ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 31

ΕΝΟΤΗΤΑ : Κανονική Κατανομή και Τυποποιημένη Καν.Καταν.

Καθ. Χρήστος Μουρατίδης — Ημ/νία : 2-3 / 5 / 2001

Κανονική Κατανομή $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας : $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Όπου **μ : ο αριθμητικός μέσος** της τ.μ. X με $-\infty \le \mu \le +\infty$ και
σ : η τυπική απόκλιση με σ>0

με **1) f(x)≥0 και 2)** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

και συνάρτηση κατανομής : $F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

και με πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή μεταξύ x_1 και x_2 να δίνεται από το ολοκλήρωμα : $P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$

Τυποποιημένη κανονική κατανομή $Z \sim N(0,1)$

Με το γραμμικό μετασχηματισμό $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, αν η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή N(μ,σ^2), τότε η τ.μ. Z ακολουθεί την κανονική κατανομή N(0,1).

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κατανομής :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < +\infty$$

Συνάρτηση κατανομής : $F(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

με **F(-z) = 1 – F(z)** και :

$$P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = P\{Z \le z\} = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

όπου την τιμή του $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ την βρίσκουμε έτοιμη στους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

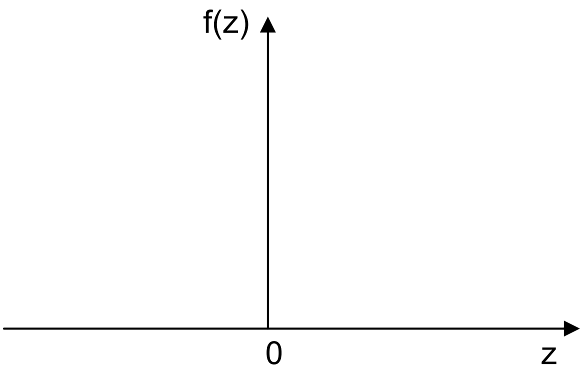
Επίσης :

$$\mathbf{P\{x_1 \le X \le x_2\} = P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\} = P\{z_1 \le Z \le z_2\} = F(z_2) - F(z_1)}$$

και $$\mathbf{P\{X \ge x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = P\{Z \ge z\} = 1 - F(z)}$$

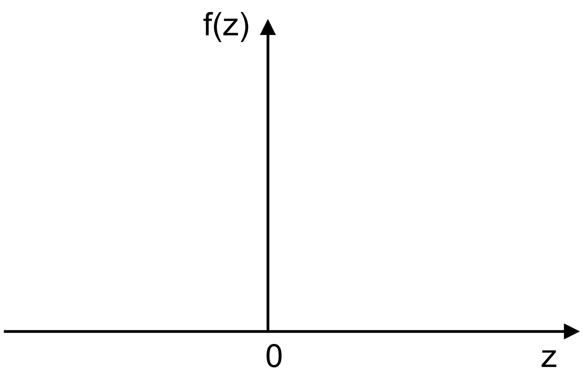
Εφαρμογές

1. Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο αριθμητικό 7 (μ=7) και τυπική απόκλιση 2 (σ=2). Να υπολογισθεί η πιθανότητα P{X≤ 12} και να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα της τυπ. κανονικής κατανομής.

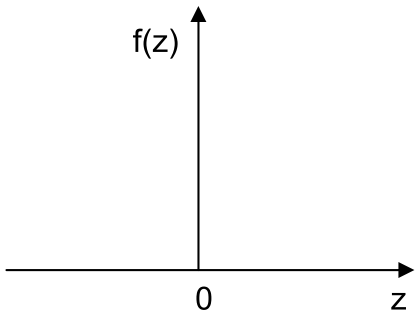


---

2. Έστω ότι η μεταβλητή X κατανέμεται κανονικά με μέσο αριθμητικό μ=5 και διακύμανση σ^2=4. Να υπολογισθεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων α) 6 ≤ X ≤ 8 και β) X ≥ 11. Να γίνουν τα αντίστοιχα διαγράμματα.



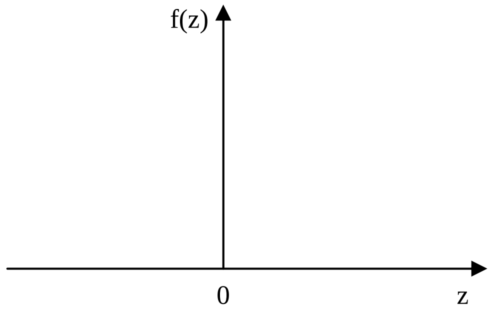
3. Να υπολογισθεί η παρακάτω πιθανότητα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής : $P\{ Z \leq -2 \}$ και να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα.

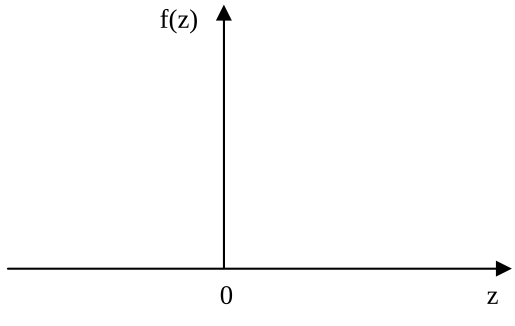


4. Σε μια πόλη οι δημοτικές αρχές τοποθέτησαν 2000 ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Αν οι λαμπτήρες έχουν μέση διάρκεια ζωής 1000 ώρες και τυπική απόκλιση σ=200 ώρες, οι αρχές επιθυμούν να γνωρίζουν :

α) Ποιος αριθμός λαμπτήρων θα αχρηστευθεί μετά από 700 ώρες λειτουργίας

β) Ποιος αριθμός λαμπτήρων δεν θα αχρηστευθεί μεταξύ των 900 και των 1300 ωρών λειτουργίας.





5. Δίνεται μια κανονική κατανομή με $\mu=40$, $\sigma=6$. Να βρεθεί :
α) Το εμβαδόν κάτω του 32
β) Το εμβαδόν άνω του 27
γ) Το εμβαδόν μεταξύ 42 και 51
δ) Το σημείο κάτω του οποίου βρίσκεται το 45% του εμβαδού
ε) Το σημείο άνω του οποίου βρίσκεται το 13% του εμβαδού.