ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 11

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
α. Εμβαδόν τραπεζίου	**1.** $E = \tau\varrho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E = \dfrac{(B+\beta)\upsilon}{2}$
	4. $E = \dfrac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$
	5. $E = \alpha\upsilon_\alpha$

Στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν δύο τύποι.

Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**", αν η πρόταση είναι σωστή, και "**Λάθος**", αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$$

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν ισχύει η σχέση:

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{2} = R^2 .$$

γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi_\nu = 150^o$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν.

Μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών γ=2, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ και εμβαδόν $(ΑΒΓ) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $\alpha = \sqrt{3}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

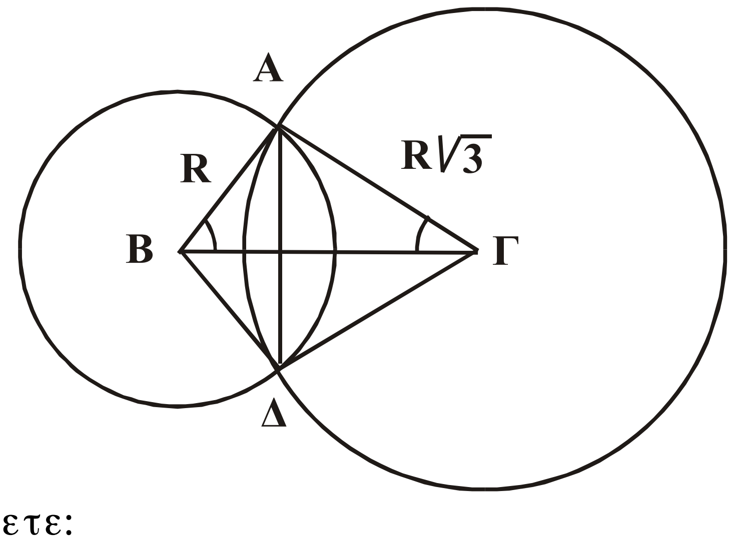
Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με μήκη πλευρών ΑΒ=R και ΑΓ= $R\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, $R\sqrt{3}$).



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 8

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ .213 (θεώρημα 1)

Β. α→ 3 β→ 1 γ→4

Γ. α→ Λ β→Λ γ→ Σ δ→ Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. $\varphi_{\nu}=180^{0}-\dfrac{360^{0}}{\nu}\Leftrightarrow 150^{0}=180^{0}-\dfrac{360^{0}}{\nu}\Leftrightarrow \nu=12$

β. $\omega_{12}=\dfrac{360^{0}}{12}=30^{0}$

γ. $E_{12}=12\cdot\left(O\overset{\Delta}{A_1}A_2\right)=12\cdot\dfrac{1}{2}\cdot OA_1\cdot OA_2\cdot \eta\mu\omega_{12}=6R^{2}\dfrac{1}{2}=3R^{2}$τ.μ

ΘΕΜΑ 3^{o}

α. $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\beta\cdot\gamma\cdot\eta\mu A\Leftrightarrow\dfrac{\beta\cdot\gamma\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{2}\beta\cdot\gamma\cdot\eta\mu A\Leftrightarrow\eta\mu A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\eta\mu 45^{0}\Leftrightarrow\hat{A}=45^{0}$

Εφαρμόζοντας νόμο συνημιτόνων έχω:

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=(1+\sqrt{2})^2+2^2-2(1+\sqrt{2})\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+2\sqrt{2}+2+4-2\sqrt{2}-4=3\Leftrightarrow\alpha=\sqrt{3}$

β. $(AB\Gamma)=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}\Leftrightarrow R=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4(AB\Gamma)}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 2}{4\cdot\dfrac{(1+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

γ. Εφαρμόζουμε γενίκευση Πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά ΑΓ.

$A\Gamma^2=AB^2+B\Gamma^2-2B\Gamma\cdot\pi\rho o\beta_{B\Gamma}AB\Leftrightarrow(1+\sqrt{2})^2=2^2+\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}\cdot\pi\rho o\beta_{B\Gamma}AB\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+2=$

$=4+3-2\sqrt{3}\,\pi\rho o\beta_{B\Gamma}AB\Leftrightarrow\pi\rho o\beta_{B\Gamma}AB=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{2})\sqrt{3}}{3}$

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$)

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = R^2 + \left(R\sqrt{3}\right)^2 = 4R^2 \Leftrightarrow B\Gamma = 2R$$

β) Επειδή η κάθετη πλευρά ΑΒ είναι το μισό της υποτείνουσας ΒΓ $\left(AB = \frac{B\Gamma}{2}\right)$ η γωνία

$A\hat{\Gamma}B = 30^0$ άρα η $A\hat{B}\Gamma = 60^0$

γ) Τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ και $B\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$ είναι ίδια άρα και ισεμβαδικά

Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma) = 2\dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$τ.μ

δ) Από το β ερώτημα έχω $A\hat{B}\Delta = 120^0$ και $A\hat{\Gamma}\Delta = 60^0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$E = \left(B \cdot \overset{\frown}{A\Delta}\right) - \left(B\overset{\Delta}{A\Delta}\right) + \left(\Gamma\overset{\frown}{A\Delta}\right) - \left(\Gamma\overset{\Delta}{A\Delta}\right) = \frac{\pi \quad R^2 \quad 120}{360} - \frac{1}{2}R^2 \quad \eta\mu 120^0 + \frac{\pi\left(R\sqrt{3}\right)^2 60}{360} - \frac{1}{2}\left(R\sqrt{3}\right)^2 \quad \eta\mu 60^0 =$$

$$\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi R^2}{6} - R^2\sqrt{3} = \frac{\left(5\pi - 6\sqrt{3}\right) \quad R^2}{6}\tau\mu$$

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων:
Χατζόπουλος Δημήτρης, Χατζηαντωνίου Ελένη