| | |
|---|---|
| Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Η   Δ Η Μ Ο Κ Ρ Α Τ Ι Α<br>ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ<br>ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ<br>ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ<br>Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ<br>ΕΚΠ/ΣΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ<br>Δ/ΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ Γ' ΑΘΗΝΑΣ |  |
| **ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ<br>ΑΓΙΩΝ ΑΝΑΡΓΥΡΩΝ** | **Άγιοι Ανάργυροι, 21 Ιουνίου 2013** |

**ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2013**

**ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ                ΤΑΞΗ : Γ**

## ΘΕΩΡΙΑ 1

1. **Τι ονομάζεται μονώνυμο και από ποια μέρη αποτελείται; Δώστε παράδειγμα.**
2. **Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια. Δώστε παράδειγμα.**
3. **Πως ορίζεται το γινόμενο δύο μονωνύμων; Δώστε παράδειγμα.**
4. **Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μια μεταβλητή του; Δώστε παράδειγμα.**
5. **Τι ονομάζεται σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους; Δώστε παράδειγμα.**

## ΘΕΩΡΙΑ 2

1. **Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;**
2. **Τι λέγεται λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων και ποια η σχέση του με το λόγο των περιμέτρων τους;**
3. **Πότε δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια;**
4. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές, ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες και αιτιολογείστε την απάντησή σας.**
   **α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.**
   **β) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν τις γωνίες των κορυφών τους ίσες, είναι όμοια.**

## ΑΣΚΗΣΗ 1

**Δίνονται οι παραστάσεις :**

$$\mathrm{A}=\frac{x^2+2-(2x-3)-4x}{x-1},\quad \mathrm{B}=\frac{x^2+2x+3(2x-x^2)}{2x},\quad \Gamma=\frac{4x^3+2x^2-2x}{x}$$

1. **Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις Α, Β και Γ.**
2. **Να απλοποιήσετε τις παραπάνω παραστάσεις.**
3. **Να βρείτε τις τιμές του x, αν ισχύει Α + Β = Γ/2.**

## ΑΣΚΗΣΗ 2

**Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και η ευθεία $(\varepsilon_1)$ : $y = x - 1$.**

**Α.** **1. Βρείτε την κορυφή της παραβολής και τον άξονα συμμετρίας της,**

**2. Βρείτε τα σημεία στα οποία η παραβολή τέμνει τους άξονες χ΄χ και y'y.**

**3. Σχεδιάστε την παραβολή και δικαιολογείστε αν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.**

**Β.** **1. Βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της παραβολής με την ευθεία $(\varepsilon_1)$.**

**2. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon_2)$, που διέρχεται από το σημείο Γ(2,0) και είναι παράλληλη προς την $(\varepsilon_1)$.**

**3. Πόσα κοινά σημεία έχει με την παραβολή; Τι παρατηρείτε;**

## ΑΣΚΗΣΗ 3

**Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τη διχοτόμο ΑΔ. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Μ της διχοτόμου, και φέρνουμε τις ΒΜ και ΓΜ, που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα στα σημεία Ε και Ζ.**

**Να δείξετε ότι :**

1. **Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΔ είναι ίσα.**
2. **ΑΕ = ΑΖ.**
3. **ΒΕ = ΓΖ.**
4. **Τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, και να γράψετε το λόγο ομοιότητάς τους.**

**Απαντήστε μόνο σε μία Θεωρία και δύο Ασκήσεις**

Η Δ/ντρια

Οι διδάσκοντες

Χ. Μουρατίδης - Β. Κωστόπουλος

Β. Μπιτσιτέ

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

1

## Ασκηση 1.

▸ $A=\dfrac{x^2+2-(2x-3)-4x}{x-1}$ , ορίζεται όταν $x-1\neq 0$
$x\neq 1$.

$=\dfrac{x^2+2-2x+3-4x}{x-1}$

$=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$

$=\dfrac{(\cancel{x-1})(x-5)}{\cancel{x-1}}=x-5$

▸▸ $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$
1 5

▸ $B=\dfrac{x^2+2x+3(2x-x^2)}{2x}$ , ορίζεται όταν $x\neq 0$

$=\dfrac{x^2+2x+6x-3x^2}{2x}=\dfrac{-2x^2+8x}{2x}=$

$=\dfrac{-\cancel{2x}(x-4)}{\cancel{2x}}=-(x-4)$

▸ $\Gamma=\dfrac{4x^3+2x^2-2x}{x}$ , ορίζεται όταν $x\neq 0$

$=\dfrac{2\cancel{x}(2x^2+x-1)}{\cancel{x}}=2\cdot(2x^2+x-1)$

$=2(x+1)(2x-1)$.

▸▸ $2x^2+x-1=2(x+1)(x-\frac{1}{2})$
$-1$ $1/2$ $=(x+1)(2x-1)$

▸ $A+B=\dfrac{\Gamma}{2}\Leftrightarrow x-5-(x-4)=\dfrac{\cancel{2}(x+1)(2x-1)}{\cancel{2}}\Leftrightarrow$

για $x\neq 0$ και $x\neq 1$

$\Leftrightarrow \cancel{x}-5-\cancel{x}+4=(x+1)(2x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{-1} = 2x^2 - x + 2x \cancel{-1} \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0$

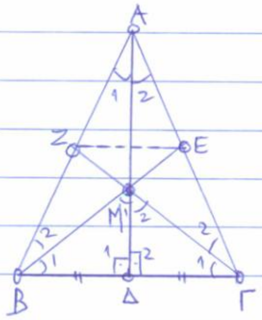
$\Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $2x + 1 = 0$

απορρίπτεται $\quad 2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

δεκτή.

**Άσκηση 3**




**1.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος και ύψος, άρα $ΒΔ = ΔΓ$ (1) και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90°$ (2)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα: $\overset{\triangle}{ΒΜΔ}$, $\overset{\triangle}{ΓΜΔ}$, έχουν:

i) $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90°$ υπόθεση

ii) $ΒΔ = ΔΓ$ από (1)

iii) ΜΔ κοινή

άρα από το κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων (ή Π-Γ-Π) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Από τα ίσα τρίγωνα προκύπτουν: $ΒΜ = ΓΜ$ (3)

$\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$ (4)

$\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ (5).

**2.3.** Συγκρίνω τα $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΓΖ}$, έχουν:

i) $\hat{Α}$ κοινή

ii) $ΑΒ = ΑΓ$ υπόθεση

iii) $\hat{Β}_2 = \hat{Γ}_2$ $\left( \begin{array}{l} \hat{Β} = \hat{Γ} \\ \hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1 \end{array} \right\} \ominus \ \hat{Β} - \hat{Β}_1 = \hat{Γ} - \hat{Γ}_1 \Rightarrow \hat{Β}_2 = \hat{Γ}_2 \Big)$

άρα από το κριτήριο (Γ-Π-Γ) τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, άρα $ΑΕ = ΑΖ$ και $ΒΕ = ΓΖ$.

Σχόλιο: Θα μπορούσε κανείς να δείξει πως τα τρίγωνα $A\hat{M}Z$ και $A\hat{M}E$ είναι ίσα, οπότε προκύπτουν τελικά τα ζητούμενα.

4. Επειδή $AE=AZ$ το τρίγωνο $A\hat{Z}E$ είναι ισοσκελές και έχει με το $A\hat{B}\Gamma$ κοινή γωνία κορυφής την $\hat{A}$, άρα και $\hat{Z}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{E}$ οπότε τα τρίγωνα $A\hat{Z}E$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια, άρα:

$$\frac{AZ}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{ZE}{B\Gamma}=\lambda.$$

## Άσκηση 2.

A. 1) $f(x)=x^2-3x+2 \quad , x\in\mathbb{R}$

Η κορυφή της παραβολής είναι $K\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}=f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

άρα $x_K=\frac{3}{2}$ και $y_K=-\frac{9-8}{4}=-\frac{1}{4}$

άρα $K\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

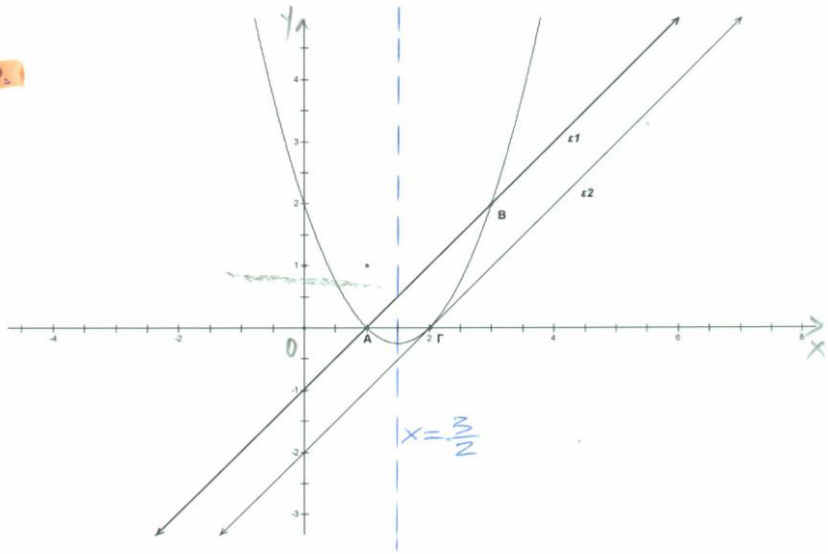
Άξονας συμμετρίας της είναι η ευθεία $x=\frac{3}{2}$.

2) Η παραβολή τέμνει τον $y'y$ όταν $x=0$ άρα $y=f(0)=2$ δηλαδή στο σημείο $(0,2)$.

Επίσης τέμνει τον $x'x$ όταν $y=0$ δηλαδή $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

4

3.




Άρα $A(1,0)$ και $Γ(2,0)$.

Η παραβολή $f(x)=x^2-3x+2$ παρουσιάζει ελάχιστο επειδή $α=1>0$.

B. (1) Λύνω το σύστημα $\begin{cases} y = x^2-3x+2 \\ y = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-3x+2=x-1 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases}$$

οπότε τα κοινά τους σημεία είναι $A(1,0)$, $B(3,2)$

B(2). Αφού $(\varepsilon_2) // (\varepsilon_1)$ θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

Άρα $(\varepsilon_2)$: $y = x + \beta$, και διέρχεται από το $\Gamma(2,0)$, άρα $0 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$

Η ζητούμενη ευθεία $(\varepsilon_2)$ είναι: $\underline{\underline{y = x - 2}}$.

B(3) Λύνω το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = x - 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

άρα το σημείο $\Gamma(2,0)$ είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο, επομένως η ευθεία $(\varepsilon_2)$ εφάπτεται της παραβολής στο $\Gamma(2,0)$.