Άσκηση 7 (φυλλάδιο $2^η$)

Μία πηγή πληροφορίας έχει ένα αλφάβητο $\{u_1, u_2, u_3\}$ και παράγει μία στατική αλυσίδα Markov πρώτης τάξης. Οι πιθανότητες μετάβασης από ένα σύμβολο u_i στο σύμβολο u_j με $i \neq j$ είναι όλες ίσες με p/2.

(α) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων που αντιστοιχεί σ' αυτήν την αλυσίδα.

(β) Προσδιορίστε τις πιθανότητες των συμβόλων u_1, u_2 και u_3 .

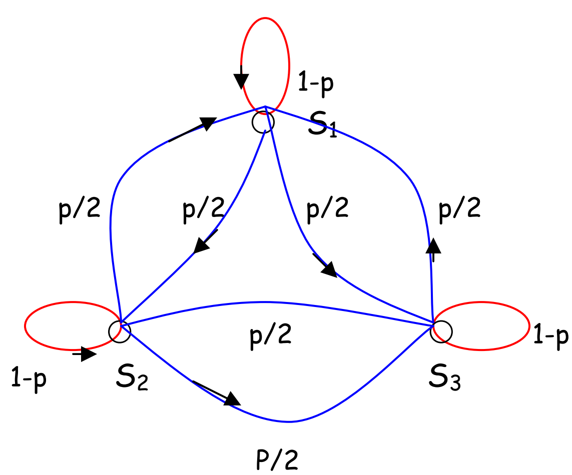
(γ) Υπολογίστε το ποσό πληροφορίας όσον αφορά μία αυθαίρετη μετάβαση.

(δ) Προσδιορίστε για ποιο p αυτό το ποσό πληροφορίας πετυχαίνει τη μέγιστη τιμή.

(ε) Τι ερμηνεία δίνετε στις τιμές του H(U) που βρίσκονται για p=0 και p=1, και στη μέγιστη τιμή του H(U) ;

▶

(α) Το πλήθος των καταστάσεων είναι: $m^k = 3^1 = 3$, οι οποίες είναι οι : $S_1=\{u_1\}$, $S_2=\{u_2\}$, $S_3=\{u_3\}$ και το διάγραμμα καταστάσεων είναι:



(β) Οι πιθανότητες των συμβόλων u_1, u_2, u_3 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$p(u_i) = \sum_{k=1}^{3} p(u_k) \cdot p(u_i \mid u_k)\text{, k=1,2,3,}$$

οπότε έχουμε :

$p(u_1) = (1-p)\cdot p(u_1) + p/2\cdot p(u_2) + p/2\cdot p(u_3)$

$p(u_2) = (1-p)\cdot p(u_2) + p/2\cdot p(u_1) + p/2\cdot p(u_3)$

$p(u_3) = (1-p)\cdot p(u_3) + p/2\cdot p(u_1) + p/2\cdot p(u_2)$

Από τη λύση του συστήματος έχουμε: $p(u_1) = p(u_2) = p(u_3) = 1/3$.

(γ) Το ποσό της πληροφορίας για μια αυθαίρετη μετάβαση θα είναι:

$$\begin{aligned}
H(U_2|U_1) &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(u_{1i}, u_{2j}) \cdot \log p(u_{2j} \mid u_{1i}) \\
&= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(u_i) \cdot p(u_j \mid u_i) \cdot \log p(u_j \mid u_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} p(u_i) \left[-\sum_{j=1}^{3} p(u_j \mid u_i) \cdot \log p(u_j \mid u_i) \right] \\
&= 1 \cdot \left[-(1-p)\log(1-p) - \frac{p}{2}\log\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\log\frac{p}{2} \right] \\
&= -(1-p)\log(1-p) - p\log\frac{p}{2} \\
&= -(1-p)\log(1-p) - p\log p + p\log 2 \\
&= p - p\log p - (1-p)\log(1-p).
\end{aligned}$$

(δ) Το παραπάνω ποσό μεγιστοποιείται, όταν μεγιστοποιείται η συνάρτηση :

$$f(p) = p - p\log p - (1-p)\log(1-p).$$

Άρα παίρνοντας πρώτη παράγωγο έχουμε :

$f'(p) = \log\left(\dfrac{1-p}{p}\right) + 1$, οπότε:

$$f'(p) = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{1-p}{p}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = 2 \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$$

Επειδή $f''(p) < 0$, συμπεραίνουμε ότι για $p = \frac{2}{3}$ η f(p) = $H(U_2|U_1)$ μεγιστοποιείται.

(ε)

- Αν p = 0, τότε κάθε κατάσταση μεταβαίνει στον εαυτό της με πιθανότητα 1, οπότε δεν έχουμε καθόλου αβεβαιότητα, δηλαδή δεν έχουμε καθόλου πληροφορία.
- Αν $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$, τότε έχουμε $H(U_2|U_1)$ = log3 = $H(U_2)$, δηλαδή σαν να είναι ανεξάρτητα.
- Αν p = 1, τότε $H(U_2|U_1)$ =1, δηλαδή έχουμε πληροφορία ίση με 1 bit. ■