

Ασκήσεις στις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

1. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = kf(x)$, να δείξετε ότι $f(x) = ce^{kx} \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δις παραγωγίσιμη και $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = f(x)$, να δείξετε ότι $f(x) = ke^x + le^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin^4 x - \eta \mu^4 x - a \sin 2x$, να βρείτε $a \in \mathbb{R}$, ώστε f σταθερή.
4. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f'(x) + kf(x) = e^{-kx} \sin x$, να βρείτε τη συνάρτηση f αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 2002$.
5. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και $\forall x \in (0, +\infty)$ ισχύει : $xf'(x) = f(x) + x^2 \ln x$, να βρείτε τη συνάρτηση f αν επιπλέον ισχύει $f(1) = 5$.
6. Έστω $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει : $f'(x) + f(x) \cos x = 2 \cos x$. Αν $f(0) = 2$, βρείτε τη συνάρτηση f .
7. Έστω $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει : $xf'(x) - xf(x) = e^x$. Αν $f(1) = e$, βρείτε τη συνάρτηση f .
8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f'(x) = x^{2-x} - f(x) \ln 2$. Αν $f(1) = 1/4$, βρείτε τη συνάρτηση f .
9. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0)$ και $f''(x) = g''(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
 i) Δείξτε πως υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε : $f(x) - g(x) = cx \forall x \in \mathbb{R}$.
 ii) Αν $\rho_1 < 0 < \rho_2$ ρίζες της g τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .
10. Αν f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f(0) = -2$ και $f'(x^5 + x) = 6x, \forall x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος C_f της f , στο σημείο $A(2, f(2))$.
11. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με $f(2002) = g(2002)$ και $(f \cdot g)'(x) = f'(x)f(x) + g'(x)g(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f = g$.
12. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δις παραγωγίσιμη και $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = f(x)$, να βρεθεί η f αν επιπλέον ισχύει $f(0) = f'(0) = 1$.
13. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(0) = 2$ και $f(x) - f'(x) = e^{-x} f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .