Θέματα Μαθηματικών
Θετικής Κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου 2000

Ζήτημα 1ο

Α.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ.

(Μονάδες 2)

Α.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

(Μονάδες 4,5)

Α.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 6)

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Δίνεται κύκλος
$x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του Μ(1, -3). Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

Α. $x + 3y = 10$

Β. $5x - y = 8$

Γ. $x - 3y = 10$

Δ. $3x + 2y = 3$

Ε. $(1/2)x + y = 5$

(Μονάδες 4)

Β.2. Στη στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη στήλη Β τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2+y^2-6x+4y-3=0$	**1.** K(0,-1), ρ=2
β. $x^2+(y+1)^2=4$	**2.** K(3,-2), ρ=1
	3. K(3,-2), ρ=4

(Μονάδες 4)

Β.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετραδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο (1,-1) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + λ^2 = 0$ όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

(Μονάδες 4,5)

Απάντηση:

Α.1. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = ρ^2.$$

Α.2. Η εξίσωση $x^2 + y^2$ Αx + Βy + Γ = 0 παριστάνει κύκλο όταν $Α^2 + Β^2 - 4Γ > 0$. Το κέντρο του τότε είναι το:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και η ακτίνα του:

$$ρ = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ}}{2}$$

Α.3.

α) Επειδή το $A(x_1,y_1)$ είναι σημείο του κύκλου, θα ισχύει ότι:

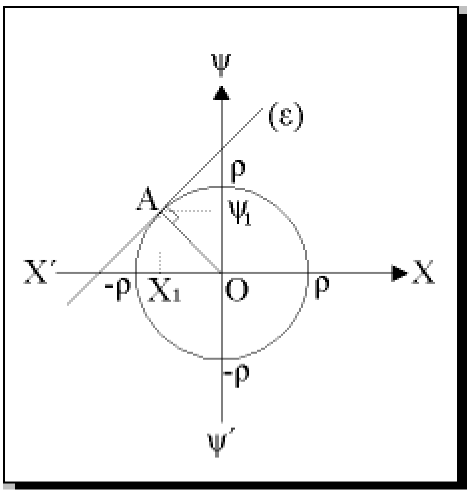
$$x_1^2 + y_1^2 = ρ^2 \qquad (1)$$

Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $A(x_1,y_1)$. Τότε:

$$(ε) \perp \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow λ_ε \cdot λ_{\overrightarrow{OA}} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow λ_ε \cdot \frac{y_1}{x_1} = -1 \Leftrightarrow λ_ε = -\frac{y_1}{x_1}$$

για κάθε $x_1, y_1 \neq 0$.



Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α, θα έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = \lambda_\varepsilon \bullet (x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = -(x_1/y_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} yy_1 + xx_1 = \rho^2$$

β) Αν $x_1 = 0$, τότε Α(0,ρ) ή Α(0,-ρ) οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$y = \rho$ ή $y = -\rho \Leftrightarrow y \bullet \rho = \rho^2$ ή $y \bullet (-\rho) = \rho^2 \Leftrightarrow yy_1 = \rho^2$ ή $yy_1 = \rho^2$
$\Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = \rho^2$

αφού $x_1 = 0$.

γ) Αν $y_1 = 0$, τότε Α(ρ,0) ή Α(-ρ,0) οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$x = \rho$ ή $x = -\rho \Leftrightarrow x \bullet \rho = \rho^2$ ή $x \bullet (-\rho) = \rho^2 \Leftrightarrow x \bullet x_1 = \rho^2$ ή $x \bullet x_1 = \rho^2$
$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$

αφού $y_1 = 0$.

Β.1. Αφού το σημείο Μ(1,-3) επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου
$x^2 + y^2 = 10$, η εφαπρομένη στο Μ θα έχει εξίσωση:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow x \bullet 1 + y \bullet (-3) = 10 \Leftrightarrow x - 3y = 10$$

επομένως σωστή είναι η απάντηση Γ.

Β.2.
α. Ο κύκλος με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ έχει Α = -6, Β = 4, Γ = -3, άρα:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

δηλαδή Κ(3,-2) και ακτίνα:

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

β. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ έχει κέντρο Κ(0,-1) και ακτίνα ρ = 2.
Επομένως έχουμε:

$$\alpha \leftrightarrow 3 \text{ και } \beta \leftrightarrow 1$$

Β.3.

α. Το σημείο (1,-1) είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$, αφού $1^2 + (-1)^2 = 2$.

β. Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{4}{5} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Επειδή έχουμε δύο λύσεις, ο κύκλος και η ευθεία τέμνονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$ γράφεται ισοδύναμα: $x^2 + y^2 = -\lambda^2 < 0$
Επομένως δεν είναι εξίσωση κύκλου.
Άρα:

α $\leftrightarrow$ Σ   β $\leftrightarrow$ Λ   γ $\leftrightarrow$ Λ.

Ζήτημα 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $α = 6κ + υ$, με $0 \le υ \le 6$ και κ ακέραιος. Να δείξετε ότι:

α. Οι παραπάνω ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή
$α = 6κ + 1$ ή τη μορφή $α = 6κ + 5$, όπου κ ακέραιος.

(Μονάδες 10)

β. Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $α^2 = 3μ + 1$, όπου μ ακέραιος.

(Μονάδες 10)

γ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Μονάδες 5)

Απάντηση:

α. Αφού $α = 6κ + υ$ με $0 \le υ < 6$, έχουμε ότι:

Αν $υ = 0$, $α = 6κ = 2(3κ) =$ πολ2, απορρίπτεται.
Αν $υ = 1$, $α = 6κ + 1$.
Αν $υ = 2$, $α = 6κ + 2 = 2(3κ + 1) =$ πολ2, απορρίπτεται.
Αν $υ = 3$, $α = 6κ + 3 = 3(2κ + 1) =$ πολ3, απορρίπτεται.
Αν $υ = 4$, $α = 6κ + 4 = 2(3κ + 2) =$ πολ2, απορρίπτεται.
Αν $υ = 5$, $α = 6κ + 5$.

Επομένως $α = 6κ + 1$ ή $α = 6κ + 5$.

β. $\alpha = 6\kappa + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = (6\kappa + 1)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 36\kappa^2 + 12\kappa + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 3(12\kappa^2 + 4\kappa) + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\mu + 1,\ \mu = 12\kappa^2 + 4,\ \kappa \in Z.$

$\alpha = 6\kappa + 5 \Leftrightarrow \alpha^2 = (6\kappa + 5)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 36\kappa^2 + 60\kappa + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 3(12\kappa^2 + 20\kappa + 8) + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\mu + 1,$

$\mu = (12\kappa^2 + 20 + 8)\ \kappa \in Z.$

γ. $(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 5)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 5)\ (6\kappa + 5 + 6\mu + 5) =$

$= 6(\kappa - \mu)\ (6\kappa + 6\mu + 10) = \text{πολ}3.$

$(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 1)\ (6\kappa + 5 + 6\mu + 1) =$

$= (6\kappa - 6\mu + 4)\ (6\kappa + 6\mu + 6) = 6(6\kappa - 6\mu + 4)\ (\kappa + \mu + 1) = \text{πολ}3$

$(6\kappa + 1)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 1 - 6\mu - 1)\ (6\kappa + 1 + 6\mu + 1) =$

$= 6(\kappa - \mu)\ (6\kappa + 6\mu + 2) = \text{πολ}3.$

<u>Ζήτημα 3ο</u>

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4,\text{-}2) \quad , \quad \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (\text{-}7,8)$$

α. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} = (\text{-}1,2)$$

και

$$\vec{\beta} = (2,\text{-}2)$$

(Μονάδες 7)

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε τα διανύσματα:

$$\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

και

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$

να είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ. Να αναλυθεί το διάνυσμα:

$$\vec{\gamma} = (3,\text{-}1)$$

σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

α). Είναι:

$$\left.\begin{array}{r} 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,\text{-}2 \\ \vec{\alpha}\text{ - }3\vec{\beta}=(\text{-}7,8) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 3\vec{\alpha}=(\text{-}3,6) \Leftrightarrow \vec{\alpha}=(\text{-}1,2)$$

Τότε:

$$2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,\text{-}2) \Leftrightarrow 2(\text{-}1,2)+3\vec{\beta}=(4,\text{-}2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(4,\text{-}2)-(\text{-}2,4) \Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(6,\text{-}6) \Leftrightarrow \vec{\beta}=(2,\text{-}2)$$

β) $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=0$ (1)

Όμως:

$$\vec{\alpha}^2=(-1)^2+2^2=5$$

$$\vec{\beta}=(2)^2+(-2)^2=8$$

και

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot(-1)+2\cdot(-2)=-6$$

Τότε η (1) γίνεται:

10κ –18κ – 12 + 24 = 0 ⇔

⇔ 12 = 8κ ⇔ κ = 12/8 ⇔ κ = 3/2.

γ. Έστω τα διανύσματα $\vec{\delta},\vec{\varepsilon}$, όπου:

$$\vec{\delta}\,//\,\vec{\alpha}$$

και

$$\vec{\varepsilon}\perp\vec{\alpha}.$$

Τότε:

$$\vec{\delta}=\vec{\lambda}\,\vec{\alpha},\ \lambda\in R \quad \Leftrightarrow\ \vec{\delta}=(\text{-}\lambda,\ 2\lambda),\ \lambda\in R$$

και έστω

$$\vec{u}=(2,1)\perp\vec{\alpha} \quad (\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=0)$$

Τότε θα πρέπει:

$$\vec{u}\,//\,\vec{\varepsilon} \Leftrightarrow \vec{\varepsilon}=v\cdot\vec{u} \Leftrightarrow \vec{\varepsilon}=(2v,v),\ v\in R.$$

Ακόμη πρέπει:

$$\vec{\gamma} = \vec{\delta} + \vec{\varepsilon} \Leftrightarrow (3,-1) = (-\lambda, 2\lambda) + (2\nu, \nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -\lambda + 2\nu \\ -1 = 2\lambda + \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -2\lambda + 4\nu \\ -1 = 2\lambda + \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\nu \\ \lambda = 2\nu - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\gamma} = \vec{\delta} + \vec{\varepsilon}, \text{αν } \vec{\delta} = (1,-2), \vec{\varepsilon} = (2,1) \text{ με } \vec{\varepsilon} \perp \vec{\delta}$$

<u>Ζήτημα 4ο</u>

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

(Μονάδες 8)

β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2,2), Λ(-1,5) και Μ(1,3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.

(Μονάδες 4,5)

γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

(Μονάδες 6)

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

(Μονάδες 6,5)

Απάντηση:

α. Ο φάρος (Φ) θα είναι το σταθερό σημείο των ευθειών:

$$(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x - x + \lambda y + y - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x + y - 1) + (-x + y - 3) = 0$$

Το σταθερό σημείο (αν υπάρχει) βρίσκεται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Άρα: Φ(-1, 2).

β. ΚΦ: $y - y_{Φ} = λ_{ΚΦ}(x - x_{Φ}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-2}{-1-2}(x+1) \Leftrightarrow y - 2 = 0$$

ΛΦ: Αφού $x_{Λ} = x_{Φ}$, τότε η εξίσωση είναι η $x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$.

ΜΦ: $y - y_{Φ} = λ_{ΜΦ}(x - x_{Φ}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{2-3}{-1-1}(x+1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2y - x - 5 = 0$$

γ. $$d(K, ΦΜ) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d(Λ, ΦΜ) = \frac{|2 \cdot 5 - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Επειδή d(Λ, ΦΜ) = 2d(Κ, ΦΜ), το Κ διέρχεται πιο κοντά στη φωτεινή ακτίνα ΦΜ σε σχέση με το Λ.

δ. Επειδή ΦΛ // yy΄και ΦΜ δεν είναι παράλληλη yy΄, τα Φ, Λ, Μ δεν είναι συνευθειακά και ορίζουν το τρίγωνο ΦΛΜ. Τότε:

$$E_{ΦΛΜ} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{ΦΛ}, \overrightarrow{ΦΜ})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1-(-1) & 1-(-1) \\ 5-2 & 3-2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right| \Leftrightarrow E_{ΦΛΜ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{ΦΛΜ} = 3 \text{ τετρ. μονάδες.}$$