ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5-6

Κώδικες Hadamard & Reed-Muller
Γραμμικοί Κώδικες

Άσκηση 9 (Φυλλάδιο 1η)

Να δείξετε ότι για $m \geq 1$, ο κώδικας Reed-Muller πρώτης τάξης $C(1,m)$ είναι ένας γραμμικός $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$ κώδικας.

▶

Με τη μέθοδο της επαγωγής ως προς m έχουμε :

◈ Για m=1 : Έχουμε τον κώδικα $C(1,1)=\{00, 01, 10, 11\}$

Δηλαδή είναι $(2, 4, 1) = (2^1, 2^{1+1}, 2^{1-1})$

◈ Υποθέτουμε ότι ισχύει για m : Δηλαδή ο $C(1,m)$ είναι $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$ κώδικας

◈ Θα δείξουμε ότι ισχύει για m+1 : Δηλαδή πως είναι $(2^{m+1}, 2^{m+2}, 2^m)$

Έχουμε $C(1,m+1) = C(1,m)*C(0,m)$

Μήκος Κώδικα : $\{ C(1,m+1) \} = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$

Πλήθος : $|C(1,m+1)| = 2|C(1,m)| = 2 \cdot 2^{m+1} = 2^{m+2}$

Ελάχιστη απόσταση : $d(C(1,m+1)) = \min\{2 \cdot 2^{m-1}, 2^m\} = 2^m$

Άρα ο κώδικας Reed-Muller πρώτης τάξης $C(1,m)$ είναι ένας $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$ κώδικας.

Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και γραμμικός, δηλαδή εδώ αρκεί να είναι κλειστός ως προς το άθροισμα.

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά.

◈ Ο $C(1,1)$ είναι προφανώς γραμμικός.

◈ Υποθέτουμε ότι ο $C(1,m)$ είναι γραμμικός.

◈ Θα δείξουμε ότι και ο $C(1,m+1)$ είναι γραμμικός:

Είναι $C(1,m+1) = C(1,m)*C(0,m)$

Έστω $\underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d} \in C(1, m+1)$. Τότε θα δείξουμε ότι $\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d} \in C(1, m+1)$, για όλες τις

περιπτώσεις:

α) c=uu , d=vv

β) c=uu , d=vv^c

γ) c=uu^c , d=vv όπου $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in C(1, m)$

δ) c=uu^c , d=vv^c

Σε κάθε περίπτωση το άθροισμα ανήκει στον $C(1,m+1)$, επομένως ο $C(1,m+1)$ είναι γραμμικός ■