ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η διακριτή πηγή πληροφορίας με μνήμη

Άσκηση 6 (φυλλάδιο 1η)

Μία πηγή πληροφορίας με πηγαίο αλφάβητο {0,1} παράγει μία αλυσίδα Markov δεύτερης τάξης, η οποία περιγράφεται από τις παρακάτω πιθανότητες μετάβασης:

$p(0|00) = 1/4$, $p(0|01) = 1/4$
$p(0|10) = 3/4$, $p(0|11) = 3/4$

(α) Δείξτε ότι η αλυσίδα Markov περιγράφεται πλήρως από τις πιθανότητες μετάβασης.
(β) Κατασκευάστε το διάγραμμα καταστάσεων.
(γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες κάθε μίας από τις καταστάσεις.
(δ) Υπολογίστε τις πιθανότητες των συμβόλων εξόδου της πηγής.
(ε) Δείξτε πως η αλυσίδα μπορεί να γίνει μη εργοδική αλλάζοντας μία από τις δοσμένες πιθανότητες μετάβασης.

▶

(α) Επειδή η αλυσίδα Markov είναι δεύτερης τάξης δηλ. $k=2$, κάθε κατάσταση προσδιορίζεται από μια ακολουθία $k=2$ συμβόλων καθένα από τα οποία μπορεί να επιλεγεί από $m=2$ δυνατότητες, οπότε συνολικά έχουμε $m^k=4$ διαφορετικές καταστάσεις.

Αυτές είναι οι: $S_1=\{00\}$, $S_2=\{01\}$, $S_3=\{10\}$, $S_4=\{11\}$.

Για να προσδιορισθεί πλήρως η αλυσίδα μας, χρειαζόμαστε $m^{k+1}-m^k=4$ πιθανότητες μετάβασης, τις οποίες έχουμε.
Οι υπόλοιπες υπολογίζονται αμέσως παρακάτω :

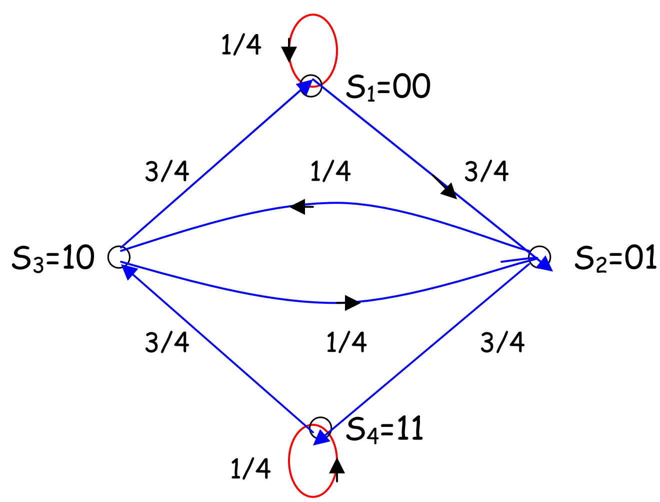
$$p(1|00)=1-p(0|00)=3/4$$

$$p(1|01)=1-p(0|01)=3/4$$

$$p(1|10)=1-p(0|10)=1/4$$

$$p(1|11)=1-p(0|11)=1/4$$

(β) Αφού έχουμε τις πιθανότητες μετάβασης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα καταστάσεων:



(γ) Οι πιθανότητες κάθε μιας από τις καταστάσεις υπολογίζονται από τη σχέση : $p(S_i)=\sum_{k=1}^{4} p(S_k)\cdot p(S_i \mid S_k)$, i=1,2,3,4 οπότε έχουμε :

$$p(S_1) = 1/4 \cdot p(S_1) + 3/4 \cdot p(S_3)$$
$$p(S_2) = 3/4 \cdot p(S_1) + 1/4 \cdot p(S_3)$$
$$p(S_3) = 1/4 \cdot p(S_2) + 3/4 \cdot p(S_4)$$
$$p(S_4) = 3/4 \cdot p(S_2) + 1/4 \cdot p(S_4)$$

Από τη λύση αυτού του συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, παίρνουμε ότι : $p(S_1) = p(S_2) = p(S_3) = p(S_4) = 1/4$.

(δ) Οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου της πηγής είναι :

$$p(0) = p(0|00)\cdot p(00) + p(0|01)\cdot p(01) + p(0|10)\cdot p(10) + p(0|11)\cdot p(11) =$$

$= 1/4 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/4$
$= 8/16 = 1/2.$

$$p(1) = p(1|00) \cdot p(00) + p(1|01) \cdot p(01) + p(1|10) \cdot p(10) + p(1|11) \cdot p(11) =$$
$$= 3/4 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/4 = 8/16 = 1/2.$$

(ε) Αν κόψουμε τη μετάβαση από την κατάσταση $S_1 \rightarrow S_2$ με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ και θέσουμε $p(1|00)=0$ και $p(0|00)=1$, δηλαδή $S_1 \longrightarrow S_1$ με πιθανότητα 1 , τότε η αλυσίδα γίνεται μη εργοδική. ■