Μονότονες συναρτήσεις

Ορισμοί

Έστω μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω σύνολο $E\subseteq A$. Θα λέμε ότι:

- η f είναι **αύξουσα** στο Ε, όταν για κάθε $x_1,x_2\in E$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)\le f(x_2)$.
- η f είναι **φθίνουσα** στο Ε, όταν για κάθε $x_1,x_2\in E$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)\ge f(x_2)$
- η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Ε, όταν για κάθε $x_1,x_2\in E$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$.
- η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Ε, όταν για κάθε $x_1,x_2\in E$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)>f(x_2)$.
- **Μονότονη** στο Ε, όταν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο Ε.
- **Γνησίως μονότονη** στο Ε, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Ε.

Παρατηρήσεις

- Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα, δηλαδή τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ μία φορά.
- Αν $f(x)$ γνησίως αύξουσα στο Δ και $g(x)$ γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα.
- Αν $0\in f(\Delta)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1

Για να βρούμε την μονοτονία μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$:

- Πηγαίνουμε βάση του ορισμού, δηλαδή θεωρούμε $x_1 < x_2$ και με πράξεις κατασκευάζουμε την συνάρτηση f.
- Το είδος μονοτονίας μιας συνάρτησης f σε ένα σύνολο Ε μπορεί να προσδιοριστεί και από τον λόγο μεταβολής τις f,

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \text{ με } x_1, x_2 \in E \text{ και } x_1 \neq x_2$$

και άρα εάν το $\lambda \geq 0$ η συνάρτηση είναι αύξουσα στο Ε, εάν το $\lambda \leq 0$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο Ε, εάν το $\lambda > 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Ε και τέλος εάν το $\lambda < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο Ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να εξετάσετε ως τις την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις.

(α) $f(x) = 2x + 1$ **(β)** $f(x) = 5x^3 + 2$ **(γ)** $f(x) = x^2 - 3x + 2, A = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

(δ) $f(x) = \left|1 - |x|\right| + |x| - 1$ **(ε)** $f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < -1 \\ -3x + 2 & x \geq -1 \end{cases}$ **(ζ)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (0,2) \\ x + 2 & x \in [2, +\infty) \end{cases}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}$.

1ος τρόπος

Έστω:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε ότι:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1 + 1 - 2x_2 - 1}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)} = 2 > 0$$

Άρα αφού $\lambda > 0$ σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}$.

Έστω:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 5x_1^3 < 5x_2^3 \Leftrightarrow 5x_1^3 + 2 < 5x_2^3 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

(γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ έχουμε ότι:

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2-3x_1+2-x_2^2+3x_2-2}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2-3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=$$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)-3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2-3$$

Οπότε για $x_1\geq\frac{3}{2},\ x_2\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_1+x_2>3\Leftrightarrow x_1+x_2-3>0$.

Άρα αφού το $\lambda>0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(δ) Βγάζουμε τα απόλυτα και την κάνουμε πολλαπλού τύπου.

$1-|x|\geq 0\Leftrightarrow |x|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1-\|x\|$	-	+	+	-
x	-	-	+	+

- $x\leq -1$

$$f(x)=-1+|x|-x-1=-1-x-x-1=-2x-2$$

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με

$$x_1<x_2\Leftrightarrow 2x_1-2<2x_2-2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

- $-1<x<0$

$$f(x)=1-|x|-x-1=1+x-x-1=0$$

- $0\leq x\leq 1$

$$f(x)=-1-|x|+x-1=-1+x+x-1=2x-2$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & x\leq -1\\ 0 & -1<x\leq -1\\ 2x-2 & x>1\end{cases}$

Ελέγχουμε την μονοτονία της συνάρτησης στα διάφορα διαστήματα.

- $x\leq -1$

Έστω $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 - 2 > -2x_2 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

- $x \le -1$

Έστω $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 2 < 2x_2 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

(ε) Έχουμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (0,2) \\ x+2 & x \in [2,+\infty) \end{cases}$.

- Για $x_1, x_2 \in (0,2)$ με:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2)$.

- Για $x_1, x_2 \in [2,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^{x^3}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}$.

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow e^{x_1^3} < e^{x_2^3} \quad (2)$$

Προσθέτοντας την (1) και την (2) κατά μέλη έχουμε ότι:

$$e^{x_1^3} + x_1^3 < e^{x_2^3} + x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ορίζεται η $f \circ g$ σε ένα διάστημα A. Να αποδείξετε ότι:

(α) αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες, τότε η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
(β) αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα, τότε η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

(α) Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1<x_2 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)<g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left[g(x_1)\right]<f\left[g(x_2)\right] \Leftrightarrow (f\circ g)(x_1)<(f\circ g)(x_2)$$

Άρα η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left[g(x_1)\right]>f\left[g(x_2)\right] \Leftrightarrow (f\circ g)(x_1)>(f\circ g)(x_2)$$

Άρα η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ασκήσεις

1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x)=2x^2-1$ (β) $g(x)=2x^3-1$ (γ) $h(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ -2x\ , & x\geq 1\end{cases}$

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x)=2x^3-1$ (γ) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

(β) $f(x)=1-2\ln(x-1)$ (δ) $f(x)=2e^{3-x}-1$

3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x)=2e^{3-x}-1$ (β) $g(x)=1-3\ln(x-1)$ (γ) $h(x)=\dfrac{2}{x-1}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{x^2}-1$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

6. (α) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις στο σύνολο A, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.
(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=x^2+\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

7. (α) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες στο σύνολο A και για κάθε $x\in A$ είναι $f(x)>0$ και $g(x)>0$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.
(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=x^2\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f^2(x)-3}{3f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+f(x)+3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα A και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A.
(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.
(β) Αν $f(x)\geq 0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in A$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.
(γ) Αν $g(A)\subseteq A$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

11. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ είναι:

(α) γνησίως αύξουσα, αν f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

(β) γνησίως φθίνουσα, αν f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

(γ) Τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης $F(x) = -2(3x^3+5)^3 + 7$

12. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$

(β) η f είναι περιττή

(γ) η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μέθοδος 2 (Επίλυση εξισώσεων-ανισώσεων)

Για να λύσουμε μια ανίσωση ή εξίσωση η οποία δεν λύνεται με τις μεθόδους που έχουμε μάθει στις προηγούμενες τάξης κάνουμε τα εξής:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανίσωσης ή της εξίσωσης στο πρώτο μέλος και το θέτουμε ως μια συνάρτηση f.

Βήμα 2: Μελετάμε την μονοτονία της f και με την βοήθεια αυτής λύνουμε την ανίσωση ή την εξίσωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λυθεί η ανίσωση: $\ln x > 1 - x$.

Λύση

Αρκεί να δείξω ότι: $\ln x + x - 1 > 0$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$, $D_f = (0, +\infty)$. Βρίσκω την μονοτονία της f.

Για $x_1 < x_2$ (1) έχουμε ότι: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2), οπότε προκύπτει ότι:

$$\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$. Οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$\ln x + x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Υποσημείωση: Η μονοτονία μιας συνάρτησης f είναι χρήσιμη στην επίλυση ανισώσεων, δηλαδή:

- Αν f είναι γνησίως αύξουσα τότε: $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$ (δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης).
- Αν f είναι γνησίως φθίνουσα τότε: $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$ (αλλάζει η φορά της ανίσωσης).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-2)$. Αν για τη συνάρτηση f είναι $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$

(α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Να λύσετε την ανίσωση: $2\ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0,+\infty)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Αφού η συνάρτηση g είναι $\downarrow$ έχουμε ότι:

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \quad (1)$$

Επίσης για κάθε $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχουμε ότι:

$$\ln x_1 - g(x_1) < \ln x_2 - g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Αφού το σημείο $A(1,-2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της g έχουμε ότι $g(1) = -2$. Επίσης $f(1) = \ln 1 - g(1) = 2$. Οπότε για την ανίσωση έχουμε:

$$2\ln x < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow 2\ln x - g(x^2) < 2 \Leftrightarrow \ln x^2 - g(x^2) < 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) < f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+x+5} < (x^2+x+5)^5 - (x^2+1)^5$.

Λύση

Η ανίσωση γράφεται ως:

$$\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+5}<\left(x^2+x+5\right)^5-\left(x^2+1\right)^5 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2+x+5\right)<\left(x^2+x+5\right)^5-\left(x^2+1\right)^5 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)^5<\ln\left(x^2+x+5\right)+\left(x^2+x+5\right)^5 \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2+1\right)<f\left(x^2+x+5\right)(1)$$

Όπου $f(x)=\ln x+x^5 \ \ D_f=(0,+\infty)$. Βρίσκουμε την μονοτονία της συνάρτησης f.

Για $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2$ και $x_1^5<x_2^5$. Προσθέτουμε κατά μέλη οπότε έχουμε: $\ln x_1+x_1^5<\ln x_2+x_2^5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε από την ανίσωση (1) προκύπτει:

$$f\left(x^2+1\right)<f\left(x^2+x+5\right)\Leftrightarrow x^2+1<x^2+x+5\Leftrightarrow x>-4$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να λύσετε την εξίσωση: $10^x+3^x=13^x$.

Λύση

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x_0=1$. Θα δείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική.

Έχουμε:

$$10^x+3^x=13^x \Leftrightarrow \frac{10^x+3^x}{13^x}=1\Leftrightarrow\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{3}{13}\right)^x-1=0$$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{3}{13}\right)^x-1$. Θα μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Για $x_1<x_2\Leftrightarrow\left(\frac{10}{13}\right)^{x_1}>\left(\frac{10}{13}\right)^{x_2}$ και $x_1<x_2\Leftrightarrow\left(\frac{3}{13}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{13}\right)^{x_2}$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω συναρτήσεις οπότε έχουμε ότι:

$$\left(\frac{10}{13}\right)^{x_1}+\left(\frac{3}{13}\right)^{x_1}>\left(\frac{10}{13}\right)^{x_2}+\left(\frac{3}{13}\right)^{x_2}\Leftrightarrow\left(\frac{10}{13}\right)^{x_1}+\left(\frac{3}{13}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{10}{13}\right)^{x_2}+\left(\frac{3}{13}\right)^{x_2}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα έχει μοναδική ρίζα την $x_0=1$.

Ασκήσεις

13. Να λυθούν οι ανισώσεις:

(α) $f\left(2x^2+x\right)>f\left(3x\right)$ αν $f\uparrow$

(β) $f\left(\ln x\right)<f\left(\ln(3)\right)$ αν $f\downarrow$

(γ) $f\left(e^{2x}+1\right)<f\left(3\right)$ αν $f\uparrow$

14. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$. Αν οι f,g είναι γνήσια αύξουσες και ισχύει $f\left(x\right)>0$, $g\left(x\right)>0$ για κάθε $x>0$, να δειχθεί ότι:

(α) Η συνάρτηση $h=\dfrac{1}{f}+\dfrac{1}{g}$ είναι γνήσια φθίνουσα.

(β) Η εξίσωση $f\left(x\right)+g\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$ έχει το πολύ μια λύση $x>0$.

15. Να λυθούν οι ανισώσεις:

(α) $\ln x>1-x$

(β) $e^x>\dfrac{1-x}{1+x}$

(γ) $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)$ αν $f(x)=e^x+x$

(δ) $f(x^2+1)<f(2x-2)$ αν $f(x)=x+\ln x$.

16. Να αποδειχθούν οι ανισότητες:

(α) $e^{\alpha}-e^{\beta}<\ln\dfrac{\beta}{\alpha},\ \ 0<\alpha<\beta$

(β) $\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta>e^{\alpha}-e^{\beta}$, $0<\alpha<\beta<\pi$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$.

(γ) Να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2^x+x$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Να λυθεί η ανίσωση $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=e^x+x^5+x^3+x-1$ και $g(x)=2-x-x^3-\ln x$.

(α) Να δείξετε ότι οι f και g είναι γνησίως μονότονες.

(β) Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x)>0$ και $g(x)>0$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=10-4\ln^3 x, x>0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

(β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f(ex)-5\right)<10$

21. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x-1}$. Να δείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x+\ln x)<f(1)$.

23. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, με $f(x)-g(x)=e^x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

24. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-2$ και $g(x)=\dfrac{1}{x+1}-2$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

25. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες.

(α) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $f+g$ είναι γνησίως αύξουσες.

(β) Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x)=f(2x-1)+f(3x-2),\ x\in\mathbb{R}$

(1) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία.

(2)Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 να λύσετε την ανίσωση $f(2x-1)<-f(3x-2)$.

26. Αν $f \downarrow (-\infty, 0]$ και $f \uparrow [0, +\infty)$ να λύσετε της ανισώσεις:

(α) $f(2x) + f(7x) = f(4x) + f(2008x)$

(β) $f(x) + f(x^5) = f(x^3) + f(x^{10})$ στο $(0, +\infty)$.

Μέθοδος 3 (Εύρεση μονοτονία μιας συνάρτησης ή επίλυση εξίσωσης-ανίσωσης μέσω συναρτησιακής σχέσης)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και ισχύει η σχέση $f(x) = -f(4-x)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Λύση

Για $x = 2$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f(2) = -f(4-2) \Leftrightarrow f(2) = -f(2) \Leftrightarrow 2f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 2$.

Για $x = 2$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f(2) = -f(4-2) \Leftrightarrow f(2) = -f(2) \Leftrightarrow 2f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$.

Α.(1) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία

(2) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$ (α) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να δείξετε ότι $g(0) = 0$

(2) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

(3) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$

Λύση

Α. (1) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Έστω $x_1 < x_2$ τότε $e^{x_1} < e^{x_2}$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο σχέσης και έχουμε ότι:

$$x_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 + e^{x_1} - 1 < x_2 + e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Α. (2) Η $x=0$ προφανής ρίζα της εξίσωσης.

Η εξίσωση γίνεται:

$$e^x = 1 - x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (από το ερώτημα (1)) άρα έχει μοναδική ρίζα. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Β. (1) Για $x=0$ η σχέση (α) γίνεται: $g(0) + e^{g(0)} = 1 \Leftrightarrow e^{g(0)} = 1 - g(0)$.

Από το ερώτημα Α. (2) προκύπτει ότι: $g(0) = 0$.

Β. (2) Έστω ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $g(x_1) \geq g(x_2)$. Έχουμε:

$$g(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow e^{g(x_1)} \geq e^{g(x_2)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω ανισώσεις, οπότε:

$$g(x_1) + e^{g(x_1)} \geq g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \geq 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

Άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $x_1 < x_2$.

Β. (3) Η ανίσωση γίνεται:

$$(g \circ f)(x) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Ασκήσεις

27. Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

28. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως μονότονη. Αν για τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$(f \circ g)(x + 2008) \geq f(x) \geq f(g(x) + 2005)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $g(x) = x - 2005$

29. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + 3x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\frac{3e^x}{1+f^2(x)} \quad \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε την $f(0)$.

(γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(δ) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln f(x)>0$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(x-\ln x\right)+f\left(x-1\right)=\ln x+3,\ x>0$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα να λύσετε:

(α) την εξίσωση $f\left(x\right)=2$

(β) την ανίσωση $f\left(e^x-1\right)<2$