Συνάρτηση ένα προς ένα

Ορισμός

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι «ένα προς ένα» αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$ η ισοδύναμα όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$.

Για τις συναρτήσεις ένα προς ένα ισχύει η πρόταση:

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε η f είναι ένα προς ένα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε ο λόγος μεταβολής

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

είναι διάφορος του μηδενός (η f θα είναι γνησίως αύξουσα που σημαίνει ότι για $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ ή γνησίως φθίνουσα που σημαίνει ότι $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$. Όμως και για τις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$). Οπότε η f θα είναι ένα προς ένα.

Παρατηρήσεις

- Αν η f είναι ένα προς ένα, τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει το διάγραμμα της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Όταν γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα προς ένα και ότι ισχύει $f(a) = f(b)$, τότε ισχύει $a = b$.
- Αν $a \neq b$ και $f(a) = f(b)$ τότε η f δεν είναι ένα προς ένα.

- Αν η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα και το $0 \in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο A.
- Έστω A_1 και A_2 δύο υποσύνολα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f με $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Αν η f είναι ένα προς ένα στο A_1 και ένα προς ένα στο A_2, αυτό σημαίνει ότι η f είναι ένα προς ένα στο $A_1 \cup A_2$.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι ένα προς ένα κάνουμε ένα από τα:

- Λέμε έστω $f(x_1)=f(x_2)$ και οδηγούμαστε σε $x_1=x_2$ ή δεχόμαστε ότι $x_1 \neq x_2$ και δείχνουμε ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.
- Δείχνουμε ότι η εξίσωση $y=f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε y που ανήκει στο $f(A)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα.

(α) $f(x)=3-\sqrt{4-x}$

(β) $g(x)=x^2-3x+2, x>2$

(γ) $h(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν: $4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,4]$.

Για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3-\sqrt{4-x_1}=3-\sqrt{4-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{4-x_1}=\sqrt{4-x_2} \Leftrightarrow 4-x_1=4-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι ένα προς ένα.

(β) Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A=(2,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2 \in A$ με:

$$g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow x_1^2-3x_1+2=x_2^2-3x_2+2\Leftrightarrow$$

$$x_1^2-3x_1=x_2^2-3x_2\Leftrightarrow x_1^2-3x_1-x_2^2+3x_2=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1-x_2)-3(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2\\ x_1+x_2-3=0\Leftrightarrow x_1+x_2=3\\ (\text{αδύνατη επειδή } x_1>2 \text{ και } x_2>2 \text{ που σημαίνει ότι } x_1+x_2>4)\end{cases}$$

Άρα η g είναι ένα προς ένα.

(γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν:

$$\begin{Bmatrix}1-x\neq 0\\ \dfrac{1+x}{1-x}>0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x\neq 1\\ (1+x)(1-x)>0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x\neq 1\\ x\in(-1,1)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow x\in(-1,1)$$

Άρα η h έχει πεδίο ορισμού το $A=(-1,1)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A$ με

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{1+x_2}{1-x_2}\right)\Leftrightarrow\frac{1+x_1}{1-x_1}=\frac{1+x_2}{1-x_2}$$

$$(1+x_1)(1-x_2)=(1-x_1)(1+x_2)\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση h είναι ένα προς ένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(α) Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in A$. Αν $\alpha\neq\beta$ και $f(\alpha)=f(\beta)$ να δείξετε ότι η f δεν είναι ένα προς ένα.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x)=x^2-5x+4$ είναι ένα προς ένα.

Λύση

(α) Υποθέτουμε ότι η f είναι ένα προς ένα. Επειδή $\alpha\neq\beta$ και η f είναι ένα προς ένα έπεται ότι $f(\alpha)\neq f(\beta)$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι ένα προς ένα.

(β) Η g έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A$ με

$$g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow x_1^2-5x_1+4=x_2^2-5x_2+4\Leftrightarrow x_1^2-5x_1-x_2^2+5x_2=0\Leftrightarrow$$

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)-5(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2-5)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_1+x_2=5\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει μόνο όταν $x_1 = x_2$. Ισχύει π.χ όταν $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$, δηλαδή $x_1 \neq x_2$. Άρα η g δεν είναι ένα προς ένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα και ισχύει $f(a) = f(b)$, να δείξετε ότι $a = b$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι $a \neq b$. Επειδή η f είναι ένα προς ένα και $a \neq b$, τότε θα είναι $f(a) \neq f(b)$ που είναι άτοπο. Άρα $a = b$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα.

(α) $f(x) = 3 - \sqrt{4-x}$

(β) $g(x) = x^2 - 3x + 2, x > 2$

(γ) $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Λύση

(α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

1ος τρόπος

Είναι $f(-1) = f(1) = 3$, άρα η f δεν είναι ένα προς ένα.

2ος τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^4 + 3x_1^2 - 1 = x_2^4 + 3x_2^2 - 1 \Leftrightarrow x_1^4 + 3x_1^2 - x_2^4 - 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) + 3(x_1^2 - x_2^2) = 0 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + 3) \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα η f δεν είναι ένα προς ένα.

(β) Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = g(1) = 1$, άρα η g δεν είναι ένα προς ένα.

(γ) Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow x_1^3-2=x_2^3-2\Leftrightarrow x_1^3-x_2^3=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1^2-x_1x_2+x_2^2=0\ (1)\end{cases}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=0$ είναι $\Delta=-3x_2^2\le 0$

- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow x_2^2=0\Leftrightarrow x_2=0$ τότε από (1) $x_1=0$.
- Αν $\Delta<0$ τότε η σχέση (1) είναι αδύνατη επειδή θα είναι $x_1^2-x_1x_2+x_2^2>0$. Άρα η σχέση (1) ισχύει μόνο όταν $x_1=x_2$. Οπότε η h είναι ένα προς ένα.

Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" ?

(α) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ (γ) $f(x)=-x^2+7$

(β) $f(x)=-x^2+7,\ \ x\ge 0$ (δ) $f(x)=|x|+1$

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα:

(α) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$ (ζ) $f(x)=\ln(e^x+2)-1$

(β) $f(x)=\log_3(x+1)-2$ (η) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

(γ) $f(x)=x^2-3x+2$ (θ) $f(x)=\ln(x^2+2)-3$

(δ) $f(x)=x^2-4x+3, x\in[1,+\infty)$ (ι) $f(x)=x^2+1, x\in(-\infty,0]$

(ε) $f(x)=x^4+x^2-33$ (κ) $f(x)=|x^2-2|+3$

Μέθοδος 2 (Κλαδωτή συνάρτηση)

Για να είναι η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in A_1 \\ h(x) & x\in A_2\end{cases}$ με $A_1\cap A_2=\varnothing$

ένα προς ένα, πρέπει να ισχύουν δύο προϋποθέσεις:

(α) Η f να είναι ένα προς ένα στο A_1 και ένα προς ένα στο A_2 και

(β) $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}3x-5 & x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

είναι ένα προς ένα.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Αν $A_1=(-\infty,1]$ και $A_2=(1,+\infty)$ τότε $A=A_1\cup A_2$ και $A_1\cap A_2=\varnothing$.

- Για να είναι η f ένα προς ένα πρέπει η f να είναι ένα προς ένα στο A_1 και στο A_2 και επιπλέον να ισχύει $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$.
- Για κάθε $x_1,x_2\in A_1$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 3x_1-5=3x_2-5\Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι ένα προς ένα στο A_1.
- Για κάθε $x_1,x_2\in A_2$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^2=x_2^2\Leftrightarrow x_1^2-x_2^2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0\overset{x_1+x_2\neq 0}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$. Άρα η f είναι ένα προς ένα στο A_2.
- Για να καθορίσουμε το $f(A_1)$ θα προσδιορίσουμε τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση $y=3x-5$ (1) έχει λύση ως προς x στο A_1. Η (1) $\Leftrightarrow$ $3x=y+5\Leftrightarrow x=\dfrac{y+5}{3}$ (2). Επειδή $x\le 1$ από (2) $\Rightarrow\dfrac{5+y}{3}\le 1\Leftrightarrow 5+y\le 3\Leftrightarrow y\le -2$. Άρα $f(A_1)=(-\infty,-2]$.
- Για να καθορίσουμε το $f(A_2)$ θα προσδιορίσουμε τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση $y=x^2$ (3) έχει λύση ως προς x στο A_2.
  - Αν $y<0$ τότε η (3) είναι αδύνατη. Άρα οι αριθμοί του διαστήματος $(-\infty,0)$ δεν ανήκουν στο $f(A_2)$.
  - τότε η (3) $\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$ (4) ή $x=-\sqrt{y}$ (απορρίπτεται γιατί $x>1$ και $-\sqrt{y}\le 0$). Επειδή $x>1$ από (2) $\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\sqrt{y}>1\\ y\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}y>1\\ y\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y>1$.

    Άρα $f(A_2)=(1,+\infty)$.
- Είναι $f(A_1)\cap f(A_2)=(-\infty,-2]\cap(1,+\infty)=\varnothing$

Επομένως η f είναι ένα προς ένα.

Ασκήσεις

3. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα:

(α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & x>2 \\ -3x+2 & x\le 2 \end{cases}$

(β) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x>2 \\ -3x+2 & x\le 2 \end{cases}$

Μέθοδος 3

Όταν σε ασκήσεις μας δίνεται μια σχέση που περιέχει την f και συνθέσεις της f με τον εαυτό της (π.χ $f(f(x))$) ή και με άλλες συναρτήσεις (π.χ $f(g(x))$) και μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η f είναι ένα προς ένα κάνουμε τα εξής:

- Θεωρούμε ότι: $f(x_1)=f(x_2)$
- Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το πρώτο μέλος της σχέσης που μας δίνεται και καταλήγουμε στο $x_1=x_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Αν οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ είναι ένα προς ένα.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A και η g το $\mathbb{R}$. Επειδή $f(A)\subseteq A_g=\mathbb{R}$ η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το A.

Υποθέτουμε ότι η $g\circ f$ δεν είναι ένα προς ένα. Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ τέτοια ώστε $x_1\neq x_2$ και $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)\Leftrightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$ (1). Επειδή η g είναι ένα προς ένα από (1) έπεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$ και επειδή η f είναι ένα προς ένα έπεται ότι $x_1=x_2$ που είναι άτοπο. Άρα η συνάρτηση $g\circ f$ είναι ένα προς ένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $(f\circ f)(x)=x^2-x+1$ (1), $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) $f(1)=1$.

(β) η συνάρτηση $g(x)=1+x(1-f(x))$ δεν είναι ένα προς ένα.

Λύση

(α) Θέτουμε όπου $x=f(x)$. Τότε η (1) γίνεται:

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f^2(x)-f(x)+1 \Leftrightarrow f\left(x^2-x+1\right)=f^2(x)-f(x)+1 \quad (2)$$

Εάν θέσουμε όπου $x=1$ στην (2) παίρνουμε ότι:

$$f(1)=f^2(1)-f(1)+1 \Leftrightarrow f^2(1)-2f(1)+1=0 \Leftrightarrow \left(f(1)-1\right)^2=0 \Leftrightarrow f(1)=1$$

(β)Εάν θέσουμε $x=1$ και $x=0$ στην εξίσωση $g(x)=1+x\left(1-f(x)\right)$ παίρνουμε αντίστοιχα:

$$g(1)=1+1\left(1-f(1)\right)=1$$

$$g(0)=1+0\left(1-f(1)\right)=1$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $g(1)=g(0)=1$ και $1\neq 0$. Άρα η συνάρτηση g δεν είναι ένα προς ένα.

Υποσημείωση: Για να δείξω ότι μια συνάρτηση g δεν είναι ένα προς ένα αρκεί να βρω δύο τιμές $x_1\neq x_2$ τέτοιες ώστε $g(x_1)=g(x_2)$.

Ασκήσεις

4. Αν οι συναρτήσεις f,g,h ορίζονται στο $\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι:

(α) η $f\circ g$ είναι $1-1$ όταν οι f,g είναι $1-1$

(β) η g είναι $1-1$ όταν η $f\circ g$ είναι $1-1$

(γ) $g=h$ όταν $f\circ g=f\circ h$ και η f είναι $1-1$

(δ) η g είναι $1-1$ όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $(f\circ g)(x)=x$

(ε) η f είναι $1-1$ όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $(f\circ f)(x)=xf(x)$ και $f(x)\neq 0$

5. Αν οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ είναι $1-1$.

6. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της $g(x)=\left[f(x)\right]^3+3f(x)-2$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=x^2-3x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:

(α) $f(2)=2$ και

(β) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-xf(x)+4$ δεν είναι $1-1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)=x^2-5x+9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:
(α) $f(3)=3$ και
(β) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-xf(x)+9$ δεν είναι $1-1$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=x^2-3x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:
(α) $f(2)=2$ και
(β) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-xf(x)+4$ δεν είναι $1-1$.

10. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=e^x+e^{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$ που είναι $1-1$.
(α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.
(β) Να δείξετε ότι $(g\circ f)(x)=g(x)$
(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f

11. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)+3f(x)-x^{2003}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

12. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι $1-1$ και ικανοποιεί τη σχέση: $2f(x^4)-f^2(x^2)\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

13. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=f(x)+\alpha x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\neq 0$. Να δείξετε ότι:
(α) η f είναι $1-1$
(β) $f(0)=0$

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=f(x)-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:
(α) Η f είναι $1-1$

(β) $f(0)=0$.

(γ) $f\left(x-f(x)\right)=x$.

15. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=x+f(x), x\in\mathbb{R}$ που είναι $1-1$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

(β) Να δείξετε ότι $g\left(f(x)\right)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(γ) Να βρείτε την συνάρτηση f

16. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι: Η g είναι 1-1, $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(γ) Έστω z,w μιγαδικοί αριθμοί. Αν $f(\mathrm{Re}(zw))=\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$, να αποδείξετε ότι ο z ή ο w είναι πραγματικός αριθμός.

Μέθοδος 4 (Επίλυση εξίσωσης μέσω $1-1$ συνάρτησης)

Αποδεικνύουμε ότι μία εξίσωση f ένα προς ένα.

Η εξίσωση $f(\alpha)=f(\beta)$ έχει ως μοναδική λύση την $\alpha=\beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f\left(f(x)\right)+f^3(x)=2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(2x^3+x\right)=f(4-x)$, $x\in\mathbb{R}$

Λύση

(α) Έστω ότι: $f(x_1)=f(x_2)$

Τότε:

$$f^3(x_1)=f^3(x_2)\ (1)$$

και

$$f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)\ (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη την (1) και (2). Οπότε:

$$f\left(f\left(x_1\right)\right)+f^3\left(x_1\right)=f\left(f\left(x_2\right)\right)+f^3\left(x_2\right)\Leftrightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

(β) Αφού η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα έχουμε ότι:

$$f\left(2x^3+x\right)=f\left(4-x\right)\Leftrightarrow 2x^3+x=4-x\Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0\Leftrightarrow$$

$$x^3+x-2=0\Leftrightarrow x=1$$

Άρα η εξίσωση $f\left(2x^3+x\right)=f\left(4-x\right)$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f\left(x\right)=x-\sqrt{x^2+a}$ με $a>0$.

(α) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{\lambda^2+\alpha}-\sqrt{\lambda^4+\alpha}=\lambda-\lambda^2$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν: $x^2+a\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού το $a>0$. Άρα η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $\sqrt{x^2+a}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ δηλαδή $\sqrt{x^2+a}>x$, άρα $x-\sqrt{x^2+a}<0$. Επομένως $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $x_1,x_2\in A$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1-\sqrt{x_1^2+a}=x_2-\sqrt{x_2^2+a}\Leftrightarrow x_1-x_2-\left(\sqrt{x_1^2+a}-\sqrt{x_2^2+a}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x_1-x_2-\frac{x_1^2+a-x_2^2-a}{\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}}=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)\left(\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}\right)-(x_1-x_2)(x_1+x_2)\Leftrightarrow$$

$$(x_1-x_2)\left(\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}-x_1-x_2\right)=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)\left[-\left(x_1-\sqrt{x_1^2+a}\right)-\left(x_2-\sqrt{x_2^2+a}\right)\right]$$

$$-(x_1-x_2)\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=0$$

και επειδή $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)<0$ έπεται ότι $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι ένα προς ένα.

(γ) Η εξίσωση $\sqrt{\lambda^2+\alpha}-\sqrt{\lambda^4+\alpha}=\lambda-\lambda^2\Leftrightarrow\sqrt{\lambda^2+\alpha}-\lambda=\sqrt{\lambda^4+\alpha}-\lambda^2$ δηλαδή $f\left(\lambda^2\right)=f\left(\lambda\right)$, και επειδή η f είναι ένα προς ένα έπεται ότι:

$$\lambda^2-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\left(\lambda-1\right)=0\Leftrightarrow\lambda=0\quad ή\quad\lambda=1.$$

Ασκήσεις

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$

(β) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda=\sqrt{\lambda^4+1}+\lambda^2$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2+x+\ln x$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(1)$

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x>1$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)<0$

(β) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

20. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{2007}+x^{2009}$.

(α) Να βρείτε το $f(1)$.

(β) Να ελέγξετε εάν η $f(x)$ είναι ένα προς ένα στο $\mathbb{R}$.

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^{2007}+x^{2009}=2$.

21. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα σύνολο Α, να δείξετε ότι και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Στη συνέχεια:

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\log x+x^4$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(\lambda^2+1)-\log|5\lambda-5|=(5\lambda-5)^4-(\lambda^2+1)^4$.

22. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x))+f^3(x)=2x+3, x\in\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f «είναι ένα προς ένα».

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3+x)=f(4-x), x\in\mathbb{R}$

23. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.

(α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(1) $f\left(x^2-1\right)=2$ (2) $f^2(x)-11f(x)+18=0$

(β)Να λύσετε τις ανισώσεις:

(1) $f\left(x^2+1\right)<9$ (2) $f(x)\left(f(x)-11\right)<-18$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $f(x+1)=f(2x)$ αν f είναι "1-1"

(β) $f(2x)=f\left(x^2+1\right)$ αν $f(x)=e^x+2$

25. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα.

(α) Να δείξετε ότι η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(g\left(e^x-x\right)\right)<f\left(g(1-x)\right)$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(g\left(x^2-1\right)\right)=f\left(g(3x+1)\right)$

26. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ για κάθε $x,y>0$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

(α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^2+3\right)+f(x)=f\left(x^2+1\right)+f(x+1)$.

(γ) Αν ακόμη είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>1$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.