

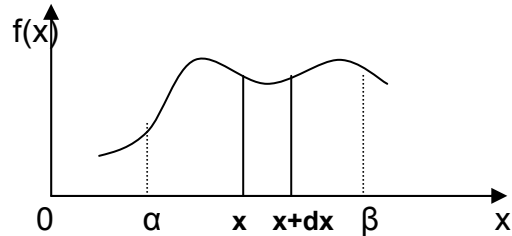
**ΕΝΟΤΗΤΑ : Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές**

Καθ. Χρήστος Μουρατίδης

Ημ/νία : 25 - 4 - 2001

Έννοιες Κλειδιά:

- Συνεχής Τ.Μ. με  $P\{X=x_i\}=0$
- Συνάρτηση Κατανομής  
 $F(x) = P\{X < x\}$
- Πυκνότητα Πιθανότητας  
 $f(x) = F(x)'$



- Ιδιότητες της Πυκνότητας Πιθανότητας
  1.  $f(x) \geq 0$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

- Συμπέρασμα :  $P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  , για  $\alpha, \beta$  πραγματικούς.

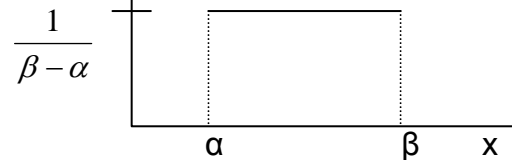
- Υπολογισμός Συνάρτησης Κατανομής συνεχούς Τ.Μ. με  $A = \mathbb{R}$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

- Ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής συνεχούς τ.μ.
  1. Η  $F(x)$  παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα  $[0, 1]$
  2. Αν  $x \rightarrow -\infty$ , τότε  $F(x) \rightarrow 0$
  3. Αν  $x \rightarrow +\infty$ , τότε  $F(x) \rightarrow 1$
  4. Η  $F(x)$  είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού
  5. Αν  $x_1 < x_2$ , θα έχουμε και  $F(x_1) \leq F(x_2)$ .

- Η ομοιόμορφη κατανομή "ορθογώνια"  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & , \text{για } \alpha < x < \beta \\ 0 & , \text{για όλα τα άλλα } x \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & , \alpha < x < \beta \\ 1 & , x \geq \beta \end{cases}$$

Συνάρτηση Κατανομής της ομοιόμορφης συνεχούς κατανομής.

## Εφαρμογές

---

1. Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας την :
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , x \in (0,8) \\ 0 & , x \notin (0,8) \end{cases}$$
- α) Να υπολογιστούν οι εξής πιθανότητες :  
 $P \{2 \leq X \leq 5\}$ , και  $P \{3 \leq X \leq 7\}$  και β) να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής  $F(x)$  και να γίνει η γραφική παράστασή της.

- 
2. Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας την :
- $$f(x) = \begin{cases} kx & , x \in (0,5) \\ 0 & , x \notin (0,5) \end{cases}$$
- α) να υπολογιστεί η σταθερά  $k$ .  
β) να υπολογιστούν οι πιθανότητες :  
 $P \{1 \leq X \leq 3\}$ ,  $P \{2 \leq X \leq 4\}$ ,  $P \{X \leq 3\}$   
γ) να υπολογιστεί η  $F(x)$  και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας την :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & , x \in [0,3] \\ 0 & , x \notin [0,3] \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η σταθερά  $k$  και να βρεθεί η πιθανότητα  $P\{1 \leq X \leq 2\}$ .

---

4. Να υπολογιστεί η σταθερά  $k$  έτσι ώστε η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \in (-1,1) \\ 0 & , x \notin (-1,1) \end{cases}$$
 να είναι πυκνότητα πιθανότητας.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής και η πιθανότητα του γεγονότος :  $\{-1 \leq X \leq 1/2\}$ .