\nu x-\frac{1-2x}{x(x^2-1)}$ η οποία ορίζεται στο $\left[\frac{1}{2},\rho\right]$. Ισχύουν:

- Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},\rho\right]$.
- $h(\rho)=\sigma\upsilon\nu\rho-\frac{1-2\rho}{\rho(\rho^2-1)}=\sigma\upsilon\nu\rho-\frac{1-2\rho}{\rho^3-\rho}=\sigma\upsilon\nu\rho-\frac{1-2\rho}{-\rho+1-\rho}=$
  $=\sigma\upsilon\nu\rho-\frac{1-2\rho}{1-2\rho}=\sigma\upsilon\nu\rho-1$.
- $h\left(\frac{1}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}>0$

Άρα $h(\rho)h\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2},\rho\right)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi-\frac{1-2\xi}{\xi(\xi^2-1)}=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi=\frac{1-2\xi}{\xi(\xi^2-1)}$$

Παράδειγμα 22

Η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και είναι $f(0)=f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ η οποία ορίζεται στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subset[0,1]$. Ισχύουν:

- Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $h(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)$.

➢ $h\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)$

Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\le 0$. Η ισότητα ισχύει όταν $h(0)=0$ ή $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $h(0)=0\Leftrightarrow f(0)=f\left(0+\frac{1}{2}\right)$ οπότε το ζητούμενο ξ είναι το 0.

(β) Αν $h\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ οπότε το ζητούμενο ξ είναι το $\frac{1}{2}$.

(γ) Αν $h(0)\cdot h\left(\frac{1}{2}\right)<0$ τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$$

Επομένως υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$.

Ασκήσεις

17. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $e^{2\xi}=\frac{e}{\xi}$.

18. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\xi=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\xi}{2\xi}$

19. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon\phi\xi=\xi+1$

20. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu\xi=\xi^2$.

21. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $-\varepsilon\phi\xi=\frac{2\xi-3}{\xi^2-\xi}$.

22. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $2^{\xi+1}\xi = 1 - 2^{\xi+1}$.

23. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - \eta\mu a = \frac{\pi}{2} - x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

24. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu x = \pi - x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

25. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\eta\mu x + a = x + 1$ με $a > 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα θετική μικρότερη του $a + 2$.

26. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει $\left(f^2(0)+16\right)\left(f^2(1)+4\right) \le \left(f(0)f(1)-8\right)^2$. Να δειχθεί ότι η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.

27. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[1,2] \to \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1,2]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + x = 1 + xf(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

28. Έστω $f:[0,1] \to (-1,0]$ συνεχής. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) + f(x_0) + x_0 = 0$.

29. Έστω f και g συνεχείς στο $[-1,1]$, $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(-1)+1=0$, $g(1)-1=0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $2f(x_0) + 3g(x_0) = 5x_0$.

30. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε: $f(x_0) + \frac{1}{x_0-\alpha} + \frac{1}{x_0-\beta} = 0$.

31. Έστω $f,g:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς για τις οποίες ισχύει $f\circ g=g\circ f$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=\xi$ και $g(\xi)=\xi$.

32. Η συνάρτηση $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(0)=f(2\pi)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,2\pi]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(\xi+\pi)$.

33. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $\alpha<f(x)<\beta$ και $\alpha<g(x)<\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(g(\xi))=\xi$.

34. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ $(\alpha>0)$. Αν για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει $-\alpha\le f(x)\le\alpha$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[-\alpha,\alpha]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=-\xi$.

35. Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)>0$. Αν $g(\alpha)=-\alpha$ και $f(\beta)=\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)-g(\xi)=\xi$.

36. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και $\alpha\beta>0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{\alpha}=\dfrac{\beta}{\xi}$

37. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχυει $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=xe^x-\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

38. Αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$, να δειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,1)$, ώστε να ισχύει: $f^{2005}(\xi)+\xi=f(\xi)$.

39. Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει: $(1+e^{\pi})f(\alpha)+(1+\pi^{e})f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, με $f(0)=f(4)$ και η συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(x+2)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)=f(\xi+2)$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $e^{f(x)}+g(x)=1-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, σε δύο σημεία Α, Β εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των Α, Β.

42. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2+ax+1$ και $g(x)=-x^2+ax+1$. Αν υπάρχουν ρ_1,ρ_2 τέτοια ώστε: $f(\rho_1)=g(\rho_2)=0$ με $\rho_1<\rho_2$, να αποδειχθεί ότι κάθε εξίσωση της μορφής: $\beta f(x)+\gamma g(x)=0$ με $\beta+\gamma>0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

43. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a,a+1]$, $a\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^2(a)+f(a)\cdot f(a+1)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a,a+1]$.

44. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x-\beta^2\eta\mu x=\beta^2$, $\beta\neq 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει το $2\beta^2$.

45. Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[-a,a]$ και ισχύουν:

(α) Η f είναι περιττή,

(β) Η g είναι γνησίως φθίνουσα,

(γ) $g(a)=-a$ και $g(-a)=a$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο ώστε: $f\left(g\left(x_0\right)\right)+f\left(x_0\right)+g\left(x_0\right)=0$.

46. Δίνεται η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι: $\frac{x^2}{2} \le f\left(x\right) \le \frac{x^2+1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[0,1\right]$ έτσι, ώστε $f\left(x_0\right)=x_0$.

47. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)=0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

48. Για μια συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)}{x-1}=4$ και $4\eta\mu\left(x-2\right) \le \left(x-2\right)f\left(x\right) \le x^2-4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της παραβολής $y=x^2-x+1$ σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $\left(1,2\right)$.

49. Για μια συνεχή συνάρτηση f, ισχύει ότι:

$$f^3\left(x\right)+\beta f^2\left(x\right)+\gamma f\left(x\right)=x^3-2x^2+6x-1$$

για κάθε πραγματικό αριθμό , όπου β,γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$ στο ανοικτό διάστημα $\left(0,1\right)$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=e^{x-\alpha}-1$ και $g\left(x\right)=\ln\left(\alpha x+1\right)+\alpha$, όπου $\alpha \in \left(0,\frac{3}{4}\right)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=\alpha x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[\alpha,\alpha+1\right]$.

(β) Αν ξ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=\alpha x$ στο διάστημα $\left[\alpha,\alpha+1\right]$, τότε να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\xi}g\left(x\right)=\xi$

51. Για μια συνεχή συνάρτηση f, ισχύει ότι:

$$\sqrt[3]{2x+8}-\sqrt{x+4} \le xf(x) \le \eta\mu\frac{x}{6}+x^6$$, για κάθε $x \ge -4$.

(α) Να δειχθεί ότι $f(0)=\frac{1}{6}$

(β) Να δειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1]$ ώστε $f(\xi)=\eta\mu\frac{\xi}{6}+\xi^6$.

52. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ με $f(2)\neq 6$, και ακόμη $f(1)+f(2)=8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ που $f(\xi)=\xi+\xi^2$.

53. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,2)$ να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ και η C_f έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

54. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf(x)=f(x)+\sqrt{3x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $4f(x_0)=7x_0$.

55. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf(x)+\eta\mu x=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

56. Δίνεται η $1-1$ συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+2x^2+\beta x-4$ με $\alpha>0$.

(α) Να δείξετε ότι: $\alpha\beta>1$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

57. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\Delta=[0,2007]$, για την οποία ισχύουν:

- $f(2007)<f(0)<0$
- η f είναι $1-1$.

Να δείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$.

Μέθοδος 4 (Ύπαρξη μοναδικών ριζών)

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα Δ τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Δείχνουμε ότι η f είναι ένα προς ένα (με τον ορισμό ή δείχνοντας ότι η f είναι γνησίως μονότονη)
- Δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο Δ εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano για την $g(x)=f(x)-\alpha$.

Παράδειγμα 23

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4-2x-1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^4-2x-1$

- f συνεχής στο $[1,2]$
- $f(1)=1-2-1=-2<0$ και $f(2)=16-2-1=13>0$ άρα $f(1)\cdot f(2)<0$.

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=0$.

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^4-2x_1^2-1=x_2^4-2x_2^2-1\Leftrightarrow x_1^4-2x_1^2-x_2^4+2x_2^2=0\Leftrightarrow$$

$$x_1^4-x_2^4+2x_2^2-2x_1^2=0\Leftrightarrow(x_1^2+x_2^2)(x_1-x_2)(x_1+x_2)-2(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0\Leftrightarrow$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_1=-x_2\\ x_1^2+x_2^2=2\end{cases}$$

Όμως $1\le x_1,x_2\le 2$ άρα $x_1=-x_2$ απορίπτεται διότι τα $x_1,x_2>0$. Επίσης $1\le x_1^2\le 4$ και $1\le x_2^2\le 4$ οπότε προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι $2\le x_1^2+x_2^2\le 4$. Άρα η μοναδική περίπτωση να ισχύει $x_1^2+x_2^2=2$ είναι το $x_1=x_2=1$. Οπότε η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Ασκήσεις

58. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1$. Να δείξετε ότι:

(α) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

59. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+\text{e}x$ με $x>0$. Να δείξετε ότι:

(α) Η f είναι γνησίως αύξουσα

(β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

60. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2^x+x$. Να δείξετε ότι:

(α) Η f είναι γνησίως αύξουσα

(β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

61. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1, & -1\le x\le 1 \\ 3x^2-6x+1, & 1<x\le 2 \end{cases}$ έχει δύο μόνο ρίζες.

Συνέπειες του Θεωρήματος Bolzano

1η Συνέπεια

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και είναι $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή δεν μηδενίζεται στο Δ, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, δηλαδή:

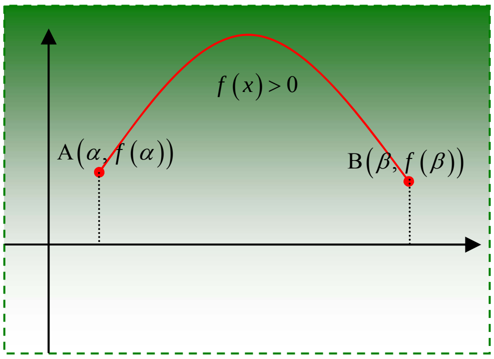
$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Delta \text{ ή } f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\Delta$$

Απόδειξη

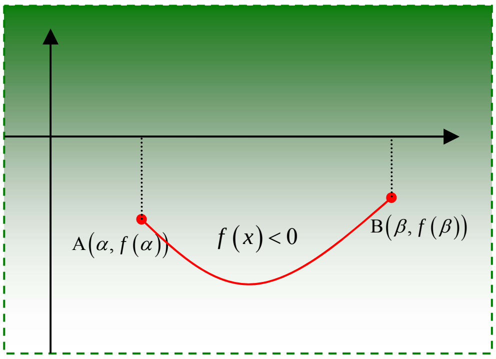
Έστω ότι η συνάρτηση f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ. Τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε: $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)>0$. Οπότε:

- f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha)f(\beta)<0$

Οπότε ισχύει το Θεώρημα του Bolzano δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)\neq 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού $f(x)\neq 0$.



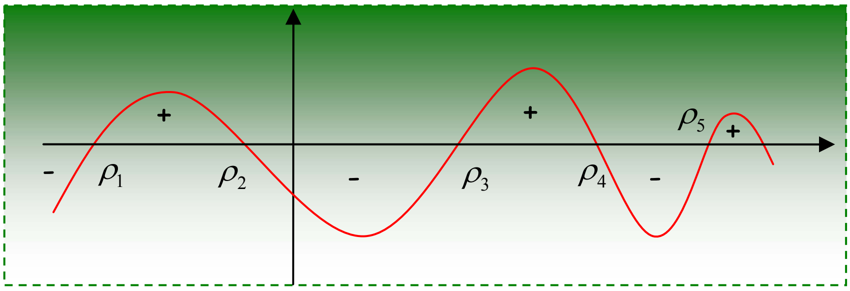
Σχήμα 1



Σχήμα 2

2^{η} Συνέπεια

Αν η συνεχής συνάρτηση f έχει διαδοχικές ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (ρ_1, ρ_2).(Η συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών.)



Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- **Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.**
- **Ισχύει: $f(\alpha) \neq f(\beta)$**

τότε για κάθε αριθμό η, με $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ ή $f(\beta) < \eta < f(\alpha)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \eta$

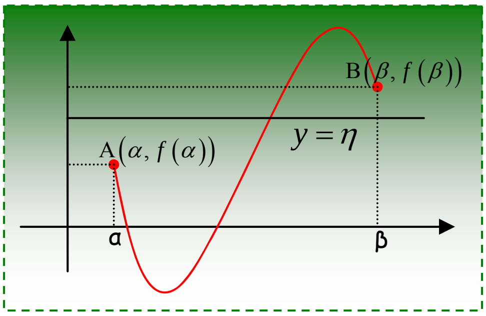
Απόδειξη

Έστω $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

- $\left.\begin{matrix} g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0 \\ g(\beta)=f(\beta)-\eta>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow g(\alpha)g(\beta)<0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

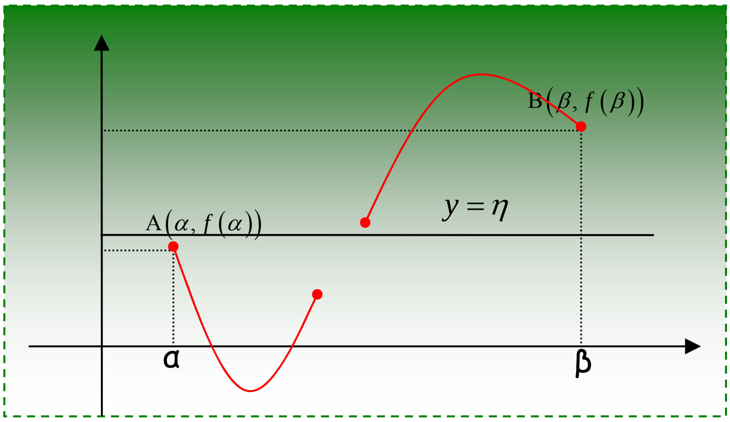


$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-\eta=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\eta$$

Ανάλογη είναι η απόδειξη για την περίπτωση: $f(\beta)<\eta<f(\alpha)$.

Παρατηρήσεις-Σχόλια

- Με απλά λόγια το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών δηλώνει ότι η συνεχής συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$.
- Γεωμετρικά, το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών δηλώνει ότι: κάθε ευθεία $y=\eta$, με $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ ή $f(\beta)<\eta<f(\alpha)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- Εάν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής τότε, δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και η f δεν παίρνει κατ' ανάγκη όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m, δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$ ισχύει:

$$m\le f(x)\le M \quad \text{για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Παρατηρήσεις-Σχόλια

- Το παραπάνω θεώρημα εφαρμόζεται μόνο όταν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Εύρεση συνόλου τιμών μιας συνάρτησης

Εύρεση συνόλου τιμών συνάρτησης

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ_1 τότε ισχύουν τα εξής:

Δ_1	$f(\Delta_1)$ αν η f γνησίως αύξουσα στο Δ_1	$f(\Delta_1)$ αν η f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1
$[\alpha,\beta]$	$[f(\alpha),f(\beta)]$	$[f(\beta),f(\alpha)]$
(α,β)	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$
$[\alpha,\beta)$	$\left[f(\alpha),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),f(\alpha)\right]$
$(\alpha,\beta]$	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),f(\beta)\right]$	$\left[f(\beta),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$
$(-\infty,\beta]$	$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(\beta)\right]$	$\left[f(\beta),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$
$(-\infty,\beta)$	$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$
$[\alpha,+\infty)$	$\left[f(\alpha),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$	$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(\alpha)\right]$
$(\alpha,+\infty)$	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$	$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$
$(-\infty,+\infty)$	$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$	$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$

Αν $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ τότε $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)$ όπου τα $f(\Delta_1)$ και $f(\Delta_2)$ βρίσκονται όπως έχουμε αναφέρει στον παραπάνω πίνακα.

Αν το $0\in f(\Delta)$ τότε η συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Εύρεση του προσήμου και του τύπου μιας συνάρτησης)

Όταν μια συνάρτηση είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός σε ένα διάστημα τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Σε αυτή την περίπτωση η συνέχεια είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. Τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Delta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$, δηλαδή $f(\alpha)f(\beta)<0$. Έστω $\alpha<\beta$.

- Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subset\Delta$
- $f(\alpha)f(\beta)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\subset\Delta$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$ που είναι άτοπο, επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής και για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει: $x^2+\left[f(x)\right]^2=1$ (1), να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$. Τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in(-1,1)$ τέτοια ώστε $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$, δηλαδή $f(\alpha)f(\beta)<0$. Έστω $\alpha<\beta$.

- Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$
- $f(\alpha)f(\beta)<0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\subset(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

Για $x=\xi$ από (1) έπεται ότι $\xi^2+\left[f(\xi)\right]^2=1\Rightarrow\xi^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}\xi=1\\ \xi=-1\end{cases}$ που είναι άτοπο, επειδή $\xi\in(\alpha,\beta)\subset(-1,1)$.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$.

Υποσημείωση: Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

- Υποθέτουμε ότι αλλάζει πρόσημο και υπάρχουν δύο τιμές της ετερόσημες
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano μεταξύ των τιμών αυτών και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=-1$ και 0,5 δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f(3)-5\right)x^2+2x+2010\right]$.

Λύση

Υπολογίζουμε αρχικά το όριο:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f(3)-5\right)x^2+2x+2010\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f(3)-5\right)x^2\right]=\left(f(3)-5\right)(+\infty)$ (1)

Η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,5)$ αφού 0, 5 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή $f(2)=-1$ ($0<2<5$) έπεται ότι $f(x)<0, \forall x\in(0,5)$. Άρα $f(3)<0 \Leftrightarrow f(3)-5<0$.

Άρα το όριο (1) ισούται με $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f(3)-5\right)x^2+2x+2010\right]=-\infty$.

Παράδειγμα 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=-4$ και -1,5 δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4 f(1)+x^2+2}{x^2+2007}$.

Λύση

Η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των διαδοχικών ριζών του -1, 5. Επειδή $f(2)=-4$ ($-1<2<5$) έπεται ότι $f(x)<0$. Άρα $f(1)<0$. Οπότε το όριο είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4 f(1)+x^2+2}{x^2+2007}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4 f(1)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2 f(1)\right]=+\infty\cdot f(1)=-\infty$$

Παράδειγμα 12

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=2$ για την οποία ισχύει: $f^2(x)-6f(x)\eta\mu x-9\sigma\upsilon\nu^2 x=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

$f^2(x)-6f(x)\eta\mu x-9\sigma\upsilon\nu^2 x=x^2 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-6f(x)\eta\mu x+9\eta\mu^2 x=x^2+9\sigma\upsilon\nu^2 x+9\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-3\eta\mu x\right)^2=x^2+9 \quad (1)$

Έστω $g(x)=f(x)-3\eta\mu x$

- Η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών.
- Η g δεν μηδενίζεται, αφού $x^2+9\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε ότι: $g(0)=f(0)-\eta\mu 0=2>0$ άρα $g(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Η (1) γίνεται:

$$g^2(x)=x^2+9 \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} g(x)=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-3\eta\mu x=\sqrt{x^2+9}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+9}+3\eta\mu x$$

Ασκήσεις

62. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύουν: $f^2(x)-2xf(x)-1=0$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)>1$.

63. Αν η f είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x)=4-x^2$ για κάθε $x\in[-2,2]$ και $f(1)>0$, τότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-2,2)$.

64. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\pi]$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-1=\eta\mu x\cdot f(x)-2\eta\mu^2 x$, $x\in[0,\pi]$. Να βρεθεί ο τύπος της f αν είναι γνωστό ότι $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ και $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

65. Για τις συναρτήσεις f,g ισχύουν $f(x)g(x)=e^x$, $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(1)>3$ και $g(2)>2$. Να δείξετε ότι:

(α) ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

(β) υπάρχει $x_0\in(1,2)$, τέτοια ώστε $g(x_0)=x_0$.

66. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2,2]$ και για κάθε $x\in(-2,2)$ ισχύει $f(x)+x^2+\sigma\upsilon\nu f(x)=5$, να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$.

67. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=1$ και $1{,}4$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+f(3)\right)x^3-2x^2+3\right]$.

68. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ f με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(1)=2006$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{\left[f(2)+1\right]x^3+x^2-\dfrac{1}{2}\right\}$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[f(4)+2\right]x^3+1}{x^2+2}$

69. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x)-1=2xf(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν $f(0)=1$, τότε:

1. να βρείτε τον τύπο της f,
2. να υπολογίσετε το όριο $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot f(x)\right)$

70. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

(β) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

(γ) Να βρείτε τα όρια: **1.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

71. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ με $3\left(x^2-1\right)+f^2(x)=9$ για κάθε $x\in[-2,2]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2,2)$

72. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $3\sigma\upsilon\nu^2 x+3f^4(x)=2$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[0,\pi]$.

Μέθοδος 2 (εφαρμογές του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής)

Παράδειγμα 3
Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\pi x+x^2-2$ με $x\in[0,5]$ παίρνει την τιμή 10.

Λύση

Είναι $f(0)=-2$ και $f(5)=23$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(0)<10<f(5)$, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,5)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=10$

Παράδειγμα 3
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $x_1,x_2,\ldots x_\nu$ είναι σημεία του $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)}{\nu}$.

Λύση

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ τότε $f(x)=c$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι:

$$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_\nu)=c \quad \text{και} \quad \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)}{\nu}=\frac{\nu c}{\nu}=c\ .$$

Άρα, υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)}{\nu}$.

(β) Αν η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα θα υπάρχουν $\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύουν $f(\kappa)\le f(x)\le f(\lambda)$. Επομένως:

$$\left.\begin{array}{c} f(\kappa)\le f(x_1)\le f(\lambda) \\ f(\kappa)\le f(x_2)\le f(\lambda) \\ \vdots \\ f(\kappa)\le f(x_\nu)\le f(\lambda) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \nu f(\kappa)\le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)\le \nu f(\lambda)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\kappa)\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)}{\nu}\le f(\lambda)$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, θα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)}{\nu}$.

Παράδειγμα 4

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $\kappa>0$ και $\lambda>0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$.

Λύση

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ τότε $f(x)=c$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $f(\alpha)=f(\beta)=c$ και $\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}=\dfrac{\kappa c+\lambda c}{\kappa+\lambda}=\dfrac{(\kappa+\lambda)c}{\kappa+\lambda}=c$. Άρα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$.

(β) Αν η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα θα υπάρχουν $\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύουν $f(\kappa)\le f(x)\le f(\lambda)$. Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} f(\mu)\le f(\alpha)\le f(\rho) \\ f(\mu)\le f(\beta)\le f(\rho) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \kappa f(\mu)\le \kappa f(\alpha)\le \kappa f(\rho) \\ \lambda f(\mu)\le \lambda f(\beta)\le \lambda f(\rho) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa+\lambda) f(\mu)\le \kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)\le (\kappa+\lambda) f(\rho) \Leftrightarrow$$

$$f(\mu)\le \frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}\le f(\rho)$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, θα υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$.

Παράδειγμα 7

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε: $2\eta\mu x_0 - 3\sigma\upsilon\nu x_0 = -\dfrac{5}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,\pi]$. Έχουμε ότι: $f(0)=-3$ και $f(\pi)=3$. Παρατηρούμε ότι $-3=f(0)<-\dfrac{5}{2}<f(\pi)=3$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2\eta\mu x_0-3\sigma\upsilon\nu x_0=-\frac{5}{2}$$

Παράδειγμα 8

Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $6f(x_0)=2f(1)+3f(2)+f(4)$.

Λύση

$1\le 1<4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1)\le f(1)<f(4)\Leftrightarrow 2f(1)\le 2f(1)<2f(4)$ (1)

$1<2<4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1)<f(2)<f(4)\Leftrightarrow 3f(1)<3f(2)<3f(4)$ (2)

$1<4\le 4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1)<f(4)\le f(4)$ (3)

Προσθέτουμε κατά μέλη της σχέσης (1), (2) και (3) οπότε προκύπτει ότι:

$$2f(1)+3f(1)+f(1)<2f(1)+3f(2)+f(4)<2f(4)+3f(4)+f(4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6f(1)<2f(1)+3f(2)+f(4)<6f(4)\Leftrightarrow f(1)<\frac{2f(1)+3f(2)+f(4)}{6}<f(4)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,4]$) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{2f(1)+3f(2)+f(4)}{6}\Leftrightarrow 6f(x_0)=2f(1)+3f(2)+f(4)$$

Παράδειγμα 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(e)=2$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $f(x)f(f(x))=-1$ (1), να βρείτε τα:

(α) $f(2)$, $f(1)$

(β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' σε ένα τουλάχιστον σημείο $x_0\in(1,e)$

Λύση

(α) Για $x=e$ η (1) γίνεται:

$$f(e)f(f(e))=-1\Leftrightarrow 2f(2)=-1\Leftrightarrow f(2)=-\frac{1}{2}$$

Έχουμε ότι $-\frac{1}{2}<1<2$ ή $f(2)<1<f(e)$ οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$.

Για $x=x_0$ η (1) γίνεται: $f(x_0)f(f(x_0))=-1\Leftrightarrow 1f(1)=-1\Leftrightarrow f(1)=-1$.

(β) Αρκεί να δείξω ότι η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ και $f(1)\cdot f(e)=-2<0$, άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Παράδειγμα 10

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(1)=3$ και $f(2)=5$. Αν η εξίσωση $f(x)=4$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Τότε αφού $f(1)<4<f(2)$ από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=4$ το οποίο είναι άτοπο αφού η εξίσωση $f(x)=4$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Παράδειγμα 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+e^{2007x}-2$.

(α) Να μελετηθεί η f **ως προς την μονοτονία.**

(β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^3(x)=f(2007)f(2008)f(2009)$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο** $(2007,2009)$.

Λύση

(α) $D_f=\mathbb{R}$

Για $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

Για $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2007x_1<2007x_2 \Leftrightarrow e^{2007x_1}<e^{2007x_2}$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε έχουμε ότι:

$$e^{x_1}+e^{2007x_1}<e^{x_2}+e^{2007x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}+e^{2007x_1}-2<e^{x_2}+e^{2007x_2}-2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) $2007\le 2007<2009 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2007)\le f(2007)<f(2009)$ (1)

$2007<2008<2009 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2007)<f(2008)<f(2009)$ (2)

$2007<2009\le 2009 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2007)<f(2009)\le f(2009)$ (3)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) οπότε έχουμε ότι:

$$f^3(2007)<f(2007)f(2008)f(2009)<f^3(2009) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(2007)<\sqrt[3]{f(2007)f(2008)f(2009)}<f(2009)$$

(Η συνάρτηση $f(x)>0$ στο διάστημα $[2007,2009]$)

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2007,2009]$ από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2007,2009)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=\sqrt[3]{f(2007)f(2008)f(2009)} \Leftrightarrow f^3(x_0)=f(2007)f(2008)f(2009)$$

Άρα η εξίσωση $f^3(x)=f(2007)f(2008)f(2009)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2007,2009)$.

Παράδειγμα 14

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $g(x)\ge 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν $\xi_1,x_1,x_2\in[\alpha,\beta]: g(\xi_1)=\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$

(β) Υπάρχουν $\xi_2,x_1,x_2\in[\alpha,\beta]: g(\xi_2)\ge\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$

Λύση

(α) Έστω m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g στο $[\alpha,\beta]$. Τότε το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $[m,M]$ και αφού $g(x)\ge 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι $m,M\ge 0$

Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $m\le g(x)\le M$.

Για $x=x_1$, έχουμε $m\le g(x_1)\le M$ (1)

Για $x=x_2$, έχουμε $m\le g(x_2)\le M$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και προκύπτει ότι:

$$m^2\le g(x_1)g(x_2)\le M^2 \Leftrightarrow m\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\le M$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi_1\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi_1)=\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$$

(β) Ισχύει ότι: $m\le\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\le M$, καθώς ο αριθμός $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$ βρίσκεται μεταξύ των $g(x_1)$, $g(x_2)$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi_2\in[\alpha,\beta]$: $g(\xi_2)=\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\ge\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$.

Πράγματι

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\ge\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\Leftrightarrow g(x_1)+g(x_2)\ge 2\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\Leftrightarrow$$

$$[g(x_1)+g(x_2)]^2\ge\left[2\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\right]^2\Leftrightarrow$$

$$g^2(x_1)+2g(x_1)g(x_2)+g^2(x_2)\ge 4g(x_1)g(x_2)\Leftrightarrow$$

$$g^2(x_1)-2g(x_1)g(x_2)+g^2(x_2)\ge 0\Leftrightarrow[g(x_1)-g(x_2)]^2\ge 0,\ \text{που ισχύει}$$

Ασκήσεις

73. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu\pi x+7$ με $x\in[-4,4]$ παίρνει την τιμή $\frac{7}{2}$.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{25}-\eta\mu\pi x+8$ με $x\in[-5,5]$. Να εξετάσετε αν η f παίρνει την τιμή $\frac{11}{2}$.

75. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ με $f(0)=2$ και $f(1)=3$. Να δείξετε ότι:

(α) Η ευθεία $y=e$ τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο και

(β) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+2f\left(\frac{2}{5}\right)+3f\left(\frac{3}{4}\right)+4f\left(\frac{2}{6}\right)}{10}$$

(γ) Αν $x_1,x_2,\ldots x_\nu\in(0,1)$ τότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_\nu)}{\nu}$$

76. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $\alpha<\gamma<\delta<\beta$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)+f(\delta)=2f(\xi)$.

77. Αν η f είναι συνεχής στο $[0,10]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,10]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{5f(0)+f(10)}{6}$.

78. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f(8)=7$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)f(f(x))=1$. Να βρείτε το $f(4)$.

79. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.

80. Έστω $f_1(x), f_2(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- $(f_1\circ f_2)(x)=(f_2\circ f_1)(x)$ για κάθε $x\to\mathbb{R}$
- Η εξίσωση $f_1(x)=f_2(x)$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f_1\circ f_1)(x)=(f_2\circ f_2)(x)$ είναι αδύνατη.

81. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{Z}$, συνεχής με $\alpha<\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

82. Έστω η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[3,6]$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$
- $f(3)>0$
- $f(3)\cdot f(4)=f(5)\cdot f(6)$ για κάθε $x\in[3,6]$.

Να δείξετε ότι:

(α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in[3,6]$.

(β) Υπάρχουν $x_1\in[3,4]$ και $x_2\in[5,6]$ τέτοια ώστε $\left(f(x_1)\right)^2=f(3)\cdot f(4)$ και $\left(f(x_2)\right)^2=f(5)\cdot f(6)$

(γ) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

83. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$
- $f(1)>0$
- $f(1)f(2)=f(3)f(4)$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου

(β) Η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

(γ) Η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη.

84. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τους τρεις θετικούς αριθμούς $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ με $\theta_1+\theta_2+\theta_3=2010$. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2,x_3\in(\alpha,\beta)$ υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\theta_1 f(x_1)+\theta_2 f(x_2)+\theta_3 f(x_3)=2010 f(\xi)$.

85. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$ με:

$$f(1)f(2)f(4)=8 \text{ και } f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in[1,\ 4]$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$,

(β) η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,4]$,

(γ) η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,4]$.

86. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(4)=2 \text{ και } f(x)\cdot f(f(x))=12 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$

(β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

(γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=3$.

87. Α. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,\ 4]$ τέτοιο ώστε:

$$2f(1)+3f(2)+4f(3)=9f(\xi)$$

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $x_1,x_2,x_3\in[\alpha,\beta]$ και $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ θετικοί αριθμοί να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\ \beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\kappa_3 f(x_3)}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3}$$

Γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$f(\xi)=\eta\mu^2\alpha\cdot f(\alpha)+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot f(\beta)$$

Μέθοδος 4 (εύρεση ρίζων μιας εξίσωσης μέσω του συνόλου τιμών)

Εάν μας ζητείται να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει ρίζα κάνουμε τα εξής:

- Φέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο 1° μέλος και θεωρούμε συνάρτηση έστω $f(x)$.
- Βρίσκουμε την μονοτονία της συνάρτησης.
- Βρίσκουμε μία προφανή ρίζα της συνάρτησης. Εάν όχι βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $f(A)$ και εάν το $0 \in f(A)$ τότε η συνάρτηση έχει ρίζα.
- Η ρίζα που βρίσκουμε παραπάνω είναι μοναδική διότι η συνάρτηση είναι μονότονη.

Παράδειγμα 6

Να δείξετε ότι η εξίσωση $-4x^3+5x^2+7x+8=0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=-4x^3+5x^2+7x+8$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-4x^3+5x^2+7x+8\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4x^3\right)=+\infty$$

Άρα υπάρχει $\alpha<0$ τέτοιος ώστε $f(\alpha)>0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^3+5x^2+7x+8\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^3\right)=-\infty$$

Άρα υπάρχει $\beta<0$ τέτοιος ώστε $f(\beta)<0$.

1ος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική και είναι $f(\alpha)f(\beta)<0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=0 \Leftrightarrow -4\xi^3+5\xi^2+7\xi+8=0$.
Άρα ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $-4x^3+5x^2+7x+8=0$.

2ος τρόπος

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $(-\infty,+\infty)$. **Το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της** f άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0 \Leftrightarrow -4\xi^3+5\xi^2+7\xi+8=0$.

Παράδειγμα 11

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta=[0,5]$ και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[0,2],[2,4],[4,5]$. Αν $f(0)=1, f(2)=-2, f(4)=3$ και $f(5)=-4$, να βρεθούν:

(α) Η μονοτονία της f

(β) Το σύνολο τιμών της f

(γ) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα Δ.

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[0,2],[2,4],[4,5]$. Παρατηρούμε ότι:

- $0<2 \Leftrightarrow f(0)>f(2)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$.
- $2<4 \Leftrightarrow f(2)<f(4)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,4]$.
- $4<5 \Leftrightarrow f(4)<f(5)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4,5]$.

(β) Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f σε κάθε διάστημα ξεχωριστά. Το τελικό σύνολο τιμών της f θα είναι η ένωση των διαστημάτων που θα βρούμε.

- $[0,2]\overset{f\swarrow}{\Rightarrow}$ άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $\left[f(2),f(0)\right]=[-2,1]$
- $[2,4]\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}$ άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $\left[f(2),f(4)\right]=[-2,3]$
- $[4,5]\overset{f\swarrow}{\Rightarrow}$ άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $\left[f(5),f(4)\right]=[-4,3]$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(A)=[-2,1]\cup[-2,3]\cup[-4,3]=[-4,3]$$

(γ) Παρατηρούμε ότι:

Ισχύει $0\in[-2,1]$ και η $f\swarrow$ στο $[0,2]$, οπότε υπάρχει μία ρίζα $\rho_1\in[0,2]$. Όμοια $0\in[-2,3]$ και η $f\nearrow$ στο $[2,4]$, οπότε υπάρχει μία ρίζα $\rho_2\in[2,4]$, και τέλος $0\in[-4,3]$ και η $f\swarrow$ στο $[4,5]$, οπότε υπάρχει μία ρίζα

$\rho_3 \in [4,5]$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο διάστημα $[0,5]$.

Ασκήσεις

88. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{e^x-5}+\sqrt{e^x+2}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
(β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
(δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=9$

89. Έστω η συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

(α) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f.
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
(γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1]$ τέτοιο, ώστε:

$$2x_0\ln x_0=2-3x_0.$$

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
(γ) Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x+e^{x-1}=1$

91. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\alpha^x+x$ με $\alpha>1$

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.
(β) Να λυθεί η εξίσωση: $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=2+\lambda-\lambda^2$

92. Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν $\mathrm{A}(1,1)\in C_f$ τότε:

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}+2$, $x\in(0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x}=1+2f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

93. Έστω η συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1]$ τέτοιο ώστε:

$$2x_0\ln x_0=2-3x_0$$

94. Δίνεται η εξίσωση: $e^x\ln x=\lambda$, $\lambda>0$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(0,1]$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=e^x\ln x-\lambda$ με $x\in(1,+\infty)$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $e^x\ln x=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα.