Άσκηση 10 (Φυλλάδιο 2η)

Να δείξετε ότι ο κώδικας Reed-Muller r-τάξης C(r,m) έχει παραμέτρους

$\left[2^m, 1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r}, 2^{m-r}\right]$, όπου το άθροισμα για τη διάσταση του κώδικα

θεωρείται 1 αν r=0.

▶

Θα δείξουμε τη σχέση με επαγωγή ως προς r.

◊Για r = 0 $C(0,m)=\{\underline{0},\underline{1}\} \rightarrow \left[2^m, 1, 2^m\right]$ *όπου* $\begin{pmatrix} \underline{0}=00\ldots0 \\ \underline{1}=11\ldots1 \end{pmatrix}$.

◊Για r = 1 $C(1,m)\rightarrow\left[2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1}\right]$ από την προηγούμενη άσκηση.

◊Υποθέτουμε ότι $C(r-1,m)=\left[2^m, 1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r-1}, 2^{m-r+1}\right]$ για $m \geq r-1$.

Θεωρούμε τον $C(r,m)$:

Αν **m = r_** $C(m,m)\rightarrow\left[2^m, 2^m, 1\right]$ αφού $1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{m}=2^m$

Έπειτα κάνουμε επαγωγή ως προς m διατηρώντας το r σταθερό:

Υποθέτουμε ότι ο $C(r,m)\rightarrow\left[2^m, 1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r}, 2^{m-r}\right]$ είναι γραμμικός.

Θα δείξουμε ότι ο $C(r,m+1)$ είναι γραμμικός :

Γνωρίζουμε ότι $C(r,m+1)=C(r,m)*C(r-1,m)$ απ' όπου έπεται ότι

- $\text{length}\left[C(r,m+1)\right]=2\cdot\text{length}\left[C(r,m)\right]=2\cdot 2^m=2^{m+1}$ και

- $|C(r,m+1)|=|C(r,m)|*|C(r-1,m)|=2^{\dim[C(r,m)]+\dim[C(r-1,m)]}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim[C(r,m+1)]=\dim[C(r,m)]+\dim[C(r-1,m)]=$$

$$=\left\{1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r}\right\}+\left\{1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r-1}\right\}\overset{(*)}{=}1+\binom{m+1}{1}+\ldots+\binom{m+1}{r}$$

η σχέση (*)ισχύει από το τρίγωνο του Pascal, δηλαδή $\binom{m}{s}+\binom{m}{s-1}=\binom{m+1}{s}$.

- Για την απόσταση, εξ υποθέσεως $d[C(r,m)]=2^{m-r}$, έχουμε ότι

$$d[C(r,m+1)]=\min\{2d[C(r,m)],d[C(r-1,m)]\}=$$

$$=\min\{2\cdot 2^{m-r},2^{m-r+1}\}=2^{m-r+1}.$$

Άρα ο κώδικας Reed-Muller $C(r,m)$ με $\left[2^m,1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r},2^{m-r}\right]$ είναι γραμμικός ■