ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΑΞΗ : Γ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Έστω η εξίσωση δευτέρου βαθμού : $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $a\neq 0$ (1).

α) Ποια παράσταση λέγεται Διακρίνουσα και τι γνωρίζετε για το πλήθος των λύσεων της (1), σε σχέση με τη Διακρίνουσα;

β) Ποιες είναι οι λύσεις της (1) σε κάθε μία από τις περιπτώσεις του ερωτήματος α);

γ) Συμπληρώστε στο γραπτό σας την παρακάτω πρόταση :

«Αν ρ_1 , ρ_2 οι λύσεις της εξίσωσης (1), τότε το τριώνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο………………………………»

ΘΕΩΡΙΑ 2

α) Διατυπώστε το θεώρημα του Θαλή (να γίνει σχήμα).

β) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε γράψτε με τι ισούται :

i) ο λόγος των Περιμέτρων τους

ii) ο λόγος των Εμβαδών τους.

γ) Να συμπληρώσετε στο γραπτό σας, το κενό της παρακάτω πρότασης:

« Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε ……………………...»

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι ρητές παραστάσεις : $A=\dfrac{3x^2+6x}{3x^2-12}$ και $B=\dfrac{4x+12}{x^2+6x+9}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται αυτές και να τις απλοποιήσετε.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{2x^2+x+5}{x^2+x-6}=A-B$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

Δίνεται το γραμμικό σύστημα : $\begin{cases} 3x+2y=12 & (\varepsilon_1) \\ 2x-y=1 & (\varepsilon_2) \end{cases}$.

α) Βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

β) Βρείτε το σημείο Β, στο οποίο η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα χ΄χ.

γ) Αν Γ είναι η κορφή της παραβολής $y=-x^2+4x-5$, υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

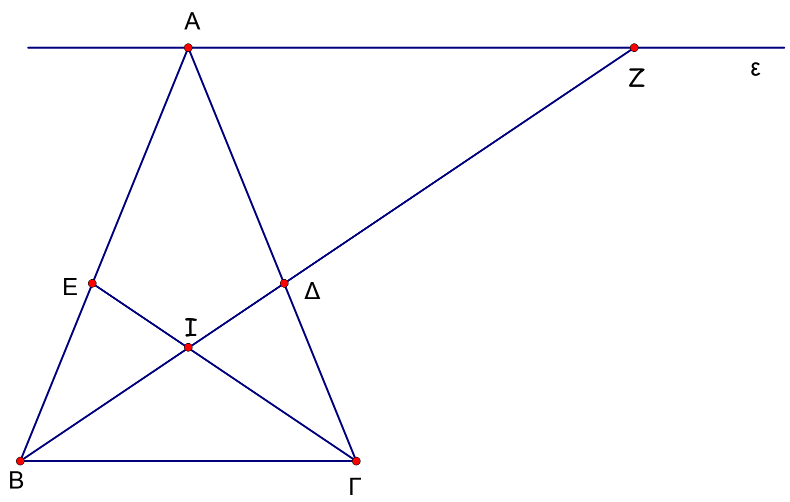
<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΒΔ , ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Αν Αε//ΒΓ και η προέκταση της ΒΔ τέμνει την Αε στο Ζ, να αποδείξετε ότι :

α) ΒΔ = ΓΕ

β) Τα τρίγωνα ΒΑΖ και ΒΙΓ είναι όμοια, και να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από αυτήν την ομοιότητα.



Απαντήστε μόνο σε <u>μία Θεωρία</u> και <u>δύο Ασκήσεις</u>

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ 1

α) Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$. (1)

Διακρίνουσα λέγεται η παράσταση : Δ = β^2 - 4αγ.

Αν Δ>0 η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις, πραγματικές και άνισες.

Αν Δ=0 η εξίσωση (1) έχει μία διπλή πραγματική λύση.

Αν Δ<0 η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές λύσεις.

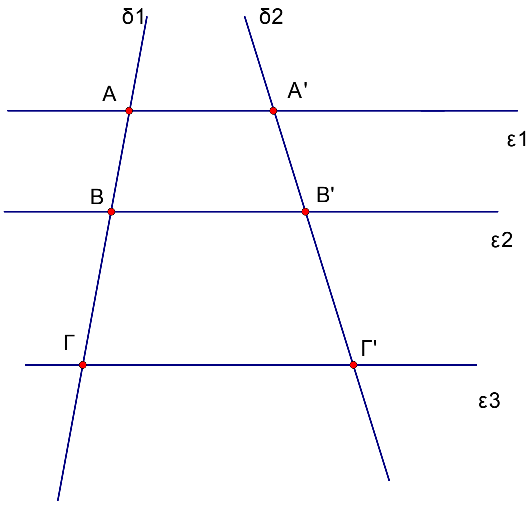
β) Όταν Δ>0, οι λύσεις δίνονται από τη σχέση : $\rho_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Όταν Δ=0, η λύση δίνεται από τη σχέση : $\rho_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$

γ) « Αν ρ_1, ρ_2 οι λύσεις της εξίσωσης (1), τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο : $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

ΘΕΩΡΙΑ 2

α) Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, τέμνουν δύο άλλες δ_1, δ_2, τότε ορίζουν σ΄ αυτές τμήματα ανάλογα.



$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B'\Gamma'}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A'\Gamma'}}$$

β) Αν Π και Π΄ είναι οι Περίμετροι και Ε, Ε΄ τα Εμβαδά των δύο ομοίων τριγώνων τότε :

i) $\dfrac{\Pi}{\Pi'}=\lambda$ ii) $\dfrac{E}{E'}=\lambda^2$.

γ) « Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή τέμνει την τρίτη πλευρά στο μέσο της ».

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) $$A=\frac{3x^2+6x}{3x^2-12}=\frac{3x(x+2)}{3(x^2-4)}=\frac{3x(x+2)}{3(x+2)(x-2)}=\frac{x}{x-2}.$$

Η παράσταση αυτή ορίζεται για :

$$(x+2)(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow x+2\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x-2\neq 0$$
$$x\neq -2 \quad \kappa\alpha\iota \quad x\neq 2$$

$$B=\frac{4x+12}{x^2+6x+9}=\frac{4(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{4}{x+3}.$$

Η παράσταση αυτή ορίζεται για : $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$.

β) Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος της εξίσωσης που δόθηκε.

- $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$, διότι Δ = 25>0 και $x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{-6}{2}=-3\\ \frac{4}{2}=2\end{cases}$

Τότε η εξίσωση γίνεται : $$\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x+3)}=\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x+3} \qquad (2)$$

- Ε.Κ.Π. = $(x-2)(x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x+3\neq 0$
  $x\neq 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad x\neq -3$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και η (2) γίνεται :

$$(x-2)(x+3)\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x+3)}=(x-2)(x+3)\frac{x}{x-2}-(x-2)(x+3)\frac{4}{x+3}$$
$$2x^2+x+5=(x+3)x-(x-2)4$$
$$2x^2+x+5=x^2+3x-4x+8$$
$$2x^2+x+5-x^2-3x+4x-8=0$$
$$x^2+2x-3=0$$

με Δ=16 > 0, και λύσεις : $x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{-6}{2}=-3\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$, από τις οποίες δεκτή είναι

μόνο η x = 1.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

α) Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων :

$$\begin{cases} 3x+2y=12 & (\cdot 1) \\ 2x-y=1 & (\cdot 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=12 \\ 4x-2y=2 \end{cases} (+) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=14 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2\cdot 2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το **Α(2,3)**.

β) Η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα χ΄χ, όταν y = 0, άρα αντικαθιστώντας στην ε_1 έχουμε :

3x + 0 = 12

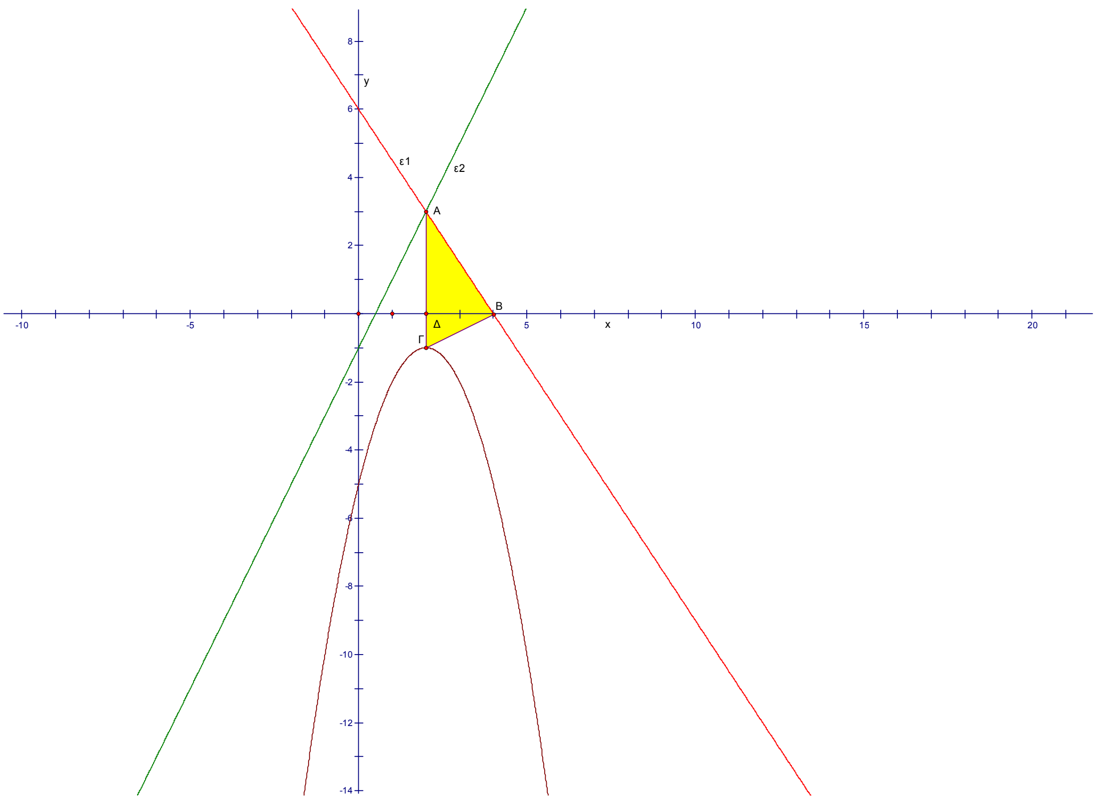
3x = 12

x = 4.

Άρα το σημείο στο οποίο η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα χ΄χ είναι το **Β(4,0)**.

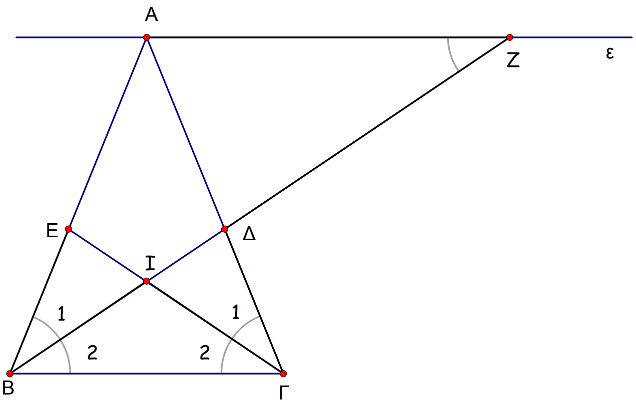
γ) Η κορυφή της παραβολής $y = -x^2 + 4x - 5$ βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$,

άρα $x = \frac{-4}{-2} = 2$ και $y = \frac{-(16-20)}{-4} = \frac{-(-4)}{-4} = -1$, οπότε η κορυφή της είναι το σημείο **Γ(2,-1)**.



Οπότε το Εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $E_{AB\Gamma} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{(A\Gamma)\cdot(\Delta B)}{2} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4\tau\mu.$

ΑΣΚΗΣΗ 3



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα :
ΑΒΔ και ΑΓΕ, αυτά έχουν

- ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση
- Γωνία $\hat{A}$ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως και τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, άρα ΒΔ = ΓΕ.

β) Τα τρίγωνα ΒΑΖ και ΒΙΓ έχουν :

- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος
- $\hat{\Gamma}_2 = \hat{Z}$ αφού $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_2$ ως μισά ίσων γωνιών, και

  $\hat{B}_2 = \hat{Z}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αε//ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΖ.

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, είναι όμοια.

Η αναλογία των πλευρών που προκύπτει είναι : $\frac{BA}{BI} = \frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{AZ}{I\Gamma}$.

Γενικά Σχόλια :

1. Η λύση του συστήματος στην Άσκηση 2, μπορεί να γίνει με όποια μέθοδο θέλετε. Εδώ προτιμήσαμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.
2. Στην ίδια άσκηση, δεν είναι απαραίτητο να σχεδιάσει κανείς τις ευθείες και το τριώνυμο, για να βρει το εμβαδόν του τριγώνου. Θα μπορούσε να σχεδιάσει ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με τα συγκεκριμένα σημεία, που βρήκε και είναι οι κορυφές του τριγώνου.