

ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΩΝ ΑΝΑΡΓΥΡΩΝ

Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ημερομηνία: 22.05.2012

Θέμα 1

A. Να γράψετε τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E και τι εκκεντρότητα της έλλειψης. (Μονάδες 4)

B. Να γράψετε την εξίσωση έλλειψης με μεγάλο άξονα στον $x'x$ και να δείξετε ότι :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

Γ. Να γράψετε τι μορφή παίρνει η έλλειψη όταν η εκκεντρότητα ε τείνει στο μηδέν ή στο ένα.

(Μονάδες 5)

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο εξέτασης τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Ο κύκλος $x^2 + (y+4)^2 = 9$ έχει κέντρο το σημείο $K(0,4)$ και ακτίνα $\rho=3$.

β. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-B, A)$.

γ. Κάθε σημείο μιας παραβολής είναι το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην διευθετούσα της.

δ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$ σχηματίζουν οξεία γωνία.

ε. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1 = 2p(x+x_1)$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και σχηματίζουν γωνία

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

A. Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $2\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 10)

Γ. Αν $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 1)$, να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-2\sqrt{3}, 3)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 10)

Θέμα 3

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\mu - 1, 3\mu + 2)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(4, 3)$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

- A.** Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, καθώς το μ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} . (Μονάδες 6)
- B.** Αν $\mu=1$, να βρείτε:
1. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ (Μονάδες 6)
 2. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή Α(1,5) και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ. (Μονάδες 8)
 3. Να δείξετε ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται της ΒΓ στο σημείο Γ. (Μονάδες 5)

Θέμα 4

Δίνονται το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 2)$ και το σημείο Α(-3,-5).

- A.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη με το διάνυσμα \vec{a} . (Μονάδες 4)
- B.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται της ευθείας ϵ στο Α και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο Ε(0,2). (Μονάδες 8)
- Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει μία από τις εστίες της το σημείο Ε και μεγάλο άξονα ίσο με τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής με εξίσωση:
 $y^2 - 20x^2 = 5$ (Μονάδες 6)
- Δ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και απέχει από το σημείο Ε απόσταση 3. (Μονάδες 7)

Καλή Επιτυχία