ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ (Β) 2010-13

Όνομα Μαθητή/τριας: .... Γ΄ Λυκείου Θετ.-Τεχν.

Θέμα 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A_f και συνάρτηση g με πεδίο ορισμού A_g.

α. Δώστε τον ορισμό της σύνθεσης gof και του πεδίου ορισμού της.

β. Αποδείξτε ότι αν f γνησίως αύξουσα στο A_f τότε είναι και 1-1 στο A_f .

γ. Αν f 1-1 στο A_f τότε είναι πάντα η f γνησίως μονότονη στο A_f ;

Δικαιολογείστε την απάντησή σας με παράδειγμα.

δ. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι σε διάστημα Δ γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα; (Μον. 12)

Β. α. Υπολογίστε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = x^3+1$.

β. Αποδείξτε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f, τότε και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο f(A).

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι περιττή και 1-1, τότε να δείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή. (Μον.13)

Θέμα 2ο

Α1. Περιγράψτε πως ορίζεται το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. (4Μ)

Α2. Αν z_1 και z_2 δύο μιγαδικοί, περιγράψτε την πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. (4Μ)

Α3. Αποδώστε γραφικά την πρόσθεση και την αφαίρεση δύο μιγαδικών στο μιγαδικό επίπεδο. (4Μ)

Β. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $2z\bar{z}+\left(z-\bar{z}\right)+1=5-6i$. (7Μ)

Γ. Να γραφεί ο αριθμός : $z=\dfrac{6-2i}{2+i}-\left(3-2i\right)^2+\dfrac{1}{i}$ στη μορφή α+βi με α, β $\in\Re$ και μετά να βρεθεί το μέτρο του. (6Μ)

Θέμα 3^o

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = x + yi με x,y$\in\Re$ και M(x,y) οι εικόνες του z. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(z), όταν :

α) z = 4συνω + 3ημω.i με ω$\in$[0,2π).

β) $\left|z\right|^2+\left(z^2+(\bar{z})^2\right)-3=0$.

(Μον.10)

Β. Αν f(x)=αx+β, x$\in\Re$ και α$\neq$0, να βρεθούν τα α,β$\in\Re$, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση : f(x) + f(1-x) + f^{-1}(1+x) = x, για κάθε x$\in\Re$. (Μον. 8)

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^4+x^2+2}\right)$. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\frac{1}{2}\ln 2$, για κάθε x$\in A_f$. (Μον.7)

Θέμα 4^o

Α. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\Re$

(Μον.10)

Β. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a(x-1)}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$.

1. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο μόνο τιμές του α$\in\Re^*$, έτσι ώστε η f να είναι «1-1». (Μον.10)
2. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του α που βρήκατε, να βρείτε την f^{-1}. Τι παρατηρείτε; (Μον.5)

Καλή Επιτυχία !