



## Ασκήσεις στο θεώρημα Fermat

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει τοπικά ακρότατα όταν :

i)  $f(x) = \frac{5x-6}{x-1}$ ,    ii)  $f(x) = x^3 + 2x + 4$ ,    iii)  $f(x) = \ln x + 5x$
2. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η σχέση :  $e^{f(x)} + \operatorname{συ}\nu f(x) = \alpha^x + 1$ , με  $0 < \alpha \neq 1$ . Να δείξετε ότι η  $f$  δεν έχει ακρότατα.
3. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η σχέση :  $\operatorname{συ}\nu f(x) + 3x^5 = f(x) - e^x$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.
4. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $a^x \geq x + 1$ ,  $a > 0$  να δείξετε ότι  $a=e$ .
5. Αν για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει  $\log_a x \leq x - 1$ , με  $0 < a \neq 1$ , να δείξετε ότι  $a=e$ .
6. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $a^x \leq xa^x + 1$ ,  $a > 0$ , να δείξετε ότι  $a=e$ .
7. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $xf(x) \leq e^x - 1$ . Να δείξετε ότι  $f(0)=1$ .
8. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $f(x) + 2e^{3x} + 3x^2 + \operatorname{συ}\nu x \leq 7$ . Αν  $f(0)=4$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .
9. Αν  $a > 0$ ,  $\beta > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $a^x + \beta^x \geq 1 + \operatorname{συ}\nu 3x$ , να δείξετε ότι  $a\beta=1$ .
10. Οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με  $f(1)=1$ ,  $g(1)=2$ .  
Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $f(x) + g(x) - 3x^2 \leq e^{x-1} - 1$ , να δείξετε ότι  $f'(1) + g'(1) = 7$ .
11. Αν  $0 < a < 1$ ,  $0 < \beta < 1$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $\frac{3a^x}{\beta^{3x} + 2} \leq 1$ , να δείξετε ότι  $a=\beta$ .
12. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $e^x + a^x \geq x^4 + 2$ ,  $0 < a \neq 1$ , να βρείτε το  $a$ .
13. Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η σχέση :  $|f(x)| \leq ax e^x - e^{3x} + e^{4x}$ . Να δείξετε ότι  $f'(0)=0$  και  $a=-1$ .