Άσκηση 12 (Φυλλάδιο 4η)

Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κωδικών λέξεων βάρους 3, του δυαδικού κώδικα Hamming Ham(r,2).

▶

Ο κώδικας Hamming Ham(r,2) είναι τέλειος, συνεπώς υπάρχουν ακριβώς 3 λέξεις βάρους 2 σε κάθε σφαίρα με κέντρο την κωδική λέξη $\underset{\sim}{c}$ βάρους 3. Αυτές οι λέξεις βρίσκονται διαγράφοντας μία από τις τρεις μονάδες στην $\underset{\sim}{c}$.

Επομένως, ο αριθμός των κωδικών λέξεων βάρους 3 είναι ίσος με τον αριθμό των λέξεων βάρους 2 στο Z_2^n διαιρεμένο με 3, δηλαδή αν N είναι ο αριθμός των κωδικών λέξεων βάρους 3 θα έχουμε $N = \dfrac{\binom{n}{2}}{3} = \dfrac{n(n-1)}{6}$.

Για να δείξουμε ότι ο N είναι ακέραιος, αρκεί να θυμηθούμε ότι $n = 2^r - 1$

Έτσι θα έχουμε $N = \dfrac{(2^r-1)(2^r-2)}{6} = \dfrac{(2^r-1)(2^{r-1}-1)}{3}$ οπότε:

Το $2^{r-1}-1$ μπορεί πάντοτε να γραφτεί στη μορφή 3k+λ, όπου λ=0,1 ή 2.

Αλλά αν λ=2, θα πάρουμε $2^{r-1}-1$ = 3k+2 ή 2^{r-1}=3k+3 το οποίο δεν είναι δυνατόν αφού το 2^{r-1} δεν διαιρείται με 3. Συνεπώς λ=0 ή λ=1.

Αν λ=0. τότε το $2^{r-1}-1$ διαιρείται με 3 και

αν λ=1 τότε το $2^r - 1 = 2(2^{r-1}-1)+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3$ διαιρείται με το 3.

Άρα N ακέραιος ∎