# Συνέχεια Συνάρτησης

Πότε «μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;»
Μια συνάρτηση θα είναι συνεχής όταν το όριο της συνάρτησης στο $x_0$ και η τιμής της στο $x_0$ είναι ίσα.

**Ορισμός**

**Έστω μια συνάρτηση $f$ και $x_0$ ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, όταν:**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0).$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της όταν:

(α) Δεν υπάρχει το όριό της στο $x_0$ ή

(β) Υπάρχει το όριό της στο $x_0$, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο $x_0$.

Μία συνάρτηση $f$ που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

— Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P$ είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ **είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0$ του πεδίου ορισμού της ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

— **Οι συναρτήσεις** $f(x)=\eta\mu x$ **και** $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0\in R$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0\,.$$

— **Οι συναρτήσεις** $f(x)=e^x$ **και** $g(x)=\ln x$**, είναι συνεχείς**.

## Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο $x_0$ και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα**

Αν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι συνεχείς στο $x_0$, τότε είναι συνεχείς στο $x_0$ και οι συναρτήσεις:

$$f+g\,,\quad c\cdot f \text{ όπου } c\in\mathbb{R}\,,\quad f\cdot g\,,\quad \frac{f}{g}\,,\quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{f}$$

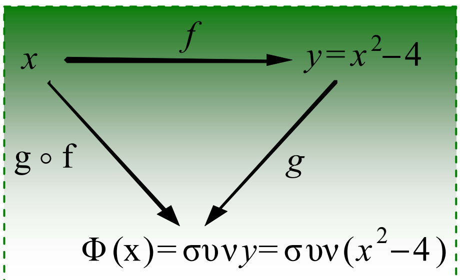
με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το $x_0$.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\varepsilon\varphi x$ και $g(x)=\sigma\varphi x$ είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

**Θεώρημα**

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $gof$ είναι συνεχής στο $x_0$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\varphi(x)=\sigma\upsilon\nu(x^2-4)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=x^2-4$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

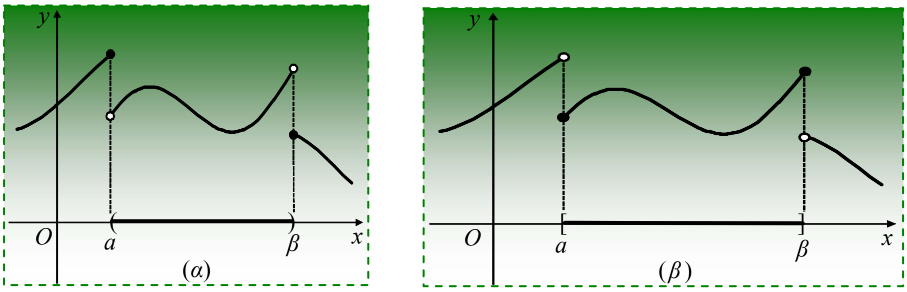


## Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

**Ορισμός**

- Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** $(\alpha,\beta)$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(\alpha,\beta)$. (Σχήμα α)
- Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(\alpha,\beta)$ και επιπλέον

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ (Σχήμα α) και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$ (Σχήμα β)




## Λυμένα παραδείγματα

**Μέθοδος 1 (Εύρεση συνέχειας κλαδωτών συναρτήσεων)**

Συνήθως οι συναρτήσεις για την συνέχεια των οποίων δεν είμαστε σίγουροι, είναι οι κλαδωτές συναρτήσεις. Στα σημεία αλλαγής του τύπου αυτών των συναρτήσεων εξετάζουμε αν είναι συνεχείς με χρήση πλευρικών ορίων.

**Παράδειγμα 1**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς**

**(α)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x<1 \\ & x=1 \\ \dfrac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1} & x>1 \end{cases}$ **(β)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+\eta\mu x}{x} & x\neq 0 \\ 4 & x=0 \end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ και στο $(1,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $f(1)=1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4\dfrac{x+3-4}{\sqrt{x+3}+2}}{x-1}=$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{4}{4}=1$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x-1\right)=1$
. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$, έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Άρα η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

- $g(0)=4$

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=3+1=4$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$, έπεται ότι η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=0$. Άρα η $g$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 2**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής**

**(α)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|+|x+2|-4}{x-2} & x\neq 2\\ 2 & x=2\end{cases}$ **(β)** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{1-x} & x<1\\ \dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}}{1-x} & x>1\end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=2$.

- $f(2)=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|+|x+2|-4}{x-2}=$

  $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2+x+2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2(x-2)}{x-2}=2$

| | $-\infty$    $-2$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert x-2\rvert$ | $-x+2$ | $-x+2$ | $x-2$ |
| $\lvert x+2\rvert$ | $-x-2$ | $x+2$ | $x+2$ |

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|+|x+2|-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x+2+x+2-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{0}{x-2}=0$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, έπεται ότι η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$. Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{2\}$ και δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ και στο $(1,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $g(1)=\pi$
- $\lim\limits_{x\to x^{+1}} g(x)=\lim\limits_{x\to x^{+1}}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim\limits_{x\to x^{+1}}\dfrac{2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-x}=\lim\limits_{x\to x^{+1}}\dfrac{2\eta\mu\left[(1-x)\dfrac{\pi}{2}\right]}{1-x}=$

  $\lim\limits_{x\to x^{+1}}=\left[\pi\dfrac{\eta\mu\left[(1-x)\dfrac{\pi}{2}\right]}{\dfrac{\pi}{2}(1-x)}\right]=\pi\cdot 1=\pi$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\eta\mu(\pi-\pi x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\eta\mu[(1-x)\pi]}{1-x}=$

  $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\pi\dfrac{\eta\mu[(1-x)\pi]}{\pi(1-x)}\right]==\pi\cdot 1=\pi$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=g(1)$, έπεται ότι η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Άρα η $g$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 3**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.**

**(α)** $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{\eta\mu 2x}{x} & x<0 \\ \dfrac{4^x-1}{2^x-1} & x>0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$ **(β)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 5x-\eta\mu 3x}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

- $f(0)=2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4^x-1}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(2^x\right)^2-1}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(2^x+1\right)\left(2^x-1\right)}{2^x-1}=$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2^x+1\right)=2^0+1=2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+2\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\right)=0+2\cdot 1=2$.

( Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x})=0$ επειδή για κάθε $x<0$ ισχύουν οι σχέσεις :
$\left|x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=\left|x^3\right|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le\left|x^3\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\left|x^3\right|=0$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$ ).

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$, έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$. Άρα η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ και στο $(1,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $g(1)=\pi$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\eta\mu\left[(1-x)\dfrac{\pi}{2}\right]}{1-x}=$

  $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\pi\dfrac{\eta\mu\left[(1-x)\dfrac{\pi}{2}\right]}{\dfrac{\pi}{2}(1-x)}\right]=\pi\cdot 1=\pi$

Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.
Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

- $g(0)=2$
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x-\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 5x}{x}-\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(5\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}-3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\right)=$

  $=5\cdot 1-3\cdot 1=2$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$, έπεται ότι η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=0$. Άρα η $g$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 4**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.**

(α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{1+2^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 6 & x=0\end{cases}$ (β) $g(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x} & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sqrt{2} & x=0\end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

- $f(0)=6$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{6}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{6}{1+0} = 6$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{6}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \left(\dfrac{6}{+\infty}\right) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, έπεται ότι η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού $A = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Η $g$ είναι συνεχής στο $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και θα εξετάσουμε αν η $g$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- $g(0) = \sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \frac{\sqrt{2\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}\right) =$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \dfrac{|\eta\mu x|\sqrt{2}}{\eta\mu x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \dfrac{\eta\mu x\sqrt{2}}{\eta\mu x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x + \sqrt{2}\right) =$

$= 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\eta\mu x + \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\eta\mu x + \frac{\sqrt{2\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}\right) =$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\eta\mu x + \dfrac{|\eta\mu x|\sqrt{2}}{\eta\mu x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\eta\mu x + \dfrac{-\eta\mu x\sqrt{2}}{\eta\mu x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\eta\mu x - \sqrt{2}\right) =$

$= 0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, έπεται ότι η $g$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Άρα η $g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

**Παράδειγμα 5**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.**

**(α)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4\eta\mu x+2x}{x^2+2x} & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \\ & x=0 \\ \dfrac{9\sqrt[3]{x+1}-9}{x} & x>0 \end{cases}$

**(β)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|+x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 4 & x=1 \end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

- $f(0)=3$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4\eta\mu x+2x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4\dfrac{\eta\mu x}{x}+2}{x+2}=\dfrac{4\cdot 1+2}{0+2}=3$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9\sqrt[3]{x+1}-9}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9\dfrac{x+1-1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}}{x}=$
  $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9x}{x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\dfrac{9}{3}=3$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$, έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$. Άρα η $f$ είναι συνεχής .

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $g(1)=4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|+x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1+x^2-1}{x-1}=$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$$

| $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\lvert x-1\rvert$ | $-x+1$ | $x-1$ |

Επειδή $\lim_{x\to 1^+} g(x)\neq g(1)$, έπεται ότι η $g$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$. Άρα η $g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ και δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

**Παράδειγμα 6**

**Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $g(1)=0$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:**

$$f(x)=\begin{cases} xg(x)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-1}\right)+3 & x<1 \\ \dfrac{xg(x)-g(x)+x^3-1}{x-1} & x>1 \\ 3 & x=1 \end{cases}$$

**είναι συνεχής.**

**Λύση**

Επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι συνεχής και στο 1. άρα ισχύει:

$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^-} g(x)=g(1)=0$.

Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $f(1)=3$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{xg(x)-g(x)+x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)(x-1)+(x+1)+\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)+\left[g(x)+x^2+x+1\right]}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left[g(x)+x^2+x+1\right]=0+1+1+1=3$$

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ ισχύουν οι σχέσεις:

$\left|xg(x)\eta\mu\frac{1}{x-1}\right|=\left|xg(x)\right|\left|\eta\mu\frac{1}{x-1}\right|\le\left|xg(x)\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}\left|xg(x)\right|=\left|1\cdot0\right|=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to1^-}\left(xg(x)\eta\mu\frac{1}{x-1}\right)=0$.

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(xg(x)\eta\mu\frac{1}{x-1}+3\right)=0+3=3$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$, έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Άρα η $f$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 7**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:**

**(α)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^3x\eta\mu\frac{2}{x}}{x} & x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **(β)** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1} & x>1\\ 2x-\dfrac{7}{6} & x\le1\end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

- $f(0)=0$
- $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu^3x\eta\mu\frac{2}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu^3x}{x^3}x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}\right]=$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)=1^3\cdot0=0$

(Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$ επειδή για κάθε $x\ne0$ ισχύουν οι σχέσεις: $\left|x^2\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|x^2\right|\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|x^2\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to0}\left|x^2\right|=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$).

Άρα η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν $g$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $g(1)=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$
- $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(2x-\frac{7}{6}\right)=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$
- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1+\sqrt{3}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}}{x-1}=$

  $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=g(1)$ έπεται ότι η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Άρα η $g$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 8**

**Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:**

**(α)** $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & 0\le x<4\\ \frac{\eta\mu(x-4)}{x^2-16}+\frac{1}{8} & x>4\\ \frac{1}{4} & x=4\end{cases}$ **(β)** $g(x)=\begin{cases}\frac{5e^x+2x-1}{x-1} & x<0\\ \frac{\eta\mu(x-1)}{x} & x>0\end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$. Η $f$ είναι συνεχής στο $[0,4)\cup(4,+\infty)$ και θα εξετάσουμε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=4$.

- $f(4)=\frac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}\left[\frac{\eta\mu(x-4)}{x^2-16}+\frac{1}{8}\right]=\lim\limits_{x\to4^+}\left[\frac{\eta\mu(x-4)}{(x-4)(x+4)}+\frac{1}{8}\right]=$

  $\lim\limits_{x\to4^+}\left[\frac{\eta\mu(x-4)}{x-4}\frac{1}{x+4}+\frac{1}{8}\right]=1\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$ έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

Άρα η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0\}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Άρα η $g$ είναι συνεχής.

## Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί αν είναι συνεχείς οι συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & x<1 \\ 2x-3, & x \geq 1 \end{cases}$ (δ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0 \\ 3x+1, & x \geq 0 \end{cases}$

(β) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & x<2 \\ 3x+1, & x \geq 2 \end{cases}$ (ε) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ \dfrac{\eta\mu x + x^2}{x^2}, & x>0 \end{cases}$

(γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x \neq -2 \\ 3, & x=-2 \end{cases}$ (ζ) $f(x) = \begin{cases} 2x^2\text{-}3, & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x} + 2, & x>0 \\ 3, & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{4+x^2}-2} + 1, & x<0 \end{cases}$. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής όταν:

$$(\alpha)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x+2}{x-1} & x<1\\ \ln x+2x-1 & 1\le x\le 2\\ \dfrac{1}{x-1} & x>2\end{cases}\qquad (\beta)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x-1} & x\ne 1\\ \dfrac{1}{6} & x=1\end{cases}$$

$$(\gamma)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|-|x+1|}{x} & x\ne 0\\ 4 & x=0\end{cases}\qquad (\delta)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-6x+9}} & x\ne 3\\ 3 & x=3\end{cases}$$

**4.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής όταν:

$$(\alpha)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 3x+\eta\mu 5x}{x} & x\ne 0\\ 8 & x=0\end{cases}\qquad (\beta)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|+|x-2|+2x-3}{x-1} & x\ne 1\\ 2 & x=1\end{cases}$$

$$(\gamma)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu|x-3|}{x-3} & x\ne 3\\ 1 & x=3\end{cases}\qquad (\delta)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\eta\mu 2x+x}{x} & x\ne 0\\ 7 & x=0\end{cases}$$

**5.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής όταν:

$$(\alpha)\ f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{2x-\pi} & x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & x=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2x-\pi} & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\qquad (\beta)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\eta\mu x^3 & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$(\gamma)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{(2x^2+1)\eta\mu 2x}{x^3+2x} & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{3x-\eta\mu 2x}{x} & x>0\end{cases}\qquad (\delta)\ f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}\eta\mu x & x<0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1} & x>0\end{cases}$$

**6.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{9^x-1}{3^x-1} & x<0 \\ 2 & x=0 \\ \dfrac{4x^2+x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2+\eta\mu^2 x} & x>0 \end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases} \varepsilon\varphi x\eta\mu\dfrac{1}{x} & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{x^2} & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} & x<0 \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \\ \dfrac{1}{2}\eta\mu\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\pi\right) & x>0 \end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{1+3^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 8 & x=0 \end{cases}$

**7.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} & x\in[0,1) \\ 3 & x=1 \\ \dfrac{\eta\mu\pi x}{x^2-5x+4} & x\in(1,4) \end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\varepsilon\varphi^2 x} & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \\ \dfrac{3x+\eta\mu 2x}{18x+\eta\mu 2x} & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{1}{4} & x=0 \end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu 2x}}{\pi-2x} & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \eta\mu\dfrac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu x & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases} (x-a)\sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{x-a} & x\neq a \\ 0 & x=a \end{cases}$

**8.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x} & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sqrt{2} & x=0 \end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\eta\mu^2 x+1}-1}{x^2} & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \\ x^2+x+\dfrac{1}{2} & x\geq 0 \end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} & 0<x\neq 8 \\ \dfrac{1}{12} & x=8 \end{cases}$

9. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ με $f(0)=f(1)$. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τη συνάρτηση $g$ αν

(α) $g(x)=\begin{cases} f(3x) & 0\leq x<\dfrac{1}{3} \\ f(3x-1) & \dfrac{1}{3}\leq x\leq 1 \end{cases}$ (β) $g(x)=\begin{cases} f(3x-1) & \dfrac{1}{3}<x\leq\dfrac{2}{3} \\ f(3x-2) & \dfrac{2}{3}<x\leq\dfrac{4}{3} \end{cases}$

**Μέθοδος 2 (Εύρεση παραμέτρων μέσω συνέχειας)**
Όταν μας ζητάνε να βρεθούν κάποιοι παράμετροι ώστε μια συνάρτηση (συνήθως κλαδωτή) να είναι συνεχής απαιτούμε η συνάρτηση να είναι συνεχής στα σημεία αλλαγής του τύπου της. Από τις εξισώσεις που προκύπτουν υπολογίζουμε τις παραμέτρους.

**Παράδειγμα 9**
**Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να συνεχείς.**

**(α)** $f(x)=\begin{cases} 3ae^{x+1}+x & 0\leq -1 \\ 2x^2-ax+3\beta & -1<x<0 \\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ **(β)** $f(x)=\begin{cases} 2x+a+1 & x\leq 0 \\ x^2-\beta & 0<x\leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x>1 \end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Επομένως, για να είναι η $f$ συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής στα σημεία $x_1=0$ και $x_2=-1$, δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ $(1)$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)$ $(2)$

- $f(0)=a+1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1) = a+1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2x^2 - ax + 3\beta\right) = 3\beta$

Από (1) $\Rightarrow \alpha + 1 = 3\beta \Leftrightarrow \alpha - 3\beta = -1 \quad (3)$

- $f(-1) = 3a - 1$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(2x^2 - ax + 3\beta\right) = 2 + \alpha + 3\beta$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(3ae^{x+1} + x\right) = 3a - 1$

Από (2) $\Rightarrow 3a - 1 = 2 + a + 3\beta \Leftrightarrow 2\alpha - 3\beta = 3 \quad (4)$.

Από (3) και (4) έχουμε : $\begin{Bmatrix} \alpha - 3\beta = -1 \\ 2\alpha - 3\beta = 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 4 \\ \beta = \dfrac{5}{3} \end{Bmatrix}$.

Επομένως, με $\alpha = 4$ και $\beta = \dfrac{5}{3}$ η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ και για να είναι συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0) \quad (1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1) \quad (2)$

- $g(0) = a + 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - \beta\right) = -\beta$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x + a + 1) = a + 1$

Από (1) $\Rightarrow \alpha + 1 = -\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = -1 \quad (3)$

- $g(1) = 1 - \beta$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2 - \beta\right) = 1 - \beta$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{x+3-4}{\sqrt{x+3}+2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$
  $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \dfrac{1}{4}$

Από (2) $\Rightarrow 1-\beta=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \beta=1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \beta=\frac{3}{4}$ .

Με $\beta=\frac{3}{4}$ η (3) γίνεται: $\alpha+\frac{3}{4}=-1 \Leftrightarrow \alpha=-1-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha=-\frac{7}{4}$.

Επομένως, με $\alpha=-\frac{7}{4}$ και $\beta=\frac{3}{4}$ η $g$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 10**

**Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να συνεχείς.**

**(α)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-a}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x=1 \end{cases}$  **(β)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2 x-3ax^2}{x^2} & x<0 \\ 3x^2-6a+7 & x \geq 0 \end{cases}$

**Λύση**

(α) Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και για να είναι η συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής στα σημεία $x_0=1$. Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \quad (1).$$

- $f(1)=3$
- Είναι $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x-a\right)=2-a$ και $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$. Αν υποθέσουμε ότι $2-a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2$, τότε το $\lim_{x\to 1} f(x)$ αν υπάρχει θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και η $f$ θα είναι ασυνεχής στο $x_0=1$. Αν $2-a=0 \Leftrightarrow a=2$ τότε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3.$$

Άρα με $a=2$ η $f$ είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $g$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και για να είναι η συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0=0$. Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x)=g(0) \qquad (1).$$

- $g(0)=-6a+7$
- $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(3x^2-6a+7\right)=-6a+7$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\eta\mu^2 x - 2ax^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - 3a\right] = 1-3a$.

Από (1) $\Rightarrow -6a+7 = 1-3a \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2$.

Άρα με $a=2$ η $g$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 11**

**Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f$ με τύπο:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-a}{x-1} & x<1\\ 4^{2\beta-a}-\dfrac{1}{2} & x=1\\ \dfrac{2x^2-3x+\beta}{2x-2} & x>1\end{cases}$$

**να είναι συνεχής.**

**Λύση**

Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και για να είναι συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=1$, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \qquad (1)$$

- $f(1) = 4^{2\beta+\alpha} - \dfrac{1}{2}$
- Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{x^2+3}-a\right) = 2-a$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$. Αν υποθέσουμε ότι $2-a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2$, τότε το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ αν υπάρχει θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και η $f$ θα είναι ασυνεχής στο $x_0=1$. Αν $2-a=0\Leftrightarrow a=2$ τότε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{x^2+3-4}{\sqrt{x^2+3}+2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Από (1) $\Rightarrow 4^{2\beta-\alpha}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4^{2\beta-2}=1\Leftrightarrow 4^{2\beta-2}=4^0\Leftrightarrow 2\beta-2=0\Leftrightarrow \beta=1$.

Με $\beta=1$ είναι:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-3x+1}{2x-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x-1)}=$$
$$\lim_{x\to1^+}\left(x-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα με $a=2$ και $\beta=1$ η $f$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 12**

**Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+(\beta-1)x+2}{x-1} & x\neq1\\ 3 & x=1\end{cases}$$

**να είναι συνεχής.**

**Λύση**

Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και για να είναι συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=1$, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)\quad(1)$

Είναι:

- $f(1)=3$
- Είναι $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ και $\lim\limits_{x\to1}\left[ax^2+(\beta-1)x+2\right]=a+\beta-1+2=a+\beta+1$. Αν υποθέσουμε ότι $a+\beta+1\neq0$ τότε το $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ αν υπάρχει θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και η $f$ θα είναι ασυνεχής στο $x_0=1$.

Αν $a+\beta+1=0\quad(2)$ τότε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+(\beta-1)x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+\beta x-x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+(-a-1)x-x+2}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax^2-ax-x-x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax(x-1)-2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax-2)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}(ax-2)=a-2$$

Από (1) $\Rightarrow a-2=3 \Leftrightarrow a=5$.

Με $a=5$ από (2)$\Rightarrow \beta=-6$.

Άρα με $a=5$ και $\beta=-6$, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

**Ασκήσεις**

10. Να βρείτε τον αριθμό $a\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f$ να είναι συνεχής όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1+\eta\mu\left[a(x-1)\right]}{x^2-6x+5} & x\in(0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{4} & x=1\end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 4x}{x} & x\neq 0\\[2mm] 3^a-1 & x=0\end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases}3+\dfrac{(x-a)^2\,\eta\mu\dfrac{\pi}{x-a}}{|x-a|} & x\neq a\\[2mm] a+1 & x=a\end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu ax-\eta\mu 2x}{x} & x\neq 0\\[2mm] 3 & x=0\end{cases}$

11. Να βρείτε τους αριθμούς $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f$ να είναι συνεχής όταν:

(α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x-a}{x-1} & x<1\\[2mm] \beta x^3+2ax+1 & x\geq 1\end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & x<2\\[2mm] a-\beta & x=2\\[2mm] \dfrac{4x^2+\beta x-a}{x-2} & x>2\end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+x-a}{x-1} & x<1 \\ \dfrac{a}{2}+\beta & x=1 \\ \dfrac{2x^2-x-1+\beta}{2x-2} & x>1 \end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+a & 0\le x<1 \\ 3^{2\beta+a+1} & x=1 \\ \dfrac{x-1+2\eta\mu(x-1)}{\eta\mu(x-1)} & 1<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

**12.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} (x-1)(x^2-2x+2), & \alpha\nu\ x\le\lambda \\ (x-1)^2\eta\mu\dfrac{1}{1-x}, & \alpha\nu\ x\succ\lambda \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda$, ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_0=\lambda$.

**13.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x-\beta\eta\mu 2x}{x}, & \alpha\nu\ \ x<0 \\ \alpha-1, & \alpha\nu\ \ x=0 \\ \dfrac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}, & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha$ και $\beta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

**14.** Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta$ ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x<1 \\ \beta+1, & x=1 \\ \alpha x^2-1, & x>1 \end{cases}$$

**15.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}, & x\neq 1 \\ 4, & x=1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α και β, έτσι ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.

**16.** Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς.

(α) $f(x)=\begin{cases}\lambda x+1, & \alpha\nu\ x\le 1\\ \dfrac{1-x\sqrt{x}}{x-1}, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda-1)x+\lambda|x|}{x}, & \alpha\nu\ x\neq 0\\ -1, & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$

**17.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^{\frac{1}{1-x}}, & \alpha\nu\quad x<1\\ 2x+\alpha, & \alpha\nu\quad 1\le x<2\\ x^2-\beta x+2, & \alpha\nu\quad x\ge 2\end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α και β, έτσι ώστε η $f$ να είναι συνεχής.

**18.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ \alpha x+\beta & 0<x<1\\ 1+x\ln x & x\ge 1\end{cases}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta$ έτσι, ώστε η $f$ να είναι συνεχής.

(Εξετάσεις 2004)

**19.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2000}{2001}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x<\alpha\\ x^3+x, & \alpha\nu\ x\ge\alpha\end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\neq 0$ τότε η $f$ είναι ασυνεχής στο $x_0=\alpha$.

(β) Να εξετάσετε αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$ όταν $\alpha\neq 0$.

**Μέθοδος 3 (Εύρεση συνέχειας μέσω ορίου)**

Όταν μας δίνεται ένα όριο το οποίο περιέχει μια συνάρτηση της $f(x)$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=\alpha$ και μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0$ τότε:

- Θέτουμε $h(x)=g(f(x))$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\alpha$
- Λύνουμε την $h(x)=g(f(x))$ ως προς $f(x)$
- Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

**Παράδειγμα 13**

**Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-5x+2}{x-1}=8$, να βρείτε το $f(1)$.**

**Λύση**

Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$. Άρα ισχύει η σχέση : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\quad(1)$

Αν θέσουμε $g(x)=\frac{f(x)-5x+2}{x-1}$ με $x\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=8$ και $g(x)\cdot(x-1)=f(x)-5x+2$, δηλαδή $f(x)=g(x)\cdot(x-1)+5x-2\quad(2)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)\cdot(-1)+5x-2\right]=8\cdot 0+5-2=3$ από την (2) έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=3\overset{(1)}{\Rightarrow}f(1)=3$$

**Παράδειγμα 14**

**Η συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\alpha\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=\xi$.**

**Λύση**

Αν θέσουμε $g(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ με $x\neq\xi$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi}g(x)=\alpha$ και $g(x)\cdot(x-\xi)+f(\xi)=f(x)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\xi}\left[g(x)\cdot(x-\xi)+f(\xi)\right]=a\cdot 0+f(\xi)=f(\xi)$, έπεται ότι και $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$.

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=\xi$.

**Παράδειγμα 15**

**Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2+2x+3}{x-1}=8$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^3}$.**

**Λύση**

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$. Άρα ισχύει η σχέση: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1) \qquad (1)$

Αν θέσουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2+2x+3}{x-1},\ x\neq 1$ τότε:

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=8$ και $g(x)\cdot(x-1)=f(x)-x^2+2x+3$,

δηλαδή $f(x)=g(x)\cdot(x-1)+x^2-2x-3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)\cdot(x-1)+x^2-2x-3\right]=8\cdot 0+1-2-3=-4$, έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=-4\overset{(1)}{\Rightarrow}f(1)=-4$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\cdot(x-1)+x^2-2x-3+4}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\cdot(x-1)+x^2-2x+1}{(x-1)^3}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\cdot(x-1)+(x-1)^2}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[g(x)+x-1\right]}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+x-1}{(x-1)^2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\left(g(x)+x-1\right)\frac{1}{(x-1)^2}\right]=(8)(+\infty)=+\infty$$

## Ασκήσεις

**20.** Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x^2+2x-3}{x-2}=4$, να δείξετε ότι:

(α) Το σημείο $A(2,-5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f$.

(β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-2$.

**21.** Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)+x^2-x-2}{x-3}=5$$

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=3$, τότε:

(α) να υπολογίσετε το $f(3)$

(β) να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_1=-3$

(γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)}{x-3}$

**22.** Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)}{h}=5$ και η $f$ είναι συνεχής στο 3, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

**23.** Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)}{x-3}=2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$.

**24.** Έστω η συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+4}{x^2-x}=2010$. Να βρεθεί το $f(0)$.

**25.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\sqrt{x^2+3}+3}{x-1}=8$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από το σημείο $A(1,-5)$.

**26.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$, να βρεθεί η τιμή $f(0)$.

**27.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$. Να βρείτε το $f(0)$.

(Εξετάσεις 2000)

**28.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\kappa\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρεθεί το $f(0)$

(β) Να βρεθεί το $\kappa$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{24\eta\mu^2 x+x\cdot f(x)}{2x^2+3\eta\mu x\cdot f(x)}=5$

**Μέθοδος 4 (Εύρεση της συνέχειας μέσω ανισώσεων)**

Εάν μας δίνεται μία ανίσωση της μορφής $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ή $|f(x)|\le g(x)$ και μας ζητάνε να δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ τότε:

- Αρχικά θέτουμε όπου $x=x_0$ στην ανίσωση και υπολογίζουμε την τιμή $f(x_0)$
- Από το κριτήριο παρεμβολής υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και εάν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ τότε η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 16**

**Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:**

$$x+1\le f(x)\le x^2+x+1 \qquad (1)$$

**Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.**

**Λύση**

Για $x=0$ από (1) $\Rightarrow 1\le f(0)\le 1$, δηλαδή $f(0)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x+1)=1$, από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$

**Παράδειγμα 17**

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ και $g$ που έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)|\le|g(x)|$ $(1)$. Αν η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο 0 με $g(0)=0$, να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο 0.**

**Λύση**

Επειδή $g$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x)|\le|g(x)|\Leftrightarrow -|g(x)|\le|f(x)|\le|g(x)|\quad(2)$

Για $x=0$ από (2) $\Rightarrow -|g(0)|\le f(0)\le g(0)\Rightarrow 0\le f(0)\le 0$, δηλαδή $f(0)=0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left[-|g(x)|\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}|g(x)|=0$, από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο 0.

**Παράδειγμα 18**

**Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και για κάθε $a,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:**

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\le\kappa|\alpha-\beta|^{2\nu+1},\quad \nu\in\mathbb{N}^*\ \text{και}\ \kappa>0 \quad \textbf{(1)}$$

**να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής.**

**Λύση**

Έστω $x\in\mathbb{R}$ και ξ ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$. Από την (1) έπεται:

$$|f(x)-f(\xi)|\le\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}\Leftrightarrow -\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}\le f(x)-f(\xi)\le\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}\Leftrightarrow$$

$$f(\xi)-\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}\le f(x)\le\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}+f(\xi)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\xi}\left[f(\xi)-\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}\right]=f(\xi)$ και $\lim\limits_{x\to\xi}\left[\kappa|x-\xi|^{2\nu+1}+f(\xi)\right]=f(\xi)$, από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$.

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο ξ και επειδή το ξ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

## Ασκήσεις

**29.** Αν $1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο $0$.

**30.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $|f(x)-\eta\mu 2x|\le x^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή $f(0)$.

**31.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)-4|\le|x-2|^2$

(α) Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=2$.

(β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=0$.

**32.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|f(x)-2|\le|x|$

(α) Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

(β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-2}{x}\right|=1$.

**33.** Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει: $\dfrac{3x^2+\eta\mu^2 x}{x^2+x^4}\le f(x)\le 4+\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^2}$. Να δείξετε ότι $f(0)=4$.

**34.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$4x^2-16\le f(x)-3\le x^4-4x^2.$$

(α) Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=2$.

(β) Αν $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-3}{x-2} & x\ne 2\\ \lambda^2+8 & x=2\end{cases}$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η $g$ να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

**35.** Α. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(x-1)f(x)\ge x^2-3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $1$ να βρεθεί η τιμή $f(1)$.

Β. Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $0$ και $|xg(x)-\eta\mu 2x|\le x^5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή $g(0)$.

Γ. Αν η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$ να βρεθεί η τιμή $h(0)$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $|f(x)-f(y)|\le\theta|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

37. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $-1\le f^2(x)-2f(x)\le x^2-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

38. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|x\cdot f(x)|\le|x-\eta\mu x|$, για κάθε $x\ne0$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, να βρεθεί η τιμή $f(0)$.

39. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $|(x-1)f(x)|\le|\eta\mu\pi x+\pi(x-1)|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το $f(1)$.

40. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $|f(x)-\ln(x+1)|\le|e^x-1|$ για κάθε $x>-1$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$

41. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|\sqrt{|x-a|}}{x-a} & x\ne a\\ 0 & x=a\end{cases}$

(α) Να δείξετε ότι η $g$ είναι συνεχής στο $x_0=a$.

(β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $|f(x)-10|\le|g(x)|$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=a$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)-a|\le(x-\beta)^2$.

(α) Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=\beta$.

(β) Αν $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-a}{x-\beta} & x\neq\beta \\ \lambda^3+27 & x=\beta \end{cases}$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η $g$ να είναι συνεχής στο $x_0=\beta$.

**Μέθοδος 5 (Εύρεση συνέχειας από συναρτησιακές σχέσης)**

Όταν μας ζητάνε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής σε διάστημα $\Delta$ και για την οποία γνωρίζουμε ότι ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση ( $f(x+y)=\cdots$ ή $f(x\cdot y)=\cdots$ ) και ότι είναι συνεχής σε κάποια θέση $\alpha$ του πεδίου ορισμού της τότε:

- Η $f$ συνεχής στο $\alpha$ άρα $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$ (1)
- Αν η συναρτησιακή σχέση είναι της μορφής $f(x+y)=\cdots$ τότε: Θέτουμε όπου $x\to(x_0-\alpha)+h$ οπότε το όριο (1) γίνεται $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} f\left[(x_0-\alpha)+h\right]$.
- Αν η συναρτησιακή σχέση είναι της μορφής $f(x\cdot y)=\cdots$ τότε: Θέτουμε όπου $x\to\left(\dfrac{x_0}{\alpha}\right)h$ οπότε το όριο (1) γίνεται $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} f\left[\left(\dfrac{x_0}{\alpha}\right)h\right]$.

**Παράδειγμα 19**

**Αν για μια συνάρτηση $f$ ισχύει: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και η $f$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η $f$ θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.**

**Λύση**

Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$

Θα δείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $x-x_0+\alpha=y\Leftrightarrow x=x_0-\alpha+y$ οπότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{y\to\alpha} f\left((x_0-\alpha)+y\right)=\lim_{y\to\alpha} f(x_0-\alpha)\cdot f(y)=f(x_0-\alpha)\lim_{y\to\alpha} f(y)=$$
$$=f(x_0-\alpha)f(\alpha)=f(x_0-\alpha+\alpha)=f(x_0)$$

Άρα η $f$ είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ άρα συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

## Ασκήσεις

**43.** Έστω συνάρτηση $f$ με την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:

(α) $f(0)=0$

(β) Η $f$ είναι περιττή

(γ) Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$, τότε είναι συνεχής στο 0 αλλά και σε όλο το $\Re$

**44.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύει: $f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

**45.** Έστω η συνεχής στο $x_0=1$ συνάρτηση $f$, για την οποία ισχύει: $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

**46.** Έστω η συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει η σχέση: $f(x\cdot y)=\sqrt{x}f(y)+\sqrt{y}f(x)$ για κάθε $x,y>0$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$, τότε θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^*$.

**47.** Έστω η συνεχής στο $x_0=1$ συνάρτηση $f$, για την οποία ισχύει: $f\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(ex)f(y)+\ln(ey)f(x)$, για κάθε $x,y>0$. Να δειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

**48.** Έστω $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$ και $f(x)\neq 0$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=2$, να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

**49.** Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y>0$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) $f(1)=0$

(β) αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$, τότε η $f$ είναι συνεχής.

## Μέθοδος 6 (Διάφορες θεωρητικές εφαρμογές)

**Παράδειγμα 20**

**Οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\left[f(x)\right]^4 + \left[g(x)\right]^4 = \sigma\upsilon\nu^2 x \ (1)$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.**

**Λύση**

Για $x = \frac{\pi}{2}$ από (1) $\Rightarrow \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^4 + \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^4 = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, από την (1) έπεται ότι:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\left[f(x)\right]^4 + \left[g(x)\right]^4\right) = 0.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $\left|\left[f(x)\right]^4\right| = \left[f(x)\right]^4 \le \left[f(x)\right]^4 + \left[g(x)\right]^4$

και επειδή $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\left[f(x)\right]^4 + \left[g(x)\right]^4\right) = 0$, έπεται ότι:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[f(x)\right]^4 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\left[f(x)\right]^4} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left|f(x)\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, που σημαίνει ότι και η $g$ είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

**Παράδειγμα 21**

**Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $xf(x) - 3\eta\mu x = x^2 \ (1)$. Να βρείτε το $f(0)$.**

**Λύση**

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$. Άρα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \qquad (2)$$

Για κάθε $x\neq 0$ η (1) γίνεται $xf(x)=3\eta\mu x+x^2 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3\eta\mu x+x^2}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\eta\mu x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\eta\mu x}{x}+x\right)=3\cdot 1+0=3 \quad (3)$

Από (2) και (3) έπεται ότι $f(0)=3$.

**Παράδειγμα 22**

**Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα $f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+x\big(f(x)+1\big)$ (1), $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της.**

**Λύση**

Λύνουμε την (1) ως προς $f(x)$:

$$f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+x\big(f(x)+1\big)\Leftrightarrow f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+xf(x)+x$$

$$\Leftrightarrow f(x)-xf(x)=1+x-\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow f(x)(1-x)=x+1-\sqrt{x^2+x+2}$$

Για $x\neq 1$ τότε: $f(x)=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{1-x}$. Αφού η $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο $x_0=1$ άρα

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2-\left(x^2+x+2\right)}{(1-x)\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1-x^2-x-2}{(1-x)\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)}=-\frac{1}{4}$$

Οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{1-x} & x\neq 1\\ -\dfrac{1}{4} & x=1\end{cases}$$

**Παράδειγμα 23**

**Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f^3(x)+f(x)=\ln x$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.**

*Λύση*

Για $x>0$ έχουμε ότι:

$$f^3(x)+f(x)=\ln x \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+1\right]=\ln x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{f^2(x)+1} \quad (1)$$

Για $x=1$ η (1) γίνεται: $f(1)=0$

Όμως $|f(x)|=\left|\dfrac{\ln x}{f^2(x)+1}\right|=\dfrac{|\ln x|}{f^2(x)+1}\leq|\ln x|\Leftrightarrow=-|\ln x|\leq f(x)\leq|\ln x|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}|\ln x|=\lim\limits_{x\to 1}(-|\ln x|)=0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$

**Παράδειγμα 24**

**Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f^3(x)+2f(x)=x$ (1). Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.**

*Λύση*

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$.

Για $x=x_0$ από την σχέση (1) έχουμε: $f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0$ (1)

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε:

$$f^3(x)-f^3(x_0)+2f(x)-2f(x_0)=x-x_0$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+2\left[f(x)-f(x_0)\right]=x-x_0$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=x-x_0$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$$

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\neq 0$ αφού εάν το θεωρήσουμε ως ένα τριώνυμο ως προς $f(x)$ έχουμε ότι:

$$\Delta=f^2(x_0)-4\left(f^2(x_0)+2\right)=-3f^2(x_0)-8<0$$

Άρα

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

**Ασκήσεις**

**50.** Α. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα: $xf(x)=\text{ημ}4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f$.

Β. Μία συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα: $1+\left(1+x^2\right)f(x)=\left(1+f(x)\right)\text{συν}^2x+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $g$.

**51.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x\cdot f(x)+10=\eta\mu 5x+(x+2)(x+5)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f$.

**52.** Έστω ότι για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει: $f^2(x)+g^2(x)\leq\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι οι $f,g$ είναι συνεχείς στο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

**53.** Έστω $f,g$ συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)+g^2(x)+x^2=2x\left[f(x)\eta\mu x+g(x)\sigma\upsilon\nu x\right]$. Να αποδείξετε ότι οι $f,g$ είναι συνεχής.

**54.** Έστω ότι για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)+\eta\mu^2 x=2x\cdot f(x)+2g(x)\cdot\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι οι $f,g$ είναι συνεχείς στο $x_0=0$

**55.** Οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα:

$$f^2(x)+g^2(x)+2f(x)+5\le 4g(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι οι $f,g$ είναι συνεχείς στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

**56.** Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση: $f^2(x)+x^2\cdot g^2(x)=x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι είναι συνεχείς στα $x_0=1$ και $x_1=-1$.

**57.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^2(x)-2f(x)\le x^2-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

**58.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $f(x)=f(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

(α) Να βρείτε το $f(0)$

(β) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_1=1$

**59.** Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει την ιδιότητα $xf(x)=\eta\mu 3x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της.

**60.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ συνεχής στο $x_0=1$, για την οποία ισχύει $(x-1)f(x)\ge\eta\mu(\pi x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(1)=-\pi$

**61.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x)+e\cdot f(x)+1=\ln x$, για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=e$.

**62.** Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $xf\left(x\right)\le \eta\mu 2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, να δειχθεί ότι $f\left(0\right)=2$.

**63.** Να βρείτε τον $\nu\in\mathbb{N}^*$ και τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αν για την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f\left(0\right)=1$ ισχύει: $x^\nu f\left(x\right)=\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta$.

**64.** Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^5\left(x\right)+f\left(x\right)=x$. $\forall x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο 0.

**65.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $f\left(x\right)=\dfrac{\alpha x^2+\beta(x+1)-4+\alpha}{x}$, $\forall x<0$ και $\eta\mu x\le xf(x)\le x$, $\forall x\ge 0$ να βρεθούν οι τιμές των $\alpha$ και $\beta$ που ανήκουν στο $\mathbb{R}$, καθώς και την τιμή $f\left(0\right)$.

**66.** Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $f\left(x\right)+f\left(x+1\right)=4x^2+4x+8$ και η $f$ είναι συνεχής στο 0 με $f\left(0\right)=3$, να δειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο 1.

**67.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $f\left(1-x\right)=f\left(x\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η $f$ είναι συνεχής στο 2. Να αποδειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=-1$.

**68.** Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει: $f\left(x\right)+f\left(x+3\right)=x-2$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_1=3$.

**69.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+2f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) η $f$ αντιστρέφεται,

(β) η $f$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,

(γ) $f^{-1}(x)=x^3+2x$

(δ) η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

**70.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha^{2x+1} + \alpha^2}{\alpha^{2x} + 1}$ για κάθε $\alpha \in \mathrm{A}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$.

(β) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f$.

(γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f$.

**71.** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x - 3\mathrm{i} + \dfrac{2\mathrm{i}}{x - \mathrm{i}}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα $\mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(z)$ συναρτήσει του $x$.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \mathrm{Re}(z) \cdot \left(x^2 + 1\right)$.

(γ) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{Re}(z) \cdot \left(x^2 + 1\right), & x \geq 1 \\ \mathrm{Im}(z) \cdot \left(x^2 + 1\right) + \alpha, & x < 1 \end{cases}$$

**72.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = x + \mathrm{i}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\mathrm{Im}(z_x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|z_x| - \text{συν}x}{\mathrm{Re}(z)}$

(β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(|z_x| - x\right)$