ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2013

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χρήστος Μουρατίδης Γ΄ Λυκείου Θετ.-Τεχν.

ΟΝΟΜΑ ΜΑΘΗΤΗ: ....

Θέμα 1°

Α. α. Διατυπώστε και αποδώστε γραφικά το θεώρημα Bolzano.

β. Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος.

γ. Ποια είναι κατά τη γνώμη σας η πρακτική σημασία του θεωρήματος;

δ. Το αντίστροφο του θεωρήματος ισχύει; Δώστε παράδειγμα. (Μον.8)

Β. α. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών. (Μον.6)

β. Αποδώστε γραφικά το θεώρημα και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

γ. Εξηγείστε αν το θεώρημα μας εξασφαλίζει και το πεδίο τιμών μιας συνεχούς σε διάστημα [α, β] συνάρτησης. (Μον.4)

Γ. Έστω συναρτήσεις f και g συνεχείς στο διάστημα [α, β] έτσι ώστε να ισχύει $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{1}{\xi-\alpha} + \dfrac{1}{\xi-\beta}$.

(Μον.7)

Θέμα 2°

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2\eta\mu\alpha - 1) + (3 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha)i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των σημείων M(z), είναι σημεία κύκλου.

β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο.

γ. Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών του ερωτήματος β.

δ. Να αποδείξετε ότι: $3 \leq |z - 4 + 1| \leq 7$.

(Μον.12)

Β. Θεωρούμε τη συνεχή στο $\Re$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$e^{x+1} - 1 \leq (x+1).f(x) \leq \varepsilon\varphi(x+1),\ \text{για κάθε } x \in \Re \quad (1).$$

Αν είναι $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 2$ τότε:

α. Να βρεθούν οι αριθμοί f(-1) και f(2). (Μον.7)

β. Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει με τη γραφική παράσταση της $g(x) = (x^2 - 1).e^{x^2+x+1}$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_o \in (-1, 2)$. (Μον.6)

Θέμα 3ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλο το $\Re$.

Α. Αν για κάθε x < 0 ισχύει : $\left[f(x)\right]^2 - x^2 \le 2f(x) - 1$. Να βρεθεί το f(0). (Μον.8)

Β. Αν ο τύπος της f για κάθε x > 0 είναι $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - (\alpha x + 1)}{x}$, $\alpha \in \Re$ τότε:

i) Να βρείτε την παράμετρο α. (Μον.5)

ii) Για α = -1/2, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Μον.4)

iii) Δείξτε ότι η εξίσωση f(x) = $\frac{3}{4}$, έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα. (Μον.8)

Θέμα 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z-2}{z-i}$, $\mu\varepsilon\ z \neq i$.

Α. Δείξτε ότι ο αριθμός $\left[f(0)\right]^{2013}$ είναι φανταστικός.

Β. Έστω ο μιγαδικός $w = \dfrac{1}{f(z)}$, $\mu\varepsilon\ \ z \neq 2$ και u όπου $|u-1| = 1 + \mathrm{Re}(u)$.

i) Δείξτε ότι αν η εικόνα M(z) ανήκει σε κύκλο με κέντρο K(1,0) και ακτίνα ρ = 1, τότε η εικόνα του w κινείται στην ευθεία (ε) : 4x -2y + 1 = 0.

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του u.

iii) Να λυθεί η εξίσωση: $u \cdot f(z) = 1, \quad \gamma\iota\alpha \quad z \neq 2$.

iv) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $A = |w-3|$.

Καλά αποτελέσματα !