

**ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ
ΣΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ**

Τρίτη 25^η Ιουνίου 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

Α' Θέμα

1. Να υπολογίσετε το εξαγόμενο $\sqrt{1 + \sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9}$.

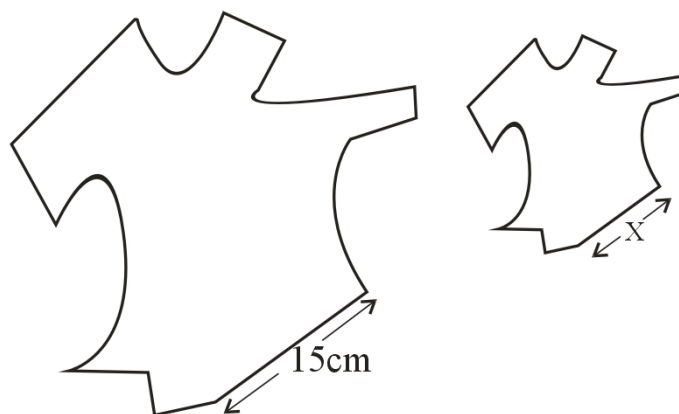
Μονάδες 7

2. Αν $x = -\frac{1}{2}$ και $y = -\frac{3}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$.

Μονάδες 8

Β' Θέμα

1. Στα δύο παρακάτω σχήματα το μικρό είναι σμίκρυνση του μεγάλου με κλίμακα 1:3



Να υπολογίσετε το μήκος X της πλευράς του μικρού σχήματος.

Μονάδες 7

2. Το τρίγωνο ABΓ του σχήματος είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές AB = 5cm και ΑΓ = 4cm .

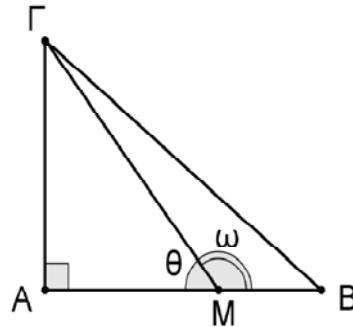
Αν MB = 2cm να βρείτε:

α) την εφθ

Μονάδες 5

β) την εφω

Μονάδες 3



Γ' Θέμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το Ο και δύο ευθείες (ε₁) και (ε₂) με εξισώσεις

$\epsilon_1 : y = 3x + 2$ και $\epsilon_2 : y = 4x - 3$.

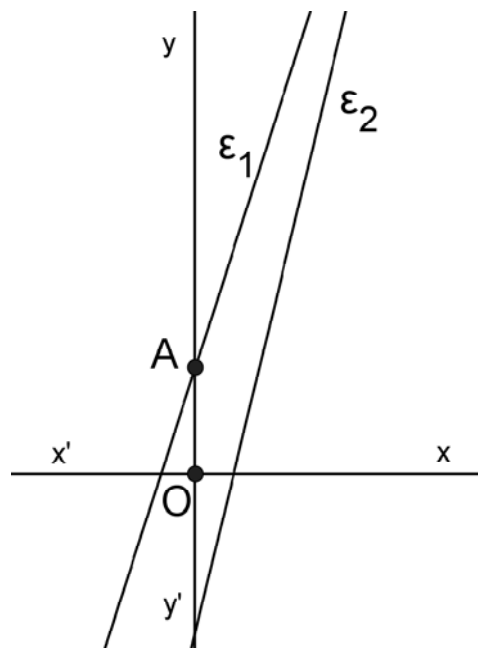
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

Μονάδες 4

β) Να εξετάσετε αν κάποια από τις δυο ευθείες διέρχεται από το σημείο M(2,5).

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε₁) και (ε₂).



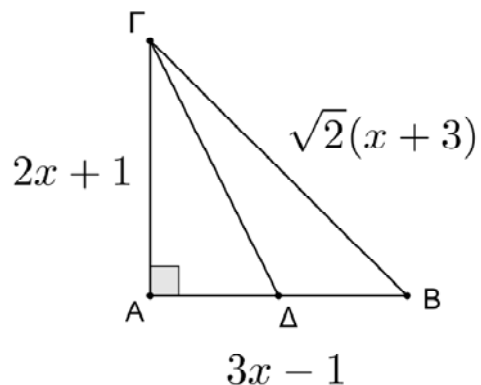
Μονάδες 5

Δ' Θέμα

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, τα μήκη των πλευρών του σε cm είναι:

$$AB = 3x - 1, \quad AG = 2x + 1 \text{ και}$$

$BG = \sqrt{2}(x + 3)$, όπου το x είναι ένας πραγματικός αριθμός.



α) Να αποδείξετε ότι για τον αριθμό x ισχύει $11x^2 - 14x - 16 = 0$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα μήκη των AB και AG.

Μονάδες 6

γ) Αν Δ είναι το μέσον της AB, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Να μη γράψετε το όνομά σας στο τετράδιο.
2. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
3. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων με τα θέματα.
4. Δεν επιτρέπεται να γράψετε τίποτε άλλο στα φωτοαντίγραφα με τα θέματα
5. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα με τα θέματα.
6. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε **όλα τα θέματα**.
7. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο** στυλό.
8. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco) στο τετράδιο.
9. Δυνατή αποχώρηση μία (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

Α΄ Θέμα

1. Να υπολογίσετε το εξαγόμενο $\sqrt{1 + \sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9}$.

Μονάδες 7

2. Αν $x = -\frac{1}{2}$ και $y = -\frac{3}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$.

Μονάδες 8

Λύση

$$1. \sqrt{1 + \sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9} = \sqrt{1 + 3} - 1 - 3 = \sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$2. x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right]^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4} \right)^2 = \left(-\frac{8}{4} \right)^2 = (-2)^2 = 4$$

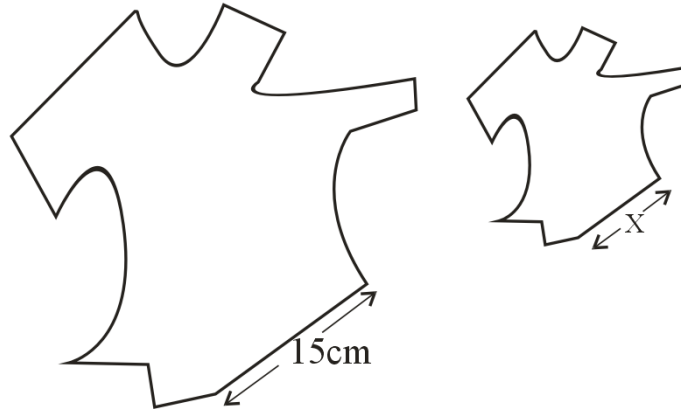
Εναλλακτικά

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^4 + \left(-\frac{3}{2} \right)^4 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \left(-\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{81}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{82}{16} - \frac{18}{16} = \frac{64}{16} = 4$$

ΤΕΛΟΣ 1^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' Θέμα

1. Στα δύο παρακάτω σχήματα το μικρό είναι σμίκρυνση του μεγάλου με κλίμακα 1:3



Να υπολογίσετε το μήκος X της πλευράς του μικρού σχήματος.

Μονάδες 7

Λύση

Αφού η κλίμακα είναι 1:3 τότε το μήκος X είναι το $\frac{1}{3}$ του μήκους 15cm.

$$\text{Άρα } X = 15 : 3 = 5\text{cm}$$

ΑΡΧΗ 3^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ

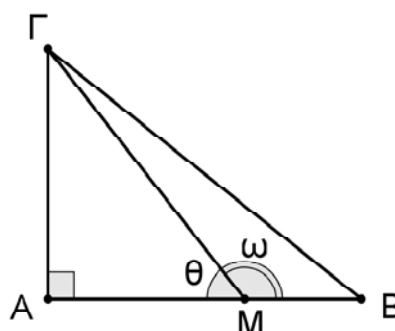
2. Το τρίγωνο ABΓ του σχήματος είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές AB = 5cm και ΑΓ = 4cm. Αν MB = 2cm να βρείτε:

α) την εφθ

Μονάδες 5

β) την εφω

Μονάδες 3



Λύση

α) $AM = AB - MB = 5 - 2 = 3$

$$\epsilon\phi\theta = \frac{AG}{AM} = \frac{4}{3}$$

β) Οι γωνίες ω και θ είναι παραπληρωματικές

$$\text{Άρα } \epsilon\phi\omega = -\epsilon\phi\theta = -\frac{4}{3}$$

Γ' Θέμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το O και οι ευθείες (ε₁) και (ε₂) με εξισώσεις

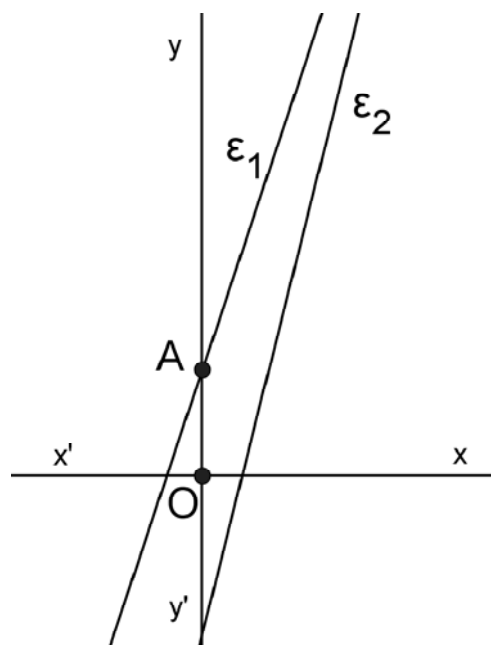
$$\epsilon_1 : y = 3x + 2 \text{ και } \epsilon_2 : y = 4x - 3.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

Μονάδες 4

β) Να εξετάσετε αν κάποια από τις δυο ευθείες διέρχεται από το σημείο M(2,5).

Μονάδες 6



γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε₁) και (ε₂).

Μονάδες 5

Λύση

α) Το σημείο A που η ευθεία $\epsilon_1 : y = 3x + 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες $A(0,\beta)$ όπου $\beta = 2$.

Άρα $A(0,2)$

β) Για $x = 2$ η (ϵ_1) γίνεται $y = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \neq 5$ άρα δε διέρχεται από το M

Για $x = 2$ η (ϵ_2) γίνεται $y = 4 \cdot 2 - 3 = 5$ άρα διέρχεται από το M

γ) Η συντεταγμένες του σημείου τομής είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

Τότε

$$4x - 3 = 3x + 2$$

$$x = 5$$

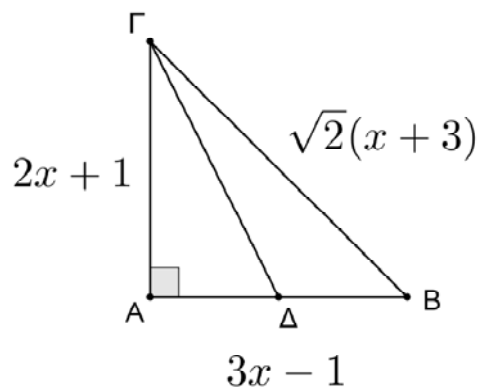
Επίσης $y = 3 \cdot 5 + 2 = 17$. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι $\Sigma(5,17)$.

Δ' Θέμα

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, τα μήκη των πλευρών του σε cm είναι:

$AB = 3x - 1$, $AG = 2x + 1$ και

$B\Gamma = \sqrt{2}(x + 3)$, όπου το x είναι ένας πραγματικός αριθμός.



α) Να αποδείξετε ότι για τον αριθμό x ισχύει $11x^2 - 14x - 16 = 0$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα μήκη των AB και AG.

Μονάδες 6

γ) Αν Δ είναι το μέσον της AB, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BΓΔ.

Μονάδες 4

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει

$$(2x + 1)^2 + (3x - 1)^2 = [\sqrt{2}(x + 3)]^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 + 9x^2 - 6x + 1 = 2(x^2 + 6x + 9)$$

$$11x^2 - 14x - 16 = 0$$

β) Βρίσκουμε το x επιλύοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$11x^2 - 14x - 16 = 0 \text{ όπου}$$

$$\Delta = 900$$

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{8}{11}$$

Για $x_1 = 2$ έχουμε $AB = 2 \cdot 2 + 1 = 5\text{cm}$ και $AG = 3 \cdot 2 - 1 = 5\text{cm}$

Για $x_2 = -\frac{8}{11}$ έχουμε $A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5\text{cm}$ με $AG = 3 \cdot \left(-\frac{8}{11}\right) - 1 < 0$

απορρίπτεται

γ) $A\Delta = \frac{AB}{2} = 2,5\text{cm}$

$$E = \frac{A\Delta \cdot AG}{2} = \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25\text{cm}^2$$

Εναλλακτικά

$$A\Delta = \frac{AB}{2} = 2,5\text{cm}$$

$$(B\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) - (A\Gamma\Delta) = \frac{AB \cdot AG}{2} - \frac{A\Delta \cdot AG}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25\text{cm}^2$$