

Εφαρμογές της Παραγώγου

1. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν για τη συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\mu \in \mathbb{R}$ σταθερά, ισχύει $f''(x) - 10f'(x) + \lambda f(x) = 0$.
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - ax + \beta$ για την οποία δίνεται ότι η εφαπτομένη του C_f στο σημείο της $A(2,13)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\gamma = 28x + 19$. Τότε
Α. να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Β. να βρεθεί το ελάχιστο της f
Γ. να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματική λύση.
3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ του C_f με $\alpha \neq \beta$, στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f είναι παράλληλες. Να αποδειχθεί ότι ισχύει : $\alpha + \beta = -(2/3)$.
4. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^{3x-2} - 9e^{x+8}$ η εφαπτομένη έχει το μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης;
5. Σώμα κινείται στον άξονα $x'x$, ώστε την τυχαία στιγμή $t \geq 0$ η θέση του να δίνεται από τον τύπο $s(t) = 2t - 15 \ln(2t-60)$. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κινητού κατά τη χρονική στιγμή που το κινητό είναι σταματημένο.
6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln(x-3)}{x-3}$ και $g(x) = \ln^2(x-3)$. Να δείξετε ότι :
α. $g'(x) = 2f(x)$, β. Η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3+e, +\infty)$.
γ. $g'(e^2) < 2/e$. δ. Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(3,4]$.
ε. Να συγκριθούν οι αριθμοί $g(\sqrt{10}), g(\sqrt{11})$.
7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$
α. να υπολογίσετε τα ακρότατα της f
β. να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι : $\ln x^x + 2 > 0$.
8. Αν η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 + ax + 2)$ έχει δύο διαφορετικά τοπικά ακρότατα, να δείξετε ότι το σημείο $A(\alpha, 0)$ απέχει από την αρχή των αξόνων περισσότερο από 2 μονάδες μήκους.
9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$, $x > 0$.
α. Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $x > 0$
β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.