

Ασκήσεις στη Μονοτονία και Ακρότατα Συνάρτησης

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, ii) $f(x) = \frac{1 - \eta\mu x}{\eta\mu x}$, $x \in (0, \pi)$, iii) $f(x) = x^{\ln x}$,

iv) $f(x) = \frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, v) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x})$
2. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = ax^3 + 2^{-1}ax^2 + x + 2$, να είναι γνησίως αύξουσα. Ομοίως για την $f(x) = -x^3 + ax^2 - ax + 5$ να είναι γνησίως φθίνουσα.
3. Να δείξετε ότι ισχύει :

i) $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ii) $2\ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu^2 x < 1$, $\forall x \in (0, \pi)$.
4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύουν :

i) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$, ii) $\ln x \leq x - 1 \leq x \ln x$
5. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει :

i) $e^x - 1 \geq \ln(x+1)$, ii) $x + 2 \geq e^x(2-x)$
6. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης i) $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$.
ομοίως της ii) $f(x) = \frac{x - e}{\ln x - 1}$.
7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x - 2 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^x + ax + 2$, με $a > 1$.

 - Να δείξετε ότι $f'(x) \geq a - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τη μονοτονία της f .
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} .
9. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης :

i) $f(x) = \frac{e^x}{3x}$,
ii) $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x$, iii) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 2$, iv) $f(x) = x^{\ln x}$.
10. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης :

i) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$,
ii) $f(x) = 3\eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$.
11. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + (\beta^2 + 2)x - 3$ να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ελάχιστο ίσο με 3.