

Ασκήσεις Γενικής Παιδείας Κεφάλαιο 1°

1. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αν είναι:

α. $f(x) = \frac{x+1/x}{x-1/x}$, $x_0 = 0$.

β. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 2}$, $x_0 = 1$.

γ. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{6}}{\sqrt{x+1} - 1}$, $x_0 = 0$.

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0 τις συναρτήσεις :

α. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}-2}{x^2-6x+8}, & x \in [0,4) \cup (4,+\infty) \\ \frac{1}{8}, & x=4 \end{cases}$ στο $x_0 = 4$

β. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}-x}, & x \in (0,1) \cup (1,3] \\ 0, & x=1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α. $\varphi(x) = f(x^2 - 2x + 4)$

β. $k(x) = f(\sin x) + \sin(f(x))$

γ. $g(x) = [f(\ln x)]^2$

δ. $h(x) = f(e^{\sin x} - 2)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \alpha\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\beta$, όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.

γ. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της h διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(9,3)$.

δ. Αν $\alpha = \beta = 1$, να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$K(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ 2, & x=1 \end{cases}, \text{ είναι συνεχής στο } x_0=1.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 + 4x - 2$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} .
 - Να βρείτε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο A .
 - Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{2x^2 - 3x + 1}$.
6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο $f(x) = e^{-\alpha x}$ και $g(x) = \beta \ln x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.
 - Να βρείτε για ποια τιμή του α η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$, είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.
 - Να βρείτε για ποια τιμή του β η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(1, g(1))$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων.
 - Αν A είναι το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ και B το σημείο τομής της C_g με τον άξονα $x'x$ και $\alpha = 1$, $\beta = -1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_g στο B .
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$.
- Να βρείτε σημείο M της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο M να είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: 3x + y - 4 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της (ϵ).
 - Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{f(x) - f(1)}$.
 - Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) \leq 0$;
 - Αν $g(x) = \ln f'(x)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 - Για ποιες τιμές του $x \in A$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
 - Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

$$\alpha^2 \frac{f'(x)}{f''(x)} - \alpha(e^x - 1)f'(x) + 6e^{f(x)} + a = 0.$$
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = e^{2f(x)-1}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.