Β΄ ΤΑΞΗ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 29 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1 \ .$$

Μονάδες 10

Β. Έστω δύο σημεία Ε και Ε΄ ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ στο συγκεκριμένο επίπεδο ;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

β. Στην παραβολή $y^2=2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \dfrac{p}{2}$.

Μονάδες 2

γ. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, k, λ με $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (k\beta + \lambda\gamma)$.

Μονάδες 2

δ. Αν Α, Β, Γ είναι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\ \det(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}})\ \right|$$

Μονάδες 2

ε. Η εκκεντρότητα ε της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\upsilon} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha = 12k - 5$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

Μονάδες 10

Β΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε_1: $3x+4y+6=0$ και ε_2: $3x+4y+16=0$.

Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 43

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 113

Γ. $\alpha \to \Sigma$
$\beta \to \Lambda$
$\gamma \to \Sigma$
$\delta \to \Sigma$
$\varepsilon \to \Lambda$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = 5(1,2) - 3(2,3) = (5,10) + (-6,-9) = (-1,1)$
άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Β. $\lambda_{\vec{\gamma}} = \dfrac{1}{-1} = -1$
$\lambda_{\vec{\gamma}} = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1$ και επειδή αν το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ θεωρηθεί με αρχή το Ο(0,0) καταλήγει στο σημείο Α(-1 , 1), δηλαδή στο δεύτερο τεταρτημόριο άρα $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$.

Γ. Επειδή $\vec{u} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow$

$\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$
$(\kappa^2 - \kappa, \kappa)(1,2) = 0 \Leftrightarrow$
$\kappa^2 - \kappa + 2\kappa = 0$
$\kappa^2 + \kappa = 0$
$\kappa(\kappa + 1) = 0$
$\kappa = 0$ ή $\kappa = -1$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Α. $\alpha = 12\kappa - 5$
$\alpha = 12\kappa - 6 + 1$
$\alpha = 2\underbrace{(6\kappa - 3)}_{\lambda \in Z} + 1$

$\alpha = 2\lambda + 1, \quad \lambda \in Z$ οπότε α περιττός ακέραιος.

Β. $\alpha = 12\kappa - 5$

$\alpha = 12\kappa - 8 + 3$

$\alpha = 4\underbrace{(3\kappa - 2)}_{\mu \in Z} + 3$

$\alpha = 4\mu + 3, \quad \mu \in Z$ οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4 είναι **3**.

Γ. Επειδή ο α είναι περιττός άρα από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου σελ. 143 $\alpha^2 = 8\nu + 1, \quad \nu \in Z.$

$A = (\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1)$

$A = (8\nu + 1 + 15)(8\nu + \cancel{1} - \cancel{1})$

$A = (8\nu + 16) \cdot 8\nu$

$A = 8(\nu + 2) \cdot 8\nu$

$A = 64\nu(\nu + 2)$

$A =$ πολ 64.

<u>Β' ΤΡΟΠΟΣ</u>

Το παραπάνω ερώτημα μπορεί να λυθεί θεωρώντας $\alpha = 4\mu + 3$ από το (β) ερώτημα αντικαθιστώντας στην παράσταση το α και κάνοντας πράξεις.

<u>**ΘΕΜΑ 4^{o}**</u>

Α. Για $x = 0$ η $\varepsilon_1 \rightarrow 4\psi + 6 = 0$

$$\psi = -\frac{3}{2}$$

Άρα το σημείο $M\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο της ε_1.

Τότε $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(M, \varepsilon_2) = \dfrac{\left|3 \cdot 0 + 4\left(\frac{3}{2}\right) + 16\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|-6 + 16|}{\sqrt{25}} = \dfrac{10}{5} = 2$

<u>Β' ΤΡΟΠΟΣ</u>

Μπορεί επίσης να λυθεί χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 1 της σελίδας 73 του σχολικού βιβλίου αρκεί οι εξισώσεις των ευθειών να μετατραπούν στη μορφή $\psi = \lambda x + \beta$.

Β. Το σημείο Μ(x , ψ) είναι σημείο της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 αν και μόνο αν:

$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{|3x + 4\psi + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4\psi + 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$|3x + 4\psi + 6| = |3x + 4\psi + 16|$

$3x + 4\psi + 6 = 3x + 4\psi + 16$ ή $3x + 4\psi + 6 = -(3x + 4\psi + 16)$

$6 = 16$ $3x + 4\psi + 6 = -3x - 4\psi - 16$

Αδύνατο $6x + 8\psi + 22 = 0$

$3x + 4\psi + 11 = 0$

Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας είναι $3x + 4\psi + 11 = 0$.

<u>Β' ΤΡΟΠΟΣ</u>

Θεωρούμε ένα σημείο $(0, -\frac{6}{4})$ στην ε_1 και ένα σημείο $(0, -\frac{16}{4})$ στην ε_2.

Το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα παραπάνω σημεία είναι το σημείο $A(0, -\frac{11}{4})$. Η μεσοπαράλληλη διέρχεται από το σημείο Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{3}{4}$. Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι η $\psi - (-\frac{11}{4}) = -\frac{3}{4}(x - 0) \Leftrightarrow 3x + 4\psi + 11 = 0$.

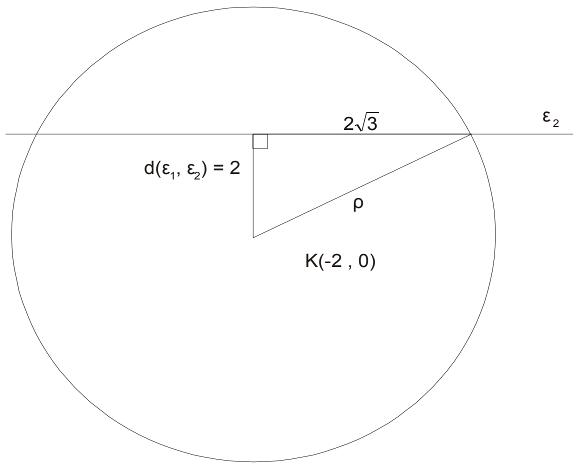
Γ. Βρίσκω το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα x'x:

$3x + 4 \cdot 0 + 6 = 0$

$3x = -6$

$x = -2$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(-2, 0)



Από Πυθαγόρειο Θεώρημα

$\rho^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$

$\rho^2 = 4 + 4 \cdot 3$

$\rho^2 = 16$

$\rho = 4$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$(x+2)^2 + \psi^2 = 16$

Επιμέλεια λύσεων:
Ν. Δακουτρός,
Τ. Δρούτσας,
Δ. Νικολάου,
Γ. Περδίκης,
Δ. Χατζόπουλος,
Χ. Χρηστίδης