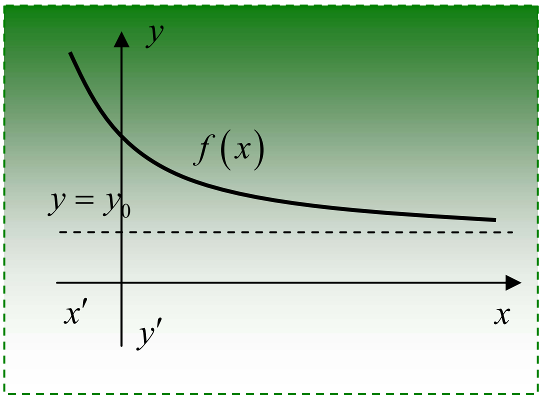
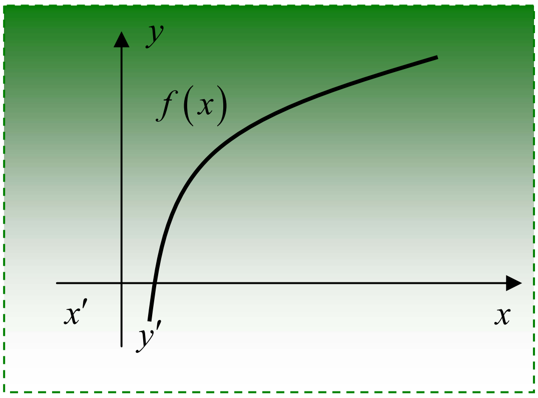
Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 1. Παρατηρούμε ότι όταν το x αυξάνει απεριόριστα, δηλαδή $x\to+\infty$ τότε η C_f πλησιάζει όλο και πιο κοντά στην ευθεία $y=y_0$ και οι τιμές της f πλησιάζουν πολύ κοντά στο 1. Τότε λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το y_0 και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$. Η ευθεία $y=y_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 2. Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνει απεριόριστα, δηλαδή $x\to+\infty$ τότε η C_f «φεύγει» πάνω δεξιά στους άξονες και οι τιμές της f αυξάνουν απεριόριστα και «πλησιάζουν» στο $+\infty$. Τότε λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$, όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

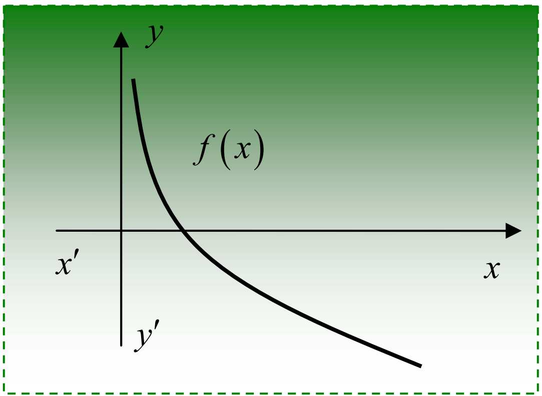


(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

Τέλος ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3. Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνει απεριόριστα, δηλαδή $x\to+\infty$ τότε η C_f «φεύγει» κάτω δεξιά στους άξονες και οι τιμές της f μειώνονται απεριόριστα και «πλησιάζουν» στο $-\infty$. Τότε λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$, όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.



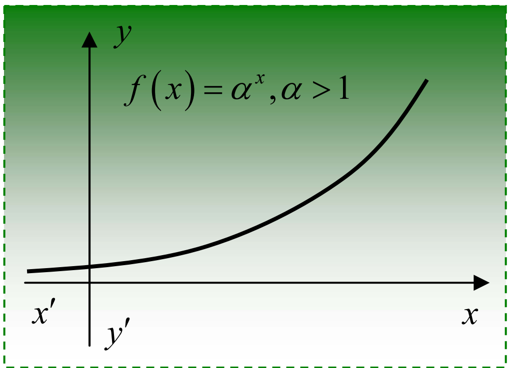
(Σχήμα 3)

Ανάλογοι ορισμοί, μπορεί να διατυπωθούν, όταν $x\to-\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$

Βασικά Όρια

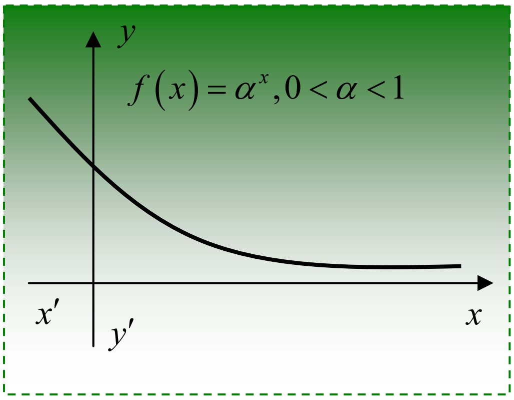
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu}=\begin{cases}+\infty & \nu=2\kappa\\ -\infty & \nu=2\kappa+1\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^{\nu}}=0$

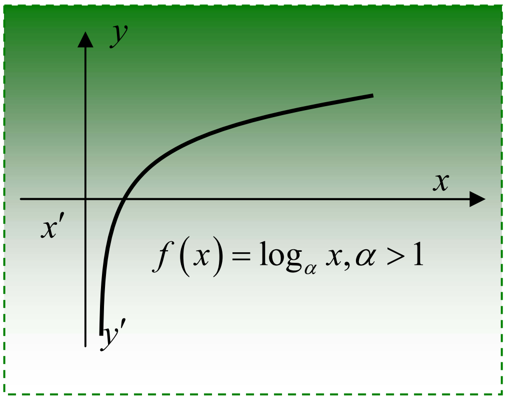
Όριο εκθετικής και Λογαριθμικής συνάρτησης



- $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to0}\alpha^{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{x}=+\infty$

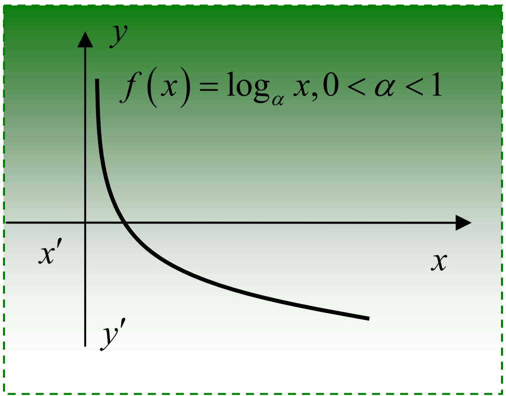
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \alpha^x = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$





- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_\alpha x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} \log_\alpha x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_\alpha x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} \log_\alpha x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$



Ιδιότητες ορίων στο άπειρο

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύουν και στην περίπτωση των ορίων στο άπειρο. Επιπλέον, ισχύουν και οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1

Αν $f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+a_0, a_\nu\neq 0$ και $g(x)=\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+...+\beta_0, \beta_\kappa\neq 0$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις τότε:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a_\nu \lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_\nu}{\beta_\kappa}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\nu}{x^\kappa}$

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για $x\to-\infty$

Πρόταση 2

Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Παρατηρήσεις

- Για να έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(a,+\infty)$ ή $(-\infty,a)$ αντίστοιχα.
- Όταν ο $x\to+\infty$ δεχόμαστε ότι ο x είναι μεγαλύτερος από έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό α, αρκεί στο διάστημα $(a,+\infty)$ να ορίζεται η συνάρτηση f.
- Όταν ο $x\to-\infty$ δεχόμαστε ότι ο x είναι μικρότερος από έναν οποιοδήποτε αρνητικό αριθμό α, αρκεί στο διάστημα $(-\infty,a)$ να ορίζεται η συνάρτηση f.

Λυμένα παραδείγματα

Μέθοδος 1

Για να βρούμε το όριο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης:

$$f(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+a_0, a_\nu\neq 0$$

όταν $x\to\pm\infty$ εφαρμόζουμε τον κανόνα $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_\nu x^\nu)$. Όταν δεν γνωρίζουμε ότι $a_\nu\neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) $a_\nu=0$ και (ii) $a_\nu\neq 0$.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ όταν:

(α) $f(x)=4x^6+3x^2+x+1$

(β) $f(x)=-2x^4+3x+4$

(γ) $f(x)=-3x^5+6x+2$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^6+3x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^6\right)=4(+\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^6+3x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^6\right)=4(+\infty)=+\infty$

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4+3x+4\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4\right)=-2(+\infty)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4+3x+4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4\right)=-2(+\infty)=-\infty$

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^5+6x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^5\right)=-3(+\infty)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5+6x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5\right)=-3(-\infty)=+\infty$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(a-1)x^3+ax^2+2x-1\right]$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(a^2-1)x^3+ax^2-2x+4\right]$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=(a-1)x^3+ax^2+2x-1$ έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις : $a-1=0$ και $a-1\neq 0$.

- Αν $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$$

- Αν $a-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(a-1)x^3+ax^2+2x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(a-1)x^3\right]=(a-1)(+\infty)=$$

$$=\begin{cases}+\infty \text{ αν } \alpha-1>0\Leftrightarrow \alpha>1\\ -\infty \text{ αν } \alpha-1<0\Leftrightarrow \alpha<1\end{cases}$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty & \text{αν } a=1\\ +\infty & \text{αν } a>1\\ -\infty & \text{αν } a<1\end{cases}$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=(a^2-1)x^3+ax^2-2x+4$ έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $a^2-1=0$ και $a^2-1\neq 0$.

- Αν $a^2-1=0\Leftrightarrow a=1$ ή $a=-1$ τότε:

Με $a=1$ είναι $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x+4)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$

Με $a=-1$ είναι $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^2-2x+4)=\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$

- Αν $a^2-1\neq 0\Leftrightarrow a\neq 1$ ή $\alpha\neq -1$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(a^2-1)x^3+ax^2-2x+4\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(a^2-1)x^3\right]=(a^2-1)(-\infty)=$$

$$=\begin{cases}-\infty \text{ αν } \alpha^2-1>0\Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ +\infty \text{ αν } \alpha^2-1<0\Leftrightarrow \alpha\in(-1,1)\end{cases}$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty & \text{αν } a=1\\ -\infty & \text{αν } a=-1\\ -\infty & \text{αν } a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ +\infty & \text{αν } a\in(-1,1)\end{cases}$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x\to+\infty}\left[(a^2+1)x^3+2x^2-6x+2\right]$

(β) $\lim_{x\to-\infty}\left[(a^2-4)x^2+(a+2)x-4\right]$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=(a^2+1)x^3+2x^2-6x+2$ έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Είναι :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(a^2+1)x^3+2x^2-6x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(a^2+1)x^3\right]=(a^2+1)(+\infty)=+\infty$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\left(a^2-4\right)x^2+(a+2)x-4$ έχει πεδίο ορισμού το $A\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $a-4=0$ και $a-4\neq 0$.

- Αν $a-4=0 \Leftrightarrow a=4$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(6x-4)=\lim_{x\to-\infty}(6x)=6(-\infty)=-\infty$$

- Αν $a-4\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 4$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(a-4)x^2+(a+2)x-4\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(a-4)x^2\right]=(a-4)(+\infty)=$$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{αν } a-4>0 \Leftrightarrow a>4\\ -\infty & \text{αν } a-4<0 \Leftrightarrow a<4\end{cases}$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\begin{cases}-\infty & \text{αν } a=4\\ +\infty & \text{αν } a>4\\ -\infty & \text{αν } a<4\end{cases}$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=3x^4+2x^2-6x+7$

(β) $f(x)=-2x^6+7x^3+4x-8$

(γ) $f(x)=2x^3+x+2$

(δ) $f(x)=-2x^6+7x^2+6x-3$

2. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\left(a^2-1\right)x^3+2ax^2+3x+4$

(β) $f(x)=(\ln a-1)x^4+ax^3-6x+2$

(γ) $f(x)=\left(a^2+1\right)x^3-6x^2+7x+8$

(δ) $f(x)=\left(a^4+1\right)x^4-6x^2+5x+1$

(ε) $f(x)=\left(a^3-8\right)x^3-2(a+1)x^2-6x+7$

(ζ) $f(x)=\left(3^a-27\right)x^4-(a-1)x^2+6x-8$

Μέθοδος 2

Για να βρούμε το όριο της ρητής συνάρτησης :

$$f(x)=\frac{a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\beta_0} \text{ με } \alpha_\nu\beta_\kappa\neq 0$$

όταν $x\to\pm\infty$ εφαρμόζουμε τον κανόνα $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{a_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$.

- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, τότε το όριο της ρητής συνάρτησης είναι το $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\kappa}$.

- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε το όριο της ρητής συνάρτησης είναι 0.
- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε το όριο της ρητής συνάρτησης είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και δεν θα είναι πραγματικός αριθμός.

Όταν δεν γνωρίζουμε ότι $\alpha_\nu \beta_\kappa \neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (α) $\alpha_\nu \beta_\kappa = 0$ και (β) $\alpha_\nu \beta_\kappa \neq 0$.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^6+7x^2-3}{6x^6+5x-7}$ **(β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4+5x^2-3x+2}{x^5+6x+3}$ **(γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+2}{2x^2+3}$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x^2+2x-8}$ **(ε)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5-6x+7}{2x^2+3x-4}$ **(ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+6x+7}{6x^3+7x-2}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^6+7x^2-3}{6x^6+5x-7}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4+5x^2-3x+2}{x^5+6x+3}=0$

(γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+2}{2x^2+3}=\frac{4}{2}=2$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x^2+2x-8}=0$

(ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5-6x+7}{2x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x^3\right)=\frac{3}{2}(-\infty)=-\infty$

(ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+6x+7}{6x^3+7x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4}{6x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}(+\infty)=-\infty$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^3+ax^2+3x-2}{ax^2+3x+2}$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^4+3ax^2-6x+2}{(a^2-1)x^4+ax^2+4}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(a-1)x^3+ax^2+3x-2}{ax^2+3x+2}$ είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\kappa,+\infty)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $a(a-1)=0$ και $a(a-1)\neq 0$.

- Αν $a(a-1)=0 \Leftrightarrow a=0$ ή $a=1$ τότε:

Με $a=0$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+3x-2}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^3}{3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x^2\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)(+\infty)=-\infty$$

Με $a=1$ είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-2}{x^2+3x+2}=1$

- Αν $a(a-1)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ ή $a\neq 1$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^3+ax^2+3x-2}{ax^2+3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^3}{ax^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a-1}{a}x\right)=$$

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)(+\infty)=\begin{cases}+\infty \text{ αν } \dfrac{a-1}{a}>0\Leftrightarrow a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ -\infty \text{ αν } \dfrac{a-1}{a}<0\Leftrightarrow a\in(0,1)\end{cases}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}-\infty \text{ αν } \alpha=0\\ 1 \text{ αν } \alpha=1\\ +\infty \text{ αν } \alpha\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ -\infty \text{ αν } \alpha\in(0,1)\end{cases}$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{ax^4+3ax^2-6x+2}{(a^2-1)x^4+ax^2+4}$ είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\kappa)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $a(a^2-1)=0$ και $a(a^2-1)\neq 0$.

- Αν $a(a^2-1)=0\Leftrightarrow a=0$ ή $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$

Με $\alpha=0$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x+2}{-x^4+4}=0$

Με $\alpha=1$ είναι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+3x^2-6x+2}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty$$

Με $\alpha=-1$ είναι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4-3x^2-6x+2}{-x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^4}{-x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty$$

- Αν $a\left(a^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ και $\alpha\neq 1$ και $\alpha\neq -1$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^4+3ax^2-6x+2}{\left(a^2-1\right)x^4+ax^2+4}=\frac{a}{a^2-1}.$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\begin{cases} 0 \ \text{αν}\ a=0 \\ +\infty \ \text{αν}\ a=1 \\ +\infty \ \text{αν}\ a=-1 \\ \dfrac{a}{a^2-1} \ \text{αν}\ a=0,1,-1 \end{cases}$

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+ax^2+6x-2}{(a-1)x^4+x^2+4x+2}$

(β) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{7ax^3+6x^2+3x+2}{(a-1)x^4+x^3+4x-8}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^4+ax^2+6x-2}{(a-1)x^4+x^2+4x+2}$ είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\kappa,+\infty)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $a-1=0$ και $a-1\neq 0$.

- Αν $a-1=0\Leftrightarrow a=1$ τότε :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+x^2+6x-2}{x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^4}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)=3(+\infty)=+\infty$$

- Αν $a-1\neq 0\Leftrightarrow a\neq 1$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+ax^2+6x-2}{(a-1)x^4+x^2+4x+2}=\frac{3}{a-1}.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases} +\infty \ \text{αν}\ a=1 \\ \dfrac{3}{a-1} \ \text{αν}\ a\neq 1 \end{cases}$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{7ax^3+6x^2+3x+2}{(a-1)x^4+x^3+4x-8}$ ορίζεται σε διάστημα τις μορφής $(-\infty,\kappa)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $a(a-1)=0$ και $a(a-1)\neq 0$.

- Αν $a(a-1)=0 \Leftrightarrow a=0$ ή $\alpha=1$ τότε:

Με $\alpha=0$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{6x^2+3x+2}{-x^4+x^3+4x-8}=0$.

Με $\alpha=1$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{7x^3+6x^2+3x+2}{x^3+4x-8}=7$.

- Αν $a(a-1)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ και $\alpha\neq 1$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{7ax^3+6x^2+3x+2}{(a-1)x^4+x^3+4x-8}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } a=0 \\ 7 & \text{αν } a=1 \\ 0 & \text{αν } a\neq 0,1 \end{cases}$

Ασκήσεις

3. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{8x^3+2x^2+5}{4x^2+x-3}$ (γ) $f(x)=\dfrac{3x^4+3x+4}{-8x^2+6x+7}$

(β) $f(x)=\dfrac{2x^4+6x^2+3}{-x^4+5x+1}$ (δ) $f(x)=\dfrac{3x^5+6x+4}{2x^4+x^2+4}$

4. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x+1}$ (γ) $f(x)=\dfrac{3x^6+7x+8}{-2x^4+x+7}$

(β) $f(x)=\dfrac{-3x^2+5x-1}{x^3+4}$ (δ) $f(x)=\dfrac{-8x^6+3x^2+7}{2x^4+x^2+3}$

5. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{(a^2+1)x^2-6x+3}{3x^2+4}$ (γ) $f(x)=\dfrac{(a^4+2)x^4+ax^2-6x+2}{(a^2+1)x^2+5x+6}$

(β) $f(x)=\dfrac{(a-1)x^3+(a+2)x^2-3x-4}{ax^2+3x+4}$ (δ) $f(x)=\dfrac{(\ln a-1)x^3+ax^2-7x+3}{ax^2+3x+4}$

(γ) $f(x)=\dfrac{(a^2-1)x^4+ax^3+4x+3}{ax^4+(a+1)x^3+4x-1}$ (ε) $f(x)=\dfrac{(a-2)x^3+4ax^2+7x-8}{(a-1)x^3+ax^2+7x+9}$

6. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{(2^a-4)x^3+(a-1)x^2+5x-6}{ax^3+(a-1)x^2+x+6}$ (γ) $f(x)=\dfrac{(a+1)x^4-7ax^2+3x-4}{ax^3+x^2+7x-4}$

(β) $f(x)=\dfrac{(a^2+1)x^4+6ax^2+7x+4}{ax^2+x+3}$ (δ) $f(x)=\dfrac{7x^3-6ax^2+x+4}{ax^3+a^2x^2+4x+1}$

Μέθοδος 3

- Για να υπολογίσουμε όρια της μορφής $\sqrt{f(x)}$ όπου f πολυώνυμο όταν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη του x με τον μεγαλύτερο εκθέτη.
- Για να υπολογίσουμε όρια της μορφής $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ ή $\dfrac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$ όπου f,g πολυώνυμα βγάζουμε κοινό παράγοντα στις f,g τη δύναμη του x με τον μεγαλύτερο εκθέτη.
- Για να υπολογίσουμε όρια της μορφής $\sqrt{f(x)}\pm g(x)$ όπου f,g πολυώνυμα βγάζουμε κοινό παράγοντα στις f,g τη δύναμη του x με τον μεγαλύτερο εκθέτη. Εάν μετά την εξαγωγή κοινού παράγοντα προκύπτει η απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)\cdot 0$ τότε για τον υπολογισμό του ορίου πολλαπλασιάζω με την συζυγή παράσταση της $\sqrt{f(x)}\pm g(x)$.

Παράδειγμα 7

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{4x^4+x^2}{x^2+2}}+3\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+2}{4x^2+3}}-\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x^4+2}}+\dfrac{1}{2}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{4x^4+x^2}{x^2+2}}+3$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,1]\cup(1,+\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{4x^4+x^2}{x^2+2}}+3\right)=1-(+\infty)+3=-\infty$$

(β) η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{\frac{x^2+2}{4x^2+3}}-\sqrt{\frac{x^3+1}{x^4+2}}+\frac{1}{2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[-1,+\infty)$. Επομένως δεν μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Παράδειγμα 8

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-4}$ **(γ)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+1}$

(β) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+2}}{x^2+3x}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$ Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{2-\frac{4}{x}}=\frac{1}{2}$$

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+2}}{x^2+3x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{0,-3\}$ Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+2}}{x^2+3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x^2+3x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = 0$$

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x+2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Παράδειγμα 9

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+3}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$ **(β)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$ **(γ)** $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+x+3}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+3}}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+3}}{\frac{4x^2-4x^2-1}{2x-\sqrt{4x^2+1}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-\left(x-\sqrt{x^2+x+3}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)\left(2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=$$

$$=(+\infty)(-\infty)(4)=-\infty$$

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[-1,+\infty)$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}\right)=1+1=2$$

(γ) Η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu\dfrac{\pi}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{0\}$ Είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\pi\frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)=\pi\cdot1=\pi$$

Παράδειγμα 10

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **(β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\eta\mu0=0$

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{4x^2-4x^2-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2$$

Παράδειγμα 11

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+2}-4x\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+3x\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+x+2}-4x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+2}-4x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-4x\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\left(9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-4x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-4x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\left(9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-4\right)\right] = (+\infty)\left(\sqrt{9}-4\right) = -\infty$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+3x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+3x\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+3\right)\right]=(+\infty)(1-3)=-\infty$$

Παράδειγμα 12

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^4+2x^2+3}-\sqrt{x^4-3x^3}\right)$

(β) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{-3x+8}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3x^4+2x^2+3}-\sqrt{x^4-3x^3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^4+2x^2+3}-\sqrt{x^4-3x^3}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}-\sqrt{x^4\left(1-\frac{3}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}}-x^2\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)\right]=$$

$$=(+\infty)\left(\sqrt{3}-1\right)=+\infty$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{-3x+8}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{-3x+8}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}\right)\right]=$$

$$(+\infty)\left(\sqrt{2}-0\right)=+\infty$$

Παράδειγμα 13

Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+3}-\sqrt{x^2+3}\right)$

(β) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2-4}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3x^2+x+3}-\sqrt{x^2+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+3}-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)\right]=$$

$$(+\infty)(0-1)=-\infty$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2-4}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-2]\cup[2,4]$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$(+\infty)(0-1)=-\infty$$

Παράδειγμα 14

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+2}-3x\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+x+2}-3x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Είναι :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+2}-3x\right)\overset{(+\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x+2-9x^2}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3\right)}=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3}=\frac{1}{6}$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{4x^2+x+3}+2x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Είναι :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x\right)\overset{(+\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2}=$$

$$\frac{1}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

Παράδειγμα 15

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{4x^2+3}\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{4x^2+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{4x^2+3}\right)\overset{(+\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2-3}{\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{4x^2+3}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2}\right)\overset{(+\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}}=0$$

Παράδειγμα 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+5x+4}$. **Να βρείτε τα** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **και** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+5x+4}\right)\overset{(+\infty\cdot 0)}{=}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-1}{\sqrt{4x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+5x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=-\frac{3}{4}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+5x+4}\right)\overset{(-\infty\cdot 0)}{=}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-1}{\sqrt{4x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+5x+4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3-\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα 17

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+3}+\sqrt{4x^2+5}-5x\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{4x^2+3}+3x\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+x+3}+\sqrt{4x^2+5}-5x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+3}+\sqrt{4x^2+5}-5x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+3}-3x+\sqrt{4x^2+5}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{\sqrt{9x^2+x+3}+3x}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}+2x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+3x}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}+2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+3}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}+2x}\right) =$$

$$=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$$

(β) Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{4x^2+3}+3x$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{4x^2+3}+3x\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+8}+x+\sqrt{4x^2+3}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+8}{\sqrt{x^2+3x+8}-x}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(3+\frac{8}{x}\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}-x}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3+\frac{8}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}-1}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}\right) =$$

$$=-\frac{3}{2}+0=-\frac{3}{2}$$

Παράδειγμα 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{16x^2+3x+5}+\sqrt{4x^2+5}+6x$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+3x+5}+\sqrt{4x^2+5}+6x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+3x+5}+4x+\sqrt{4x^2+5}+2x\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{16x^2+3x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+3x+5}-4x}+\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}-2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+5}{\sqrt{16x^2+3x+5}-4x}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(16+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-4x}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{16+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}-4x}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3+\frac{5}{x}}{-\sqrt{16+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}-4x}+\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x}\right]=\frac{3}{-8}+0=-\frac{3}{8}$$

Παράδειγμα 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{ax^2+8x+4}-\sqrt{4x^2+3}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις i) $a=0$, ii) $a<0$ και iii) $a>0$.

i) Αν $a=0$ τότε η f έχει τύπο $f(x)=\sqrt{8x+4}-\sqrt{4x^2+3}$

Για να ορίζεται η f πρέπει: $\left\{\begin{matrix} 8x+4\ge 0 \\ 4x^2+3\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x+4}-\sqrt{4x^2+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)\right]=$$

$$=(+\infty)(0-2)=-\infty$$

ii) Αν $a<0$ τότε για να ορίζεται η f πρέπει:

$$\left\{\begin{matrix} ax^2+8x+4\ge 0 \\ 4x^2+3\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow ax^2+8x+4\ge 0 \qquad (1)$$

Είναι $\Delta=16(4-a)$

- $\text{Αν}\begin{cases}\Delta\le 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16(4-a)\le 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-a\le 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 4\\ a<0\end{cases}\text{αδύνατη}$
- $\text{Αν}\begin{cases}\Delta> 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16(4-a)> 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-a> 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a< 4\\ a<0\end{cases}\text{τότε}:$

Η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x\in[x_1,x_2]$, όπου x_1,x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου ax^2+8x+4. Τότε η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=[x_1,x_2]$ και δεν έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

iii) Αν $a>0$ τότε για να ορίζεται η f πρέπει:

$$\begin{cases}ax^2+8x+4\ge 0\\ 4x^2+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow ax^2+8x+4\ge 0 \qquad (1)$$

Είναι $\Delta=16(4-a)$

- $\text{Αν}\begin{cases}\Delta=0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16(4-a)=0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-a=0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ a>0\end{cases}\Rightarrow a=4$

Τότε η f έχει πεδίο ορισμού $\mathrm{A}=\mathbb{R}$.

Με $a=4$ η f έχει τύπο $f(x)=\sqrt{4x^2+8x+4}-\sqrt{4x^2+3}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+4}-\sqrt{4x^2+3}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+8x+4-4x^2+3}{\sqrt{4x^2+8x+4}+\sqrt{4x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{\sqrt{4x^2+8x+4}+\sqrt{4x^2+3}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(8+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}=\frac{8}{4}=2$$

Άρα με $a=4$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

- $\text{Αν}\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16(4-a)<0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>4\\ a>0\end{cases}\Rightarrow a>4$

Τότε η f έχει πεδίο ορισμού $\mathrm{A}=\mathbb{R}$.

Είναι:

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+8x+4}-\sqrt{4x^2+3}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{a+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)\right] = (+\infty)\left(\sqrt{a}-2\right) = +\infty$$

(επειδή $a>4 \Rightarrow \sqrt{a}>2 \Leftrightarrow \sqrt{a}-2>0$). Άρα με $a>4$ είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- $\text{Αν}\begin{cases}\Delta>0\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16(4-a)>0\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<4\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<4$

Τότε η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$ όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου ax^2+8x+4.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+8x+4}-\sqrt{4x^2+3}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{a+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{a+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)\right] =$$

$$=(+\infty)\left(\sqrt{a}-2\right) = -\infty$$

(επειδή $0<a<4 \Rightarrow \sqrt{a}<2 \Leftrightarrow \sqrt{a}-2<0$). Άρα με $0<a<4$ είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Ασκήσεις

7. Να βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}$ και $\lim_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+4}}+\sqrt{\dfrac{9x+2}{x^2+1}}-5x$

(β) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-8}{x^2+1}}+\sqrt{\dfrac{4x^3+2}{x^3+1}}+5$

(γ) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4+2}-5$

(δ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{8x^4+x^2+2}{2x^4+5}}-\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}}$

8. Να βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}$ και $\lim_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}+3x$

(β) $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2+2}-2x$

(γ) $f(x)=\sqrt{3x^2+x+5}-\sqrt{4x^2+x+3}$

(δ) $f(x)=\sqrt{9x^2+5x+1}-\sqrt{3x^4+2}$

(ζ) $f(x)=\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{3x-2}$

(η) $f(x)=\sqrt{3x^4+2x^2+1}-\sqrt{2x^4+x+8}$

(θ) $f(x)=\sqrt{3x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x+4}$

(ι) $f(x)=\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{3-x}$

(ε) $f(x)=\sqrt{x^4+x^2+2}-\sqrt{3x^2+x+4}$ (κ) $f(x)=\sqrt{3x^4+x^2+2}-\sqrt{x^2+3x+5}$

9. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-2x$

(β) $f(x)=\sqrt{9x^2+x+4}+3x$

(γ) $f(x)=\sqrt{x^4+x+2}-\sqrt{x^4+x^2+4}$

(δ) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{x^2-4}$

(ε) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}-\sqrt[3]{x^3-1}$

(ζ) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}$

(η) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}-x$

(θ) $f(x)=\sqrt{16x^4+x^2+2}-x^2$

(ι) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

(κ) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$

10. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\sqrt{4x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+1}-3x$

(β) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{9x^2+x+3}-4x$

(γ) $f(x)=\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{9x^2+x+1}-5x$

(δ) $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{9x^2+1}$

(ε) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x}+2x$

11. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{3x^2+1}$

(β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{\sqrt{4x^2+3}+x}$

(γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$

(δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-2}}{\sqrt{x+3}}$

(ε) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$

(ζ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+x}-x}$

(η) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(θ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+5}+x}$

(ι) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2+2}}{4x^2+5}$

(κ) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

Μέθοδος 4 (Εύρεση παραμέτρων)

Παράδειγμα 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2}{x-3}-ax+\beta$. **Να βρείτε τα** $a,\beta\in\mathbb{R}$ **ώστε να είναι** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=6$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{3\}$. Για κάθε $x\neq 3$ είναι:

$$f(x)=\frac{4x^2-ax^2+\beta x+3ax-3\beta}{x-3}\Rightarrow f(x)=\frac{(4-a)x^2+(3a+\beta)x-3\beta}{x-3}$$

- Αν υποθέσουμε ότι $4-a\neq 0\Leftrightarrow a\neq 4$ τότε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και αποκλείεται να είναι 6.
- Με $a=4$ η $f(x)$ γίνεται: $f(x)=\dfrac{(12+\beta)x-3\beta}{x-3}$.

Αν $12+\beta=0\Leftrightarrow\beta=-12$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{36}{x-3}=0$.

Αν $12+\beta\neq 0\Leftrightarrow\beta\neq -12$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(12+\beta)x-3\beta}{x-3}=12+\beta$.

Επομένως, πρέπει $12+\beta=6\Leftrightarrow\beta=-6$.
Άρα με $\alpha=4$ και $\beta=-6$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=6$.

Παράδειγμα 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x-1}+ax-\beta$. **Να βρείτε τα** $a,\beta\in\mathbb{R}$ **ώστε να είναι** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=10$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Για κάθε $x\neq 2$ είναι $f(x)=\dfrac{(4+2a)x^2-(a+2\beta)x+\beta+1}{2x-1}$.

- Αν υποθέσουμε ότι $4+2a\neq 0\Leftrightarrow a\neq -2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ και αποκλείεται να είναι 10.

* Με $a=-2$ η $f(x)$ γίνεται: $f(x)=\dfrac{-(-2+2\beta)x+\beta+1}{2x-1}$.

Αν $-(-2+2\beta)=0 \Leftrightarrow \beta=1$ τότε $f(x)=\dfrac{2}{2x-1}$ και είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Αν $\beta\neq 1$ τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-(-1+2\beta)x+\beta+1}{2x-1}=\dfrac{2-2\beta}{2}=1-\beta$. Επομένως, πρέπει $1-\beta=10 \Leftrightarrow \beta=-9$.

Άρα με $a=-2$ και $\beta=-9$ το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=10$.

Παράδειγμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+x+3}-\sqrt{x^2+3}+ax-\beta$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{5}{6}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+3}-\sqrt{x^2+3}+ax-\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+ax-\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+a-\frac{\beta}{x}\right)\right]=(+\infty)(3-1+a)=$$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{αν } 2+a>0\Leftrightarrow a>-2\\ -\infty & \text{αν } 2+a<0\Leftrightarrow a<-2\end{cases}$$

Άρα με $a\neq-2$ το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ δεν είναι $-\dfrac{5}{6}$.

Αν $a=-2$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+3}-\sqrt{x^2+3}-2x-\beta\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+3}-3x+x-\sqrt{x^2+3}-\beta\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{\sqrt{9x^2+x+3}+3x}-\frac{3}{x+\sqrt{x^2+3}}-\beta\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+3x}-\frac{3}{x+\sqrt{x^2+3}}-\beta\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+3}-\frac{3}{x+\sqrt{x^2+3}}-\beta\right) = \frac{1}{6}-0-\beta = \frac{1}{6}-\beta$$

Επομένως, πρέπει $\frac{1}{6}-\beta = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα, με $a=-2$ και $\beta = 1$ είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{5}{6}$.

Παράδειγμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2-3x}+(a+1)x$. Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x}+(a+1)x\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(9-\frac{3}{x}\right)}+(a+1)x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x\sqrt{9-\frac{3}{x}}+(a+1)x\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{9-\frac{3}{x}}-a-1\right)\right]=(+\infty)(3-a-1)=$$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{αν } 2-a>0\Leftrightarrow a<2\\ -\infty & \text{αν } 2-a<0\Leftrightarrow a>2\end{cases}$$

Άρα με $a\neq 2$ το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Αν $a=2$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x}+3x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{9x^2-3x-9x^2}{\sqrt{9x^2-3x}-3x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-3x}{-x\sqrt{9-\frac{3}{x}}-3x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x\left(\sqrt{9-\frac{3}{x}}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{9-\frac{3}{x}}+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Άρα με $a=2$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{2}$

Παράδειγμα 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+3}+ax+\beta$. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+3}+ax+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+ax+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-a-\frac{\beta}{x}\right)\right]=(+\infty)(1-2-a)=(+\infty)(-1-a)=$$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{αν } -1-a>0\Leftrightarrow a<-1\\ -\infty & \text{αν } -1-a<0\Leftrightarrow a>-1\end{cases}$$

Επομένως, όταν $a\neq -1$ το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ αποκλείεται να είναι 4.

Αν $a=-1$ η f έχει τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+3}-x+\beta$. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{4x^2+3}-x+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}+x-\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)+\beta\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}-\frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}-2x}+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}-\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}-\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}+\beta\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2+\frac{3}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}-\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}+\beta\right]=\frac{2}{-2}-0+\beta=-1+\beta$$

Επομένως, πρέπει $-1+\beta=4\Leftrightarrow\beta=5$. Άρα με $\alpha=-1$ και $\beta=5$ είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Παράδειγμα 25

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$ όταν:

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{4x^2+3}-ax+\beta$$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{4x^2+3}-ax+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}-ax+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-a+\frac{\beta}{x}\right)=(+\infty)(3-a)=$$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{αν } 3-\alpha>0\Leftrightarrow\alpha<3\\ -\infty & \text{αν } 3-\alpha<0\Leftrightarrow\alpha>3\end{cases}$$

Επομένως με $\alpha\neq 3$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ δεν είναι $\frac{3}{2}$.

Αν $a=3$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{4x^2+3}-3x+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x+\sqrt{4x^2+3}-2x+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x}+\beta\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x}+\beta\right)=\frac{1}{2}+0+\beta=\beta+\frac{1}{2}$$

Επομένως, πρέπει $\beta+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\beta=1$. Άρα με $a=3$ και $\beta=1$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$.

Ασκήσεις

12. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$ όταν $f(x)=\frac{3x^2+1}{x-1}-ax+\beta$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x^2+2}{x-1}+ax-\beta$. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}+ax+\beta$. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(3^{a}-1)x^{3}+3^{\beta}x^{2}+x+2}{x^{2}+1}$. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=27$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-3x^{2}+2x-4}{x-1}-ax-\beta$. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^{2}+x+2}+(a-1)x$ να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

18. Αν $f(x)=\sqrt{x^{2}+2x+8}+(a-3)x$, να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^{2}+x+2}-(a+1)x$. Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^{2}+x+2}+\sqrt{x^{2}+3}+ax-\beta$. Να βρείτε το $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{4x^{2}+x}-ax-\beta$. Να βρείτε το $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^{2}+2}+\sqrt{x^{2}+3}+ax-\beta$. Να βρείτε το $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$.

23. Έστω f μια πολυωνυμική συνάρτηση με $f(0)=-4$. Να ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+a}=2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x+a}=\beta$, $\beta\neq 0$ να βρείτε τον τύπο της f και τα a,β.

24. Να βρείτε τις τιμές των $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2+\beta x}\right)=1$.

Μέθοδος 5

Για τον υπολογισμό ορίων στο άπειρο που περιέχουν λογαριθμικές ή εκθετικές συναρτήσεις συνήθως χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων στο άπειρο. Ειδικά:

- Εάν η συνάρτηση είναι της μορφής $\alpha^{f(x)}$ βρίσκουμε πρώτα το όριο της $f(x)$ και μετά τις εκθετικής.
- Εάν η συνάρτηση είναι της μορφής $\frac{f(\alpha^x,\beta^x)}{g(\alpha^x,\beta^x)}$ βγάζουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρανομαστή: (α) αν το $x\to+\infty$ τη δύναμη της μεγαλύτερης βάσης (β) αν το $x\to-\infty$ τη δύναμη της μικρότερης βάσης
- Εάν η συνάρτηση είναι της μορφής $\ln[f(x)]-\ln[g(x)]$ την μετασχηματίζουμε με βάση τις ιδιότητες των λογαρίθμων σε $\ln[\varphi(x)]$ και υπολογίζουμε το όριο της $\varphi(x)$ και μετά το όριο της $\ln[\varphi(x)]$.

Παράδειγμα 26

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-2}{x^2+2}}$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2^x+5^{x+2}-7^{x+1}}{2\cdot 4^x-3^{x+2}}$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)-2\ln x\right]$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^x+2\right)\right]$

Λύση

(α) Υπολογίζουμε πρώτα το: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2}{x^2+2}=1$ και άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-2}{x^2+2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{1}{2}$.

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot2^x+5^{x+2}-7^{x+1}}{2\cdot4^x-3^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot2^x+25\cdot5^x-7\cdot7^x}{2\cdot4^x-9\cdot3^x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7^x\left[3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^x+25\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^x-7\right]}{4^x\left[2-9\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{4}\right)^x\frac{3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^x+25\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^x-7}{2-9\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^x}=-\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7}{4}\right)^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{7}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=0$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)-2\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)-\ln x^2\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{2}{x}+\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)^2\right]\quad(1)$$

Έχουμε: $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0$

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$.

(1) $\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\dfrac{2}{x}+\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)^2\right]=\ln0=-\infty$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(e^x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+2}$ (1)

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{2}{e^x}}=1$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+2}=\ln1=0$$

Ασκήσεις

25. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+2^x+3^x}{1+5^x+e^x}$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}-3^x+2}{2^x+3^{x+1}+2}$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}-x$

(ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}-3^x+2}{2^x+3^{x+1}+2}$

(ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}-x$

(η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^{x+2}+2^x}{\alpha^x+2^{x+1}}$, $\alpha>0$

26. Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+x-1\right]$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+x^4-1\right)\right]$

(γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-2^{x+3}}{2\cdot3^x+2^{x+1}}$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x^2+x+1}{x+5}}$

27. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3^x+x^3\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2^x+x^2+10\right)\right]$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+5}+2e^x+3}{5e^x+1}$

28. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{3^x+5\cdot7^x}{7^x+2\cdot4^x}$. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

29. Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+x+1\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+2}{x^2+1}$

(γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+x+1}{x+2}}$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

30. Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\ln x+2}{4\ln^3 x+\ln^2 x+1}$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-x-2\right]$

(δ) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+8^{-\frac{1}{x}}}{3-8^{-\frac{1}{x}}}$

31. Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x}\right)^{x}$

Μέθοδος 6

Για τον υπολογισμό τριγωνομετρικών ορίων στο άπειρο συνήθως χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής.

Παράδειγμα 27

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\eta\mu3x}{x^4+8}$

(β) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3\left(3\sigma\upsilon\nu x+2\right)}{x^4+2}$

(ε) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{x^2+1}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x^4+2}{4x^4+3}\right)$

(ζ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^6+2}{4x^6+1}\eta\mu\dfrac{\pi x^2+2}{2x^2+3}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x\eta\mu3x}{x^4+8}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\left|f(x)\right|=\left|\dfrac{x\eta\mu3x}{x^4+8}\right|=\left|\dfrac{x}{x^4+8}\right|\left|\eta\mu3x\right|\le\left|\dfrac{x}{x^4+8}\right|$ οπότε

$\left|f(x)\right|\le\left|\dfrac{x}{x^4+8}\right|$. Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{x}{x^4+8}\right|=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{0\}$.

Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $|f(x)| = \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$ οπότε $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3(3\sigma\upsilon\nu x + 2)}{x^4+2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)| = \left|\frac{x^3(3\sigma\upsilon\nu x+2)}{x^4+2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^4+2}\right| |3\sigma\upsilon\nu x + 2| \leq 5\left|\frac{x^3}{x^4+2}\right|$$

οπότε $|f(x)| \leq 5\left|\frac{x^3}{x^4+2}\right|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(5\left|\frac{x^3}{x^4+2}\right|\right) = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(δ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x^4+2}{4x^4+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x^2+1}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x^4+2}{4x^4+3}\right) = 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(ε) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^6+2}{4x^6+1}\eta\mu\frac{\pi x^2+2}{2x^2+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^6+2}{4x^6+1}\eta\mu\frac{\pi x^2+2}{2x^2+3}\right) = \frac{1}{4}\eta\mu\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left|f(x)\right| = \left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x|$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

Παράδειγμα 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x\eta\mu\frac{1}{x}$. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left|f(x)\right| = \left|\eta\mu x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |\eta\mu x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |\eta\mu x|$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}|\eta\mu x| = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

- Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left|f(x)\right| = \left|\eta\mu x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |\eta\mu x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq \left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Ασκήσεις

32. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^4+8}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x^4+2}{x^2+1}$

(β) $f(x) = \dfrac{x^4+2}{x^6+1}\eta\mu\dfrac{\pi x+3}{2x-1}$

(γ) $f(x) = \dfrac{4x^2+2}{2x^2+3}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x^3+2}{4x^3+2}$

(δ) $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x^2+2}\eta\mu\dfrac{\pi x^2+4}{2x^2+3}$

33. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ όταν:

(α) $f(x) = \dfrac{(4x^2+2)\eta\mu 3x}{x^3+1}$

(ζ) $f(x) = \dfrac{3x^2-2x\eta\mu x+1}{4x^2+5x\sigma\upsilon\nu x+3}$

(β) $f(x)=\dfrac{5x^2+x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{7x^2+4}$

(γ) $f(x)=x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}$

(δ) $f(x)=x\eta\mu^3\dfrac{1}{x}$

(ε) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x}{5x+4}\eta\mu\dfrac{1}{x}$

(η) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

(θ) $f(x)=\dfrac{4x^2-x\eta\mu x+5}{x^2+\eta\mu x+2}$

(ι) $f(x)=\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\eta\mu\dfrac{\pi}{x}$

(κ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-3x}{\eta\mu x+x}$

34. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{x\eta\mu x-x^2\sigma\upsilon\nu x}{x^3+1}$

(β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+5}-\sqrt{4x^2+3x}}{2x+\eta\mu x}$

(γ) $f(x)=\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu x$

(δ) $f(x)=\dfrac{3x^2-x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{2x^2+5}$

35. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν:

(α) $f(x)=\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x-2}$

(β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{x+2}-\sigma\upsilon\nu\sqrt{x+5}$

Μέθοδος 7

Όταν μας δίνεται μια ανίσωση της μορφής $g(x)\le f(x)\le h(x)$ και μας ζητείται ο υπολογισμός του $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής.

Ειδικές περιπτώσεις

- Αν μας δίνεται ανίσωση της μορφής $f(x)\ge g(x)$ και μας ζητάνε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ τότε βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ και άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- Αν μας δίνεται ανίσωση της μορφής $f(x)\le g(x)$ και μας ζητάνε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ τότε βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ και άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Παράδειγμα 30

Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $x\eta\mu\frac{3}{x}\le f(x)\le\frac{3x^2+1}{x^2+1}$ να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

Είναι:

- $\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\left(3\frac{\eta\mu\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\right)=3\cdot 1=3$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=3$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$.

Παράδειγμα 31

Αν $f(x)+x^2-e^x<0$, $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Λύση

Έχουμε ότι $f(x)+x^2-e^x<0 \Leftrightarrow f(x)<e^x-x^2$

Αλλά $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-x^2\right)=0-\infty=-\infty$ άρα και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Ασκήσεις

36. Αν για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{2x^2-1}{x^2+3}<f(x)<\frac{2x^3+x+2}{x^3-1}$, να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

37. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $x\eta\mu\frac{4}{x}\le f(x)\le\frac{4x^2+1}{x^2+2}$, να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

38. Αν ισχύει: $f(x)\le x^3-1-\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

39. Αν ισχύει η ανισότητα $\frac{f(x)}{x^2}+\sigma\upsilon\nu x\leq\frac{x^3+2}{x^2}$ για κάθε $x\neq 0$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

40. Αν ισχύει: $f(x)\geq\sqrt[4]{x^4+5x^2+2}+2x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

41. Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2+4}\leq f(x)\leq\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1},\quad x>0$$

Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right]$

42. Οι συναρτήσεις f,g έχουν πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Αν για κάθε $x\in(0,+\infty)$, ισχύει: $f^2(x)+g^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2\frac{1}{x}\leq 2\left(\frac{f(x)}{x}+\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot g(x)\right)$

να αποδείξετε ότι:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$

Μέθοδος 8 (Υπολογισμός ορίου μέσω βοηθητικής συνάρτησης)

Όταν δεν γνωρίζουμε των τύπο της f αλλά γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει την $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$, τότε θέτουμε την παράσταση έστω $g(x)$ και λύνουμε ως προς $f(x)$. Κατόπιν υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$.

Παράδειγμα 32

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2f(x)+\eta\mu x-1\right)=4$, **βρείτε τα όρια:**

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{f(x)+x^2}$

Λύση

(α) Θέτουμε $g(x)=x^2f(x)+\eta\mu x-1$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=4$

Έχουμε $f(x)=\dfrac{1}{x^2}g(x)-\dfrac{\eta\mu x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}$ για $x\neq0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}g(x)-\dfrac{\eta\mu x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+x^2\right)$ (1)

Αλλά, $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x^2}\leq\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\leq\dfrac{1}{x^2}$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right)=0$.

Από την σχέση (1) θα πάρουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}g(x)-\frac{\eta\mu x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+x^2\right)=0\cdot4-0+0+(+\infty)=+\infty$$

(β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^2}{f(x)+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left[\dfrac{f(x)}{x^2}-1\right]}{x^2\left[\dfrac{f(x)}{x^2}+1\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x^2}-1}{\dfrac{f(x)}{x^2}+1}\quad(2)$$

Αλλά: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^4}g(x)-\dfrac{\eta\mu x}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}\right)=0\cdot4-0+0=0$

Άρα, από την σχέση (2) θα πάρουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{f(x)+x^2}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$.

Ασκήσεις

43. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή συνάρτηση και είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)+\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=3$, να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

44. Αν για τις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}^*$, ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x\cdot f(x)+\sqrt{x}\cdot g(x)\right)=-5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot f(x)+2g(x)\right)=4$, να βρείτε τα:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

45. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x+2\right)=0$, να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x\cdot f(x)-2x^2+1}}{x\cdot f(x)-3x^2+2}$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$

(ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x\cdot f(x)-3x^2+2\right)$

46. Για την συνάρτηση f ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=1$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ ώστε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3f(x)+(\kappa+1)x+1}{x\cdot f(x)-3x^2+2}=2$.

47. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(3x-1)f(x)+x^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=2$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

48. Για τις συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x+1}=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=3$. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-3\mu\cdot g(x)}{f(x)-g(x)}=-2$ να βρείτε τον $\mu\in\mathbb{R}$.

49. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $(x-1)f(x)+f(1-x)=x^2$. Να βρείτε:

(α) τον τύπο της f

(β) το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

(δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\frac{3}{x}\right]$

50. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}=0$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x^\nu\right]$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^\nu\right]$.

51. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $xf(x)-5x^4-x+2\eta\mu x^2=0$. Να βρείτε τον τύπο της f και το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

52. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^4+3x^2+1\right)f(x)\right]=1821$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

53. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $x^2f(x)-2x^5+1-\sigma\upsilon\nu^3x=0$. Να βρείτε τον τύπο της f και το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

54. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(3x)}{f(x)}=5$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(243x)}{f(x)}$

55. Να βρεθεί το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ αν ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{P}(x)}{x^2-2x+1}=3$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\mathrm{P}(x)}{x^2-2x+1}=3$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\frac{x-1}{x},\ x>0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Να λυθεί η εξίσωση: $\ln(\ln x)+\dfrac{\ln x-1}{\ln x}=1-\ln x+\dfrac{e-x}{e}$.

(γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty]\to\mathbb{R}$ με:

$f(xy)=f(x)f(y)-\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$ για κάθε $x,y\geq 0$. Να βρείτε:

(α) τον τύπο της f,

(β) το όριο $\mathrm{A}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

58. Αν $f(x)=(\kappa+1)\ln x-\ln 2+\ln(x-1),\ \ x\geq 2,\ \ \kappa\geq -2$. Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

59. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x+\left|z+\dfrac{1}{z}\right|-\sqrt{\alpha x^2+\left|z+\dfrac{1}{z}\right|x+\gamma}$ με $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}^*$, z μιγαδικός με $z\neq 0,-1$. Αν είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha>0$ (β) $\alpha=1$ και $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2$ (γ) $\dfrac{1+z^\nu}{1+\bar{z}^\nu}=\left(\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^\nu$

60. (α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\eta\mu x}{x^2+1}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)$

(β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z=\alpha+\beta i$, όπου α,β οι αριθμοί που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και $w=\kappa+\lambda i$, με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Αν οι εικόνες του w βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο την εικόνα του z και ακτίνα 2, να αποδείξετε ότι: $\kappa^2+\lambda^2+4\lambda=0$.

(γ) Αν επιπλέον το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\kappa-2)x^2+6x+3}{\lambda x+3}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε τα κ,λ καθώς και το όριο αυτό.

61. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}$ όταν:

(α) $f(x)=\dfrac{|x+4|-2x}{|x-1|+2}$

(β) $f(x)=\dfrac{\left|x^2-6x+5\right|+x}{|x+1|-3}$