ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και Πανεπιστήμιο Κύπρου

Ηλεκτρονική διεύθυνση: akrivis@cs.uoi.gr

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(*πανεπιστημιακές παραδόσεις*)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2008

Πρόλογος

Η κατανόηση των θεμελιωδών διαδικασιών του φυσικού κόσμου βασίζεται κατά μεγάλο μέρος στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (Μ.Δ.Ε.). Οι εξισώσεις αυτές συμπληρώνονται κατά κανόνα με κατάλληλες συνοριακές, ή αρχικές και συνοριακές συνθήκες ούτως ώστε να περιγράφουν κατά μοναδικό τρόπο τη λύση των προβλημάτων τα οποία μοντελοποιούν. Ως παραδείγματα φαινομένων που περιγράφονται από Μ.Δ.Ε. αναφέρουμε τη ροή των ρευστών, τη διάχυση χημικών ουσιών, τη διάδοση της θερμότητας, τη διάδοση κυμάτων, και την ταλάντωση στερεών.

Λόγω των πολλών εφαρμογών τους στη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων, οι Μ.Δ.Ε. αποτελούσαν μέχρι και τον δέκατο ένατο αιώνα ουσιαστικά έναν κλάδο της Φυσικής. Με την πάροδο του χρόνου όμως η μαθηματική θεωρία των Μ.Δ.Ε. αναπτύχθηκε σε τέτοιο βαθμό, ώστε ο κλάδος τους να μετατοπισθεί πλέον στο επίκεντρο των Μαθηματικών και να αποτελεί σήμερα κινητήριο δύναμη των Μαθηματικών. Η μελέτη των Μ.Δ.Ε. έχει οδηγήσει σε νέες μαθηματικές θεωρίες, οι οποίες αναπτύσσονται ραγδαία και έχουν επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό συγγενείς κλάδους, όπως η Ανάλυση και η Γεωμετρία.

Όσα σχετίζονται με τη θεωρία και τη μελέτη ιδιοτήτων λύσεων Μ.Δ.Ε. διακρίνονται για την ομορφιά και την κομψότητά τους. Το προβληματικό μέρος αρχίζει όταν κανείς προσπαθήσει να προσδιορίσει πραγματικά λύσεις Μ.Δ.Ε.. Μόνο σε σπάνιες και πολύ απλές περιπτώσεις μπορούν να προσδιορισθούν αναλυτικά οι λύσεις Μ.Δ.Ε., να πάρουμε δηλαδή τη λύση τους σε κλειστή μορφή. Συνήθως καταφεύγουμε σε προσέγγιση της λύσεως με αριθμητικές μεθόδους, γεγονός που έχει οδηγήσει σε άνθιση τον κλάδο της Αριθμητικής Ανάλυσης που ασχολείται ακριβώς με αυτό το θέμα, δηλαδή με την κατασκευή, ανάλυση και υλοποίηση μεθόδων προσέγγισης λύσεων Μ.Δ.Ε..

Μια πρώτη μορφή των σημειώσεων αυτών γράφτηκε το 1993 για τους προπτυχιακούς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Στην παρούσα μορφή οι σημειώσεις γράφτηκαν για τους προπτυχιακούς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου. Σε ορισμένα σημεία ακολουθούμε το βιβλίο “Walter A. Strauss: *Partial Differential Equations*: *An Introduction*. John

Wiley, New York, 1992".

Οι σημειώσεις αποτελούνται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο, εισαγωγικής φύσεως κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα Μ.Δ.Ε., μελετώνται εν συντομία γραμμικές, αλλά και μη γραμμικές, Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως, αναφέρεται ο ρόλος αρχικών και συνοριακών συνθηκών, ορίζονται καλώς τεθειμένα προβλήματα και ταξινομούνται οι γραμμικές Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως σε ελλειπτικές, υπερβολικές και παραβολικές εξισώσεις. Το δεύτερο και το τρίτο κεφάλαιο αφορούν τις δύο σημαντικότερες δυναμικές Μ.Δ.Ε., την κυματική εξίσωση και την εξίσωση της θερμότητας, αντίστοιχα. Το τέταρτο κεφάλαιο είναι βοηθητικό. Σε αυτό παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της θεωρίας των σειρών του Fourier. Στο πέμπτο κεφάλαιο αντιμετωπίζονται ορισμένα θέματα για τις εξισώσεις του κύματος και της θερμότητας με την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών, με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων του τέταρτου κεφαλαίου. Το τελευταίο κεφάλαιο αναφέρεται στη σημαντικότερη στατική Μ.Δ.Ε., την εξίσωση του Laplace.

Οι φοιτητές που θα μάθουν όσα αναφέρονται στις παρούσες σημειώσεις, θα εξοικειωθούν απλώς με ορισμένα βασικά θέματα της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Βασικός σκοπός του μαθήματος είναι η κατανόηση του ρόλου των αρχικών και συνοριακών συνθηκών που οδηγούν σε καλώς τεθειμένα προβλήματα για τις τρεις βασικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως, την κυματική εξίσωση, την εξίσωση της θερμότητας και την εξίσωση του Laplace. Το αντικείμενο είναι εκτενέστατο, η βαθύτερη κατανόησή του απαιτεί προχωρημένες γνώσεις Μαθηματικών και κατ' ανάγκην αντιμετωπίζεται συστηματικά μόνο σε επίπεδο μεταπτυχιακών σπουδών.

Υπάρχει πληθώρα πολύ καλών βιβλίων για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, κατά κανόνα μεταπτυχιακού επιπέδου. Ορισμένα από τα βιβλία είναι γενικά, άλλα αναφέρονται σε ειδικά θέματα, φερ' ειπείν σε εξισώσεις ενός συγκεκριμένου τύπου. Δεδομένου ότι η περιοχή είναι ευρύτατη, είναι πολύ δύσκολο να καλυφθεί σε ικανοποιητικό βαθμό ακόμη και σε βιβλία μεταπτυχιακού επιπέδου. Από τα γενικά βιβλία εξαιρετικό θεωρείται αυτό του Evans, βλ. βιβλιογραφία.

Σεπτέμβριος 2003

Γ. Ακρίβης

Περιεχόμενα

Πρόλογος **i**

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Παραδείγματα 1

1.2 Γραμμικές Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως 3

1.2.1 Κατά κατεύθυνση παράγωγοι 4

1.2.2 Η ομογενής εξίσωση 5

1.2.3 Η μη ομογενής εξίσωση 11

Ασκήσεις 14

1.3 Μη γραμμικές Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως 15

1.4 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες 17

1.5 Καλώς τεθειμένα προβλήματα 20

1.6 Ταξινόμηση Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως 21

Ασκήσεις 25

2 Η κυματική εξίσωση **29**

2.1 Η κυματική εξίσωση σε όλο το $\mathbb{R}$ 29

2.1.1 Το πρόβλημα αρχικών τιμών 32

2.1.2 Εξάρτηση και επιρροή 34

2.1.3 Ενέργεια 38

Ασκήσεις 39

2.2 Ανάκλαση κυμάτων 40

2.3 Το πρόβλημα σε ένα πεπερασμένο διάστημα 43

2.4 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση 46

2.4.1 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση στην ημιευθεία 53

2.4.2 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα . . . 55
Ασκήσεις . . . 57

3 Η εξίσωση της θερμότητας 65
3.1 Η αρχή του μεγίστου . . . 65
Ασκήσεις . . . 70
3.2 Η εξίσωση της θερμότητας σε όλο το $\mathbb{R}$ . . . 72
3.2.1 Παράσταση της λύσεως u του (3.15), που πληροί την (3.19) 77
3.3 Η εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία . . . 84
3.4 Το πρόβλημα σε ένα φραγμένο διάστημα . . . 85
3.5 Η μη ομογενής εξίσωση της θερμότητας . . . 86
3.5.1 Η μη ομογενής εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία . 89
Ασκήσεις . . . 90

4 Στοιχεία θεωρίας σειρών του Fourier 97
4.1 Προκαταρκτικά . . . 97
4.2 Σειρές του Fourier . . . 105
Ασκήσεις . . . 109

5 Χωρισμός μεταβλητών για τις εξισώσεις της θερμότητας και του κύματος 113
5.1 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet . . . 113
5.1.1 Η εξίσωση της θερμότητας . . . 113
5.1.2 Η κυματική εξίσωση . . . 117
5.2 Συνοριακές συνθήκες Neumann . . . 121
5.3 Μη ομογενείς εξισώσεις . . . 124
Ασκήσεις . . . 126

6 Η εξίσωση του Laplace 129
6.1 Η αρχή του μεγίστου . . . 130
6.2 Το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ένα ορθογώνιο . . . 132
6.3 Ο τύπος του Poisson . . . 136
Ασκήσεις . . . 143

Βιβλιογραφία 147

Ευρετήριο **151**

1. Εισαγωγή

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα γνωρίσουμε διάφορα παραδείγματα Μ.Δ.Ε., θα λύσουμε ορισμένες απλές Μ.Δ.Ε., θα δούμε κάποιες απλές ιδιότητες γραμμικών καθώς και μη γραμμικών Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως, θα μιλήσουμε για αρχικές και συνοριακές συνθήκες, θα ορίσουμε καλώς τεθειμένα προβλήματα και, τέλος, θα ταξινομήσουμε τις Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως.

1.1 Παραδείγματα

Μ.Δ.Ε. (partial differential equations) καλούνται γενικά εξισώσεις με άγνωστη μια συνάρτηση, τουλάχιστον δύο μεταβλητών, όταν σε αυτές τις εξισώσεις, πέραν ενδεχομένως από την άγνωστη συνάρτηση και τις ανεξάρτητες μεταβλητές, εμφανίζονται και μερικές παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης, φερ' ειπείν $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ με δεδομένη F και άγνωστη τη u. Στις Μ.Δ.Ε. έχουμε δηλαδή περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές.

Κάθε ομαλή συνάρτηση u δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα *χωρίο* (δηλαδή ανοικτό, μη κενό σύνολο) Ω, για την οποία ισχύει $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0$, για κάθε $(x, y) \in \Omega$, καλείται *λύση* ή *κλασική λύση* της διαφορικής εξίσωσης $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$. Ο όρος κλασική λύση υποδηλώνει ότι η συνάρτηση είναι τόσο ομαλή ώστε όλες οι παράγωγοι που εμφανίζονται στην εξίσωση να είναι συνεχείς και χρησιμοποιείται κατ' αντιδιαστολήν προς τον όρο *ασθενής λύση*, ο οποίος υποδηλώνει ότι η λύση αυτή ικανοποιεί "κατά κάποια έννοια" την εξίσωση (έννοια η οποία διαφέρει από περίπτωση σε περίπτωση), δεν είναι όμως αρκετά ομαλή ώστε να είναι κλασική λύση.

Τάξη (order) μιας Μ.Δ.Ε. καλείται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση, φερ' ειπείν η $xu_y + y^2u_x = f(x, y, u)$ είναι πρώτης τάξεως, η $u_{xy} + (x + y)u_y = f(x, y, u_x)$ είναι δευτέρας τάξεως, και η τάξη της

$f(x, u_x, u_{xxxy}) = 0$ είναι τέσσερα.

Αν η άγνωστη συνάρτηση και οι μερικές της παράγωγοι εμφανίζονται γραμμικά σε μια Μ.Δ.Ε., τότε η εξίσωση καλείται *γραμμική*. Παραδείγματος χάριν, οι εξισώσεις

$$u_x - u_{yy} = f(x, y),$$

$$u_{xx} + u_{yy} + (x^2 + y^2)u = f(x, y)$$

είναι γραμμικές. Η εξίσωση $u_x + uu_y = 0$ δεν είναι γραμμική, είναι, όπως λέμε, *μη γραμμική*. Ακριβέστερα, μια γραμμική εξίσωση είναι της μορφής

$$Lu = f, \tag{1.1}$$

όπου L ένας *γραμμικός διαφορικός τελεστής*, δηλαδή τέτοιος ώστε

$$L(u + v) = Lu + Lv, \quad L(cu) = cLu, \quad c \in \mathbb{R},$$

και f μια συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών. Η γραμμική εξίσωση (1.1) λέγεται *ομογενής διαφορική εξίσωση* αν $f = 0$, διαφορετικά καλείται *μη ομογενής*.

Είναι γενικό φαινόμενο στα Μαθηματικά, τα γραμμικά προβλήματα να είναι κατά πολύ απλούστερα των μη γραμμικών. Το πλεονέκτημα της γραμμικότητας μιας εξίσωσης $Lu = 0$ είναι ότι, αν $u_1, \dots, u_n$ είναι λύσεις της, τότε και οι γραμμικοί συνδυασμοί

$$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

είναι επίσης λύσεις της. Αυτό το γεγονός καλείται μερικές φορές *αρχή της υπερθέσεως* (superposition principle) ή ακόμα και *αρχή της επαλληλίας*.

Αν τώρα u_1 είναι λύση μιας ομογενούς γραμμικής εξισώσεως $Lu = 0$ και u_2 λύση της μη ομογενούς $Lu = f$, τότε η $u_1 + u_2$ αποτελεί επίσης λύση της μη ομογενούς εξισώσεως.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε ορισμένες απλούστατες Μ.Δ.Ε.. Έστω ότι ζητείται μια συνάρτηση u δύο μεταβλητών, x και y, τέτοια ώστε $u_{xx} = 0$. Η $(u_x)_x = 0$ σημαίνει φυσικά ότι η u_x είναι ανεξάρτητη του x, συνεπώς $u_x(x, y) = f(y)$, όπου f μια τυχαία ομαλή συνάρτηση. (Στη συνέχεια όταν θα μιλάμε για ομαλές συναρτήσεις, θα εννοούμε πάντα συναρτήσεις τόσο ομαλές, όσο απαιτείται για να είναι συνεχείς οι παράγωγοι που εμφανίζονται και να έχουν νόημα όσα αναφέρονται.) Ολοκληρώνοντας πάλι ως προς x, διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$u(x, y) = f(y)x + g(y), \tag{1.2}$$

όπου f και g τυχαίες ομαλές συναρτήσεις του y. Ας θυμηθούμε τώρα λίγο το πρόβλημα για την αντίστοιχη *συνήθη* διαφορική εξίσωση: Αν ζητείται μια συνάρτηση u του x τέτοια ώστε $u'' = 0$, τότε η λύση είναι προφανώς

$$u(x) = \alpha x + \beta, \tag{1.3}$$

όπου α και β τυχαίες σταθερές. Τον ρόλο των τυχαίων σταθερών α και β στην (1.3) αναλαμβάνουν δηλαδή στην (1.2) τυχαίες συναρτήσεις του y. Σημειώνουμε ότι Μ.Δ.Ε. που περιέχουν μερικές παραγώγους μόνο ως προς μία μεταβλητή, είναι στην ουσία συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παίζουν απλώς τον ρόλο παραμέτρων. Με αυτήν την έννοια αναφερθήκαμε προηγουμένως στη $u'' = 0$ ως αντίστοιχης της $u_{xx} = 0$. Για Μ.Δ.Ε. που περιέχουν παραγώγους ως προς δύο ή περισσότερες μεταβλητές, όπως φερ' ειπείν η $u_{xy} = 0$, δεν υπάρχουν αντίστοιχες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Και η $u_{xy} = 0$ λύνεται εύκολα: Ολοκληρώνοντας ως προς y, θεωρώντας το x σταθερό, λαμβάνουμε $u_x(x, y) = f(x)$. Ολοκληρώνοντας στη συνέχεια ως προς x έχουμε

$$u(x, y) = F(x) + G(y), \tag{1.4}$$

όπου F τέτοια ώστε $F' = f$. Συνολικά, η λύση της $u_{xy} = 0$ δίνεται από την (1.4), όπου F και G τυχαίες ομαλές συναρτήσεις.

1.2 Γραμμικές Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με γραμμικές Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως. Στη μελέτη των εν λόγω εξισώσεων πολύ σημαντικό ρόλο παίζουν οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι. Πριν αρχίσουμε με το κυρίως θέμα μας, υπενθυμίζουμε εν συντομία ορισμένα βασικά πράγματα για κατά κατεύθυνση παραγώγους.

1.2.1 Κατά κατεύθυνση παράγωγοι

Έστω $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, $u = u(x, y)$. Αν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : \{(x, \varphi(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, προσανατολισμένη έτσι ώστε να διαγράφεται κατά τη φορά που αυξάνει το x.

Σταθεροποιούμε ένα x και θεωρούμε το σημείο $(x, \varphi(x))$ της καμπύλης γ. Η *κατά κατεύθυνση παράγωγος* της u στο σημείο $(x, \varphi(x))$ *στην κατεύθυνση της καμπύλης* γ ορίζεται ως το όριο

$$\lim_{s \downarrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|},$$

όπου $|\cdot|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $|(a, b)| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Σημειώνουμε ότι τα σημεία $(s, \varphi(s))$ βρίσκονται στην καμπύλη γ, $s > x$, $|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων $(s, \varphi(s))$ και $(x, \varphi(x))$,

$$|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))| = \sqrt{(s - x)^2 + \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)^2},$$

και το σημείο $(s, \varphi(s))$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης γ προς το σημείο $(x, \varphi(x))$. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $s - x$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις u και φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, διαπιστώνει κανείς εύκολα ότι

$$\lim_{s \downarrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(s))}{\sqrt{(s - x)^2 + \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)^2}} = \frac{u_x(x, \varphi(x))}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}}$$

$$\lim_{s \downarrow x} \frac{u(x, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{\sqrt{(s - x)^2 + \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)^2}} = \frac{u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}},$$

οπότε αφαιρώντας και προσθέτοντας το $u(x, \varphi(s))$ υπολογίζουμε εύκολα την κατά κατεύθυνση παράγωγο και οδηγούμεθα στο συμπέρασμα

$$\lim_{s \downarrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|} = \frac{u_x(x, \varphi(x)) + u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}}. \tag{1.5}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής στη σχέση (1.5) είναι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\big(1, \varphi'(x)\big)$ και $\big(u_x(x, \varphi(x)), u_y(x, \varphi(x))\big)$, ο δε παρονομαστής κανονικοποιεί το διάνυσμα $\big(1, \varphi'(x)\big)$, δηλαδή το διάνυσμα

$$\frac{1}{\sqrt{1+\big(\varphi'(x)\big)^2}}\big(1, \varphi'(x)\big)$$

είναι μοναδιαίο, έχει Ευκλείδειο μέτρο ίσο με τη μονάδα.

Σημειώνουμε ακόμη ότι αν δύο καμπύλες γ και $\tilde{\gamma}$ διέρχονται από ένα σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$ και έχουν σε αυτό την ίδια εφαπτομένη, τότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος της συνάρτησης u στο σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$ κατά μήκος της γ ταυτίζεται με την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στο ίδιο σημείο κατά μήκος της $\tilde{\gamma}$. Ιδιαίτερα η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στο σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$ ταυτίζεται με την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στο ίδιο σημείο κατά μήκος της εφαπτομένης της γ στο σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$. Η κατεύθυνση της εν λόγω εφαπτομένης δίνεται φυσικά από το διάνυσμα $\big(1, \varphi'(x)\big)$. Αυτές οι ιδιότητες μας οδηγούν στον εξής ορισμό: Αν (a, b) είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$, τότε η ποσότητα

$$\frac{au_x(x,y) + bu_y(x,y)}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{1.6}$$

καλείται *κατά κατεύθυνση παράγωγος* της u στο σημείο (x, y) στην *κατεύθυνση* (a, b).

Ολοκληρώνουμε αυτή τη βοηθητική υποενότητα με μια απλή, αλλά ιδιαίτερα χρήσιμη για τη συνέχεια παρατήρηση: Έστω ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση της γ μηδενίζεται σε κάθε σημείο της γ. Ισχυριζόμαστε ότι η u είναι σταθερή κατά μήκος της γ, δηλαδή λαμβάνει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της. Πράγματι, αν ορίσουμε τη βοηθητική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := u(x, \varphi(x))$, διαπιστώνουμε ότι η παράγωγός της μηδενίζεται,

$$g'(x) = u_x(x, \varphi(x)) + u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

συνεπώς η g είναι σταθερή, οπότε η u είναι σταθερή κατά μήκος της γ.

1.2.2 Η ομογενής εξίσωση

Στην ενότητα αυτή συμβολίζουμε με u μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$.

Αρχίζουμε τη μελέτη ομογενών γραμμικών Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως με ένα απλούστατο παράδειγμα. Αν η πρώτη μερική παράγωγος της u ως προς την πρώτη της μεταβλητή ισούται με μηδέν, τότε η u είναι φυσικά συνάρτηση μόνο της δεύτερης μεταβλητής της, δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης

$$u_x = 0 \tag{1.7}$$

είναι της μορφής $u(x,t) = \varphi(t)$, όπου φ μια συνεχής συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση

$$u_t + u_x = 0. \tag{1.8}$$

Θα λύσουμε αυτήν την εξίσωση με δύο τρόπους:

Η έκφραση

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_x(x,t) + u_t(x,t)\big)$$

είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση $(1,1)$, και αφού, σύμφωνα με την (1.8), αυτή η ποσότητα μηδενίζεται, η u είναι σταθερή σε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $(1,1)$, δηλαδή τις ευθείες της μορφής $x - t =$ σταθερά. Επομένως οι λύσεις της (1.8) είναι της μορφής

$$u(x,t) = f(x-t), \tag{1.9}$$

όπου f μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Οι ευθείες $x - t =$ σταθερά καλούνται *χαρακτηριστικές γραμμές* της (1.8). Οι χαρακτηριστικές γραμμές είναι παράλληλες μεταξύ τους και καθώς η σταθερά λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές, οι χαρακτηριστικές καλύπτουν όλο το Καρτεσιανό επίπεδο xt. Οι λύσεις u της (1.8) είναι σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών γραμμών της.

Προχωρούμε τώρα στην παρουσίαση ενός δευτέρου τρόπου επίλυσης της (1.8), ουσιαστικά ισοδύναμου με τον προηγούμενο. Η ιδέα είναι η εισαγωγή νέων μεταβλητών ώστε η (1.8) να αναχθεί σε μια εξίσωση της μορφής (1.7). Γνωρίζοντας ήδη ότι οι λύσεις της (1.8) είναι σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών γραμμών της, φαίνεται απολύτως λογικό να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $\xi\eta$, στο οποίο ο ένας άξονας, ας πούμε ο άξονας των ξ, να είναι παράλληλος προς τις χαρακτηριστικές, οπότε οι χαρακτηριστικές θα έχουν εξισώσεις της μορφής $\eta =$ σταθερά. Θέτουμε λοιπόν κατ' αρχάς

$\eta = x - t$. Στην επιλογή του άλλου άξονα, του άξονα των η, δεν υπάρχει περιορισμός, πέραν του να μην είναι παράλληλος προς τον άξονα των ξ, βλ. και την Άσκηση 1.1. Χάριν απλότητος επιλέγουμε εδώ τον άξονα των η κάθετο προς τον άξονα των ξ, θέτουμε δηλαδή $\xi = x + t$. Ανακεφαλαιώνοντας επιλέξαμε την αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := x + t \\ \eta := x - t. \end{cases}$$

Τότε, με $U(\xi, \eta) := u(x, t)$ έχουμε

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \ \ u_t = U_\xi - U_\eta,$$

συνεπώς

$$u_t + u_x = 2U_\xi,$$

οπότε η (1.8) γράφεται στη μορφή $U_\xi = 0$, βλ. την (1.7). Επομένως θα έχουμε $U(\xi, \eta) = f(\eta)$, δηλαδή

$$u(x, t) = f(x - t), \tag{1.9$'$}$$

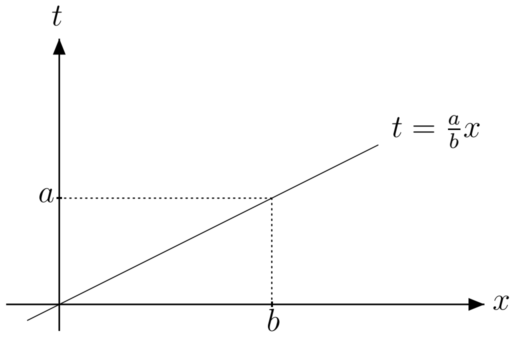
όπου f μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενικότερη εξίσωση

$$au_t + bu_x = 0, \tag{1.10}$$

με a και b πραγματικές σταθερές, που δεν είναι και οι δύο μηδέν. Η περίπτωση $a = b = 0$ δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον, γιατί η (1.10) εκφυλίζεται στην $0 = 0$, δεν είναι δηλαδή καν διαφορική εξίσωση και όλες οι συναρτήσεις αποτελούν λύσεις της. Αν $a = 0$ ή $b = 0$, η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (1.7) (ή της μορφής $u_t = 0$, αλλά φυσικά υπάρχει προφανής αναλογία μεταξύ των δύο αυτών εξισώσεων). Παρά το ότι με την αλλαγή μεταβλητών $U(x, t) := u(bx, at)$ η (1.10) λαμβάνει τη μορφή $U_t + U_x = 0$, ανάγεται δηλαδή στην (1.8), θα προχωρήσουμε στην επίλυσή της απ' ευθείας, επαναλαμβάνοντας ουσιαστικά όσα αναφέρθηκαν σχετικά με την εξίσωση (1.8). Θα δούμε πάλι δύο τρόπους επίλυσης της (1.10).

Η έκφραση $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\big(bu_x + au_t\big)$ δεν είναι τίποτε άλλο από την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στην κατεύθυνση (b, a). Οι παράλληλες προς το διάνυσμα (b, a)



Σχήμα 1.1: Οι χαρακτηριστικές γραμμές της (1.10) έχουν εξισώσεις $ax-bt=$ σταθερά, και είναι παράλληλες προς την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο (b,a).

ευθείες είναι οι *χαρακτηριστικές γραμμές* της (1.10) και έχουν εξισώσεις $ax-bt=$ σταθερά, βλ. Σχήμα 1.1. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση (b,a) είναι μηδέν, συνεπώς η u είναι σταθερή στις χαρακτηριστικές γραμμές. Επομένως η λύση δίνεται δια

$$u(x,t) = f(ax-bt), \tag{1.11}$$

όπου f τυχαία, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Ένας άλλος τρόπος που οδηγεί στην (1.11) είναι η αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := bx + at \\ \eta := ax - bt. \end{cases}$$

Το κίνητρο γι' αυτήν την αλλαγή μεταβλητών είναι πάλι το ίδιο, όπως στην περίπτωση της εξισώσεως (1.8): Ο άξονας των ξ είναι παράλληλος προς τις χαρακτηριστικές γραμμές της εξίσωσης και ο άξονας των η είναι κάθετος προς τον άξονα των ξ. Τώρα, με $U(\xi,\eta) := u(x,t)$ έχουμε

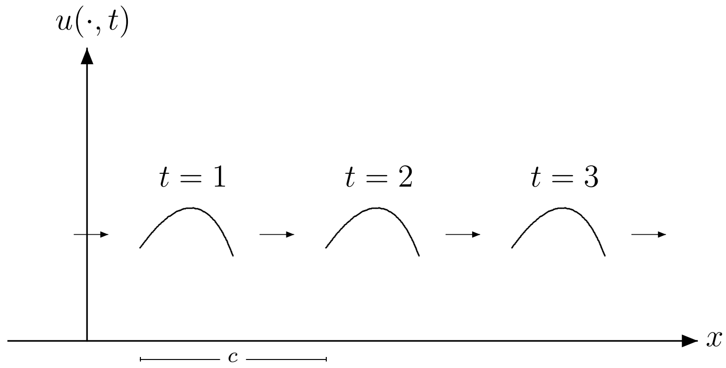
$$\begin{aligned} u_t &= aU_\xi - bU_\eta \\ u_x &= bU_\xi + aU_\eta, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$au_t + bu_x = (a^2+b^2)U_\xi,$$

οπότε η (1.10) γράφεται στη μορφή $U_\xi = 0$ και οι λύσεις αυτής είναι $U(\xi,\eta) = f(\eta)$, συνεπώς

$$u(x,t) = f(ax-bt), \tag{1.11$'$}$$



Σχήμα 1.2: Κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα c.

όπου f τυχαία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Ας δούμε τώρα λίγο τη φυσική σημασία της εξισώσεως (1.10) καθώς και μιας λύσεώς της (1.11). Όπως συνηθίζεται, θεωρούμε ότι το t παριστά χρόνο, είναι δηλαδή η χρονική μεταβλητή, ενώ το x είναι χωρική μεταβλητή. Θέτουμε $c := b/a$ και γράφουμε την εξίσωση (1.10) στη μορφή

$$u_t + cu_x = 0. \tag{1.10$'$}$$

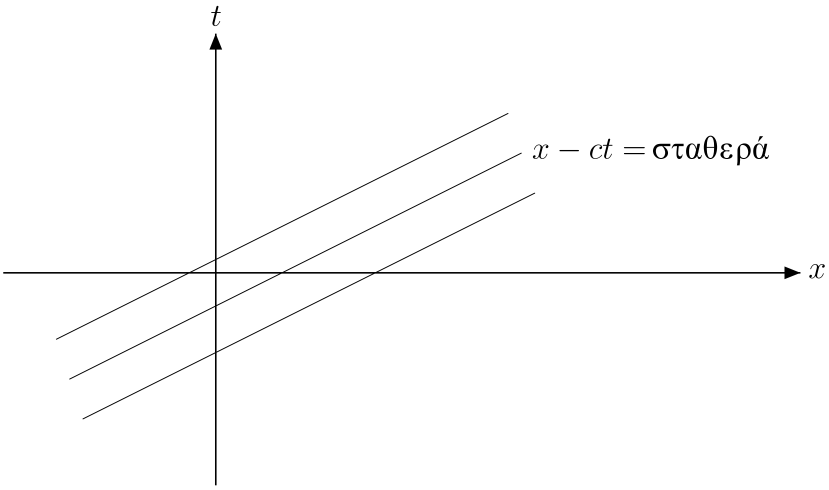
Η (1.11) λαμβάνει τώρα τη μορφή

$$u(x,t) = f(x - ct). \tag{1.11$''$}$$

Η u παριστά ένα *κύμα*, το οποίο ταξιδεύει προς τα δεξιά (αν $c > 0$) με σταθερή ταχύτητα c, χωρίς να αλλάζει σχήμα. Αν "φωτογραφίσουμε" ένα τέτοιο κύμα κατά τις χρονικές στιγμές $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ κ.λπ., θα οδηγηθούμε σε γραφήματα όπως αυτά που εμφανίζονται στο Σχήμα 1.2. Λόγω αυτής ακριβώς της ιδιότητας των λύσεων της (1.10), η εξίσωση αυτή καλείται *εξίσωση μεταφοράς*. Σημειώνουμε ότι το γεγονός ότι τα εν λόγω κύματα διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα χωρίς να αλλάζουν μορφή, οφείλεται στη γραμμικότητα της εξίσωσης (1.10) και στο γεγονός ότι οι συντελεστές a και b είναι σταθεροί. Στα μη γραμμικά κύματα η ταχύτητα διαφέρει γενικά από σημείο σε σημείο και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραμόρφωσή τους.

Οι λύσεις της εξίσωσης (1.10$'$) έχουν προφανώς την ίδια τιμή σε κάθε χαρακτηριστική γραμμή $x - ct =$ σταθερά της εξίσωσης, βλ. το Σχήμα 1.3.

Θα γενικεύσουμε τώρα λίγο την (1.10) με την έννοια ότι θα θεωρήσουμε τα



Σχήμα 1.3: Οικογένεια χαρακτηριστικών γραμμών της εξίσωσης μεταφοράς.

a και b ως συναρτήσεις των x και t. Ας θεωρήσουμε φερ' ειπείν την εξίσωση

$$tu_t + u_x = 0. \tag{1.12}$$

Σύμφωνα με την (1.12) σε κάθε σημείο (x, t) η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στην κατεύθυνση $(1, t)$ μηδενίζεται. Οι καμπύλες στο επίπεδο xt, οι οποίες σε κάθε σημείο (x, t) έχουν εφαπτόμενο διάνυσμα $(1, t)$ ικανοποιούν την

$$\frac{dt}{dx} = t,$$

συνεπώς $t = C\mathrm{e}^x$. Οι καμπύλες αυτές καλούνται *χαρακτηριστικές καμπύλες* της Μ.Δ.Ε. (1.12). Καθώς η σταθερά C διατρέχει το $\mathbb{R}$, οι χαρακτηριστικές καμπύλες γεμίζουν όλο το επίπεδο xt χωρίς να τέμνονται σε κάποιο σημείο. Σε κάθε μία από αυτές τις καμπύλες η u είναι σταθερή: πράγματι με

$$g(x) := u(x, C\mathrm{e}^x)$$

έχουμε

$$g'(x) := u_x + C\mathrm{e}^x u_t = u_x + tu_t = 0.$$

Επομένως

$$u(x, C\mathrm{e}^x) = u(0, C\mathrm{e}^0) = u(0, C).$$

Θέτοντας $t := C\mathrm{e}^x$ έχουμε $C = \mathrm{e}^{-x}t$, οπότε

$$u(x, t) = u(0, \mathrm{e}^{-x}t).$$

Η γενική λύση της (1.12) είναι συνεπώς

$$u(x,t) = f(\mathrm{e}^{-x}t),$$

όπου f μια τυχαία, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, μίας μεταβλητής.

1.2.3 Η μη ομογενής εξίσωση

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τη μη ομογενή γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως. Θεωρούμε λοιπόν την εξίσωση

$$u_t + cu_x = f(x,t), \tag{1.13}$$

όπου c ένας πραγματικός αριθμός και $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση.

Στην περίπτωση $c = 0$ η λύση προκύπτει αμέσως με ολοκλήρωση ως προς t, ας πούμε από 0 έως t,

$$u(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds + u(x,0). \tag{1.14}$$

Στην (1.14), η αρχική τιμή $u(\cdot,0)$, η λύση δηλαδή στη χρονική στιγμή $t = 0$, μπορεί να επιλεγεί ως μια τυχαία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι $c \neq 0$ και θα οδηγηθούμε στη λύση με δύο τρόπους.

Θεωρούμε πρώτα ένα σημείο (y,s) και αρκεί να προσδιορίσουμε την $u(y,s)$. Η χαρακτηριστική γραμμή της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως, $v_t + cv_x = 0$, που διέρχεται από το σημείο (y,s) έχει εξίσωση

$$x = y + c(t-s).$$

Με $\tau := t - s$, η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή $x = y + c\tau$. Η συνάρτηση g, $g(\tau) := u(y + c\tau, s + \tau)$, μας δίνει τις τιμές της λύσης u κατά μήκος της χαρακτηριστικής, η οποία διέρχεται από το σημείο (y,s), της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως. Προφανώς,

$$g'(\tau) = cu_x(y + c\tau, s + \tau) + u_t(y + c\tau, s + \tau),$$

οπότε, σύμφωνα με την (1.13),

$$g'(\tau) = f(y + c\tau, s + \tau).$$

Τώρα, $u(y, s) = g(0)$ και $u(y - cs, 0) = g(-s)$, οπότε ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση από $-s$ έως 0 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} u(y, s) - u(y - cs, 0) = g(0) - g(-s) &= \int_{-s}^{0} g'(\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-s}^{0} f(y + c\tau, s + \tau)\, d\tau = \int_{0}^{s} f(y + c(\sigma - s), \sigma)\, d\sigma, \end{aligned}$$

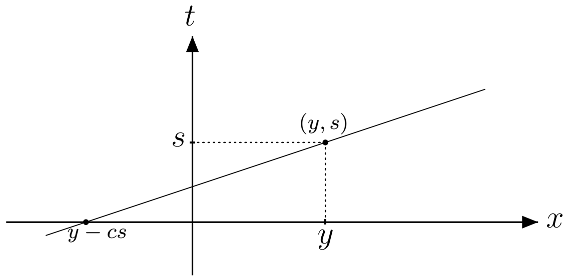
όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $\sigma = \tau + s$. Επομένως έχουμε τελικά

$$u(y, s) = u(y - cs, 0) + \int_{0}^{s} f(y + c(\sigma - s), \sigma)\, d\sigma, \tag{1.14$'$}$$

παράβαλε με την (1.14). Στην (1.14′), όπως και στην (1.14), η αρχική τιμή $u(\cdot, 0)$, η λύση δηλαδή στη χρονική στιγμή $t = 0$, μπορεί να επιλεγεί ως μια τυχαία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Σημειώνουμε ότι η (1.14) προκύπτει αμέσως από την (1.14′) για $c = 0$. Ανακεφαλαιώνοντας, η τιμή $u(y, s)$ της λύσης u της μη ομογενούς εξίσωσης (1.13) δίνεται ως εξής: Θεωρούμε τη χαρακτηριστική της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης που διέρχεται από το (y, s). Εν συνεχεία, σχηματίζουμε το άθροισμα της (προκαθορισμένης) αρχικής τιμής στο σημείο $(y - cs, 0)$, σημείο τομής αυτής της χαρακτηριστικής και του άξονα των x, και του ολοκληρώματος του μη ομογενούς όρου f σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, το μέρος της χαρακτηριστικής από το σημείο $(y - cs, 0)$ έως το (y, s), βλ. και το Σχήμα 1.4.

Προχωρούμε τώρα σε έναν δεύτερο τρόπο επίλυσης της (1.14), όταν η σταθερά c είναι διάφορη του μηδενός. Αυτή τη φορά δεν θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των χαρακτηριστικών γραμμών, οπότε δεν υπάρχει λόγος να εισαγάγουμε και ένα σημείο (y, s), προχωρούμε δηλαδή στον προσδιορισμό της $u(x, t)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := t \\ \eta := x - ct \end{cases}, \qquad U(\xi, \eta) = u(x, t).$$



Σχήμα 1.4: Σχηματική επεξήγηση της (1.14′): Θεωρούμε τη χαρακτηριστική γραμμή της ομογενούς εξίσωσης που διέρχεται από το σημείο (y,s). Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1.13) είναι το άθροισμα της (προκαθορισμένης) τιμής της u στο σημείο τομής της χαρακτηριστικής με τον άξονα των x και του ολοκληρώματος του μη ομογενούς όρου στο ευθύγραμμο τμήμα της χαρακτηριστικής μεταξύ των σημείων $(y-cs,0)$ και (y,s).

Υπενθυμίζουμε ότι η επιλογή του η υπαγορεύεται από το γεγονός ότι θέλουμε ο άξονας των ξ να είναι παράλληλος προς τις χαρακτηριστικές γραμμές της εξίσωσης. Στην επιλογή του ξ υπάρχει ελευθερία· η συγκεκριμένη διευκολύνει ιδιαίτερα τις πράξεις στη συνέχεια. Αμέσως διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{cases} u_t = U_\xi - cU_\eta \\ u_x = U_\eta \end{cases}, \qquad \text{οπότε} \quad u_t + cu_x = U_\xi.$$

Επομένως, στις νέες μεταβλητές η Δ.Ε. (1.13) γράφεται στη μορφή $U_\xi(\xi,\eta) = f(\eta + c\xi, \xi)$. Ολοκληρώνοντας από 0 έως ξ παίρνουμε

$$U(\xi,\eta) = \int_0^\xi f(\eta + c\sigma, \sigma)\, d\sigma + g(\eta),$$

με μια αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη, συνάρτηση g. Συνεπώς, έχουμε

$$u(x,t) = \int_0^t f(x + c(\sigma - t), \sigma)\, d\sigma + g(x - ct).$$

Για $t=0$ η σχέση αυτή δίνει $g(x) = u(x,0)$, μπορούμε συνεπώς να τη γράψουμε και στη μορφή

$$u(x,t) = u(x-ct,0) + \int_0^t f(x + c(\sigma - t), \sigma)\, d\sigma, \tag{1.14''}$$

βλ. την (1.14′).

Ασκήσεις

1.1 Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := ax + bt \\ \eta := x - t \end{cases}$$

με $a + b \neq 0$ για να λύσετε την εξίσωση $u_t + u_x = 0$.

1.2 Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := bx + at \\ \eta := ax - bt \end{cases}$$

για να λύσετε την εξίσωση

$$au_t + bu_x + cu = 0,$$

όπου a, b και c μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

1.3 Προσδιορίστε τις λύσεις της εξίσωσης

$$3u_y + u_{xy} = 0.$$

1.4 Προσδιορίστε τις λύσεις της εξίσωσης

$$(1 + x^2)u_x + u_y = 0.$$

1.5 Προσδιορίστε μια συνάρτηση $u : (-1, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \sqrt{1 - x^2}\, u_x + u_y = 0, & x \in (-1, 1),\ y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.6 Προσδιορίστε μια συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = \mathrm{e}^{x+2y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[*Υπόδειξη*: Μπορείτε να οδηγηθείτε στο αποτέλεσμα με δύο τρόπους. Αν εισάγουμε τη βοηθητική συνάρτηση g, $g(\tau) := u(x + \tau, x + \tau)$, η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$g'(\tau) + g(\tau) = \mathrm{e}^{(x+\tau)+2(y+\tau)},$$

και ολοκληρώνοντας από $-y$ έως 0 οδηγούμαστε στο ζητούμενο. Εναλλακτικά, εισάγουμε τις νέες μεταβλητές $\eta := x - y$ (γιατί;), $\xi := x + y$, παραδείγματος χάριν, και $U(\xi, \eta) = u(x, t)$, και η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$U_\xi + \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}}\mathrm{e}^{\frac{3\xi}{2}}.$$

Οδηγηθείτε τώρα στη γενική λύση αυτής της εξίσωσης, δηλαδή στη γενική λύση $u(x,t)$ της αρχικής εξίσωσης, και εν συνεχεία χρησιμοποιήστε και την αρχική συνθήκη $u(x,0)$ $= 0$.]

1.3 Μη γραμμικές Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως

Η θεωρία των μη γραμμικών Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως είναι πολύ πλούσια και αρκετά πολύπλοκη, βλ. π.χ. το βιβλίο του Κ. Δαφέρμου [6].

Όπως αναφέραμε ήδη, στις μη γραμμικές εξισώσεις εμφανίζονται πολύ πιο πολύπλοκα φαινόμενα από ότι στις γραμμικές. Εδώ θα αρκεσθούμε στην παρουσίαση μίας μη γραμμικής Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως και θα δούμε διάφορες δυσκολίες που προκύπτουν.

Θεωρούμε λοιπόν τη μη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0. \tag{1.15}$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες σε αυτήν την περίπτωση είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{1.16}$$

και, λόγω του ότι

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\big(\frac{dx}{dt}\big) = \frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + u_x\frac{dx}{dt} = u_t + uu_x = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες γραμμές. Σημειώνουμε όμως ότι η κλίση των χαρακτηριστικών γραμμών δεν είναι η ίδια σε αυτήν την περίπτωση, δηλαδή οι γραμμές δεν είναι παράλληλες. Συνεπώς, στην περίπτωση που οι χαρακτηριστικές γραμμές τέμνονται, η u θα λαμβάνει στο σημείο τομής γενικά δύο διαφορετικές τιμές, θα είναι πλειότιμη, δηλαδή δεν θα είναι συνάρτηση! Η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα κύματα που περιγράφει η εξίσωση (1.15) είναι γενικά διαφορετική σε διαφορετικά σημεία, γεγονός που οδηγεί σε αλλοίωση του σχήματός τους.

Θεωρούμε τώρα τη χαρακτηριστική γραμμή, η οποία διέρχεται από το σημείο $(\xi,0)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Τότε, σύμφωνα με την (1.16), θα έχουμε αφ' ενός

$$\frac{dx}{dt} = u(\xi,0)$$

και αφ' ετέρου $x(0) = \xi$, συνεπώς

$$x = u(\xi, 0)t + \xi. \tag{1.17}$$

Επομένως, αν μας δοθεί η u για $t = 0$, δηλαδή η $u(\cdot, 0)$, θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τη λύση της εξίσωσης (1.15). Έστω, φερ' ειπείν ότι

$$u(x,0) = \begin{cases} 2, & \text{για } x < 0, \\ 2 - x, & \text{για } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{για } x > 1. \end{cases} \tag{1.18}$$

Σημειώνουμε ήδη σε αυτό το σημείο ότι η δοθείσα συνάρτηση $u(\cdot, 0)$ δεν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στα σημεία 0 και 1, συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει κλασική λύση του προβλήματός μας. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι χαρακτηριστικές γραμμές δίνονται δια

$$\begin{cases} x = 2t + \xi, & \text{για } \xi < 0, \\ x = (2 - \xi)t + \xi, & \text{για } 0 \le \xi \le 1, \\ x = t + \xi, & \text{για } \xi > 1. \end{cases} \tag{1.19}$$

Λύνοντας τη $x = (2 - \xi)t + \xi$ ως προς ξ και αντικαθιστώντας στην (1.18) έχουμε

$$u(\xi, 0) = 2 - \xi = 2 - \frac{x - 2t}{1 - t} = \frac{2 - x}{1 - t} \quad \text{για } 0 \le \xi \le 1$$

και έτσι οδηγούμεθα στη *ασθενή* λύση του προβλήματός μας

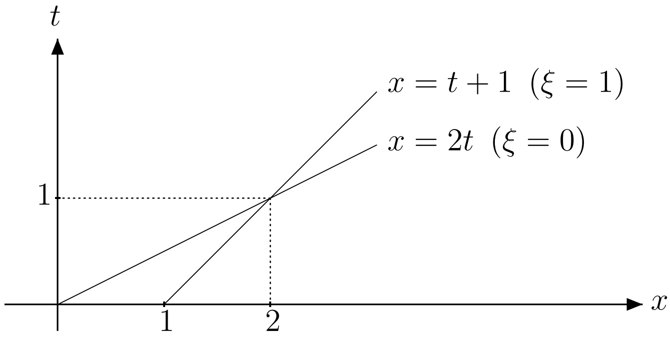
$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & \text{για } x < 2t, \\ \dfrac{2 - x}{1 - t}, & \text{για } 2t \le x \le t + 1, \\ 1, & \text{για } x > t + 1. \end{cases} \tag{1.20}$$

Προφανώς, στο $t = 1$ η λύση μας παρουσιάζει ιδιομορφία και για $t \ge 1$ δεν έχει νόημα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι χαρακτηριστικές γραμμές

$$x = (2 - \xi)t + \xi, \quad 0 \le \xi \le 1,$$

τέμνονται στο σημείο $(x, t) = (2, 1)$, βλ. Σχήμα 1.5.

Το πρόβλημά μας έχει συνεπώς λύση μόνο για $t < 1$. Η χρονική στιγμή $t = 1$ καλείται *χρόνος θραύσεως* του κύματος. Από φυσικής απόψεως αυτό σημαίνει ότι



Σχήμα 1.5: Οι χαρακτηριστικές γραμμές $x = (2 - \xi)t + \xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, βλ. (1.19), τέμνονται στο σημείο $(x,t) = (2,1)$. Στο σχήμα φαίνονται οι ευθείες για $\xi = 0$ και $\xi = 1$.

η κλίση του κύματος αυξάνει καθώς το t πλησιάζει προς τη μονάδα και απειρίζεται για $t = 1$. Σημειώστε τη σημαντική διαφορά αυτού του φαινομένου από τις λύσεις εξισώσεων μεταφοράς, οι οποίες περιγράφουν κύματα που δεν αλλάζουν σχήμα.

1.4 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Όπως είδαμε ήδη, οι Μ.Δ.Ε. έχουν γενικά πολλές λύσεις. Για να ξεχωρίσουμε κάποια λύση, επιβάλλουμε βοηθητικές συνθήκες. Οι συνθήκες πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να προσδιορίζεται μία μοναδική λύση. Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες τέτοιων συνθηκών, οι *αρχικές* (initial conditions) και οι *συνοριακές συνθήκες* (boundary conditions). Όλες αυτές οι συνθήκες προέρχονται από τη Φυσική· το είδος των κατάλληλων συνθηκών για κάθε εξίσωση εξαρτάται από την ίδια την εξίσωση (ακριβέστερα, από κάποια χαρακτηριστικά της, όπως είναι ο τύπος της, η τάξη της κ.λπ.).

Μια αρχική συνθήκη προσδιορίζει τη φυσική κατάσταση σε μια ιδιαίτερη χρονική στιγμή t_0. Για την *εξίσωση της θερμότητας* (heat equation),

$$u_t = \Delta u, \tag{1.21}$$

όπου $u = u(x,t)$, $t \geq t_0, x \in \Omega$, Ω *χωρίο* (δηλαδή ανοικτό, μη κενό σύνολο) του $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, και Δ ο *τελεστής του Laplace* ή, όπως συνήθως λέμε, η *Λαπλασιανή*,

$$\Delta v := \sum_{i=1}^{d} v_{x_i x_i},$$

η κατάλληλη αρχική συνθήκη είναι της μορφής

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.22}$$

Η u στην εξίσωση της θερμότητας περιγράφει την κατανομή της θερμότητας σε ένα ομογενές σώμα Ω, $u(x,t)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t. Στην αρχική συνθήκη (1.22), η φ περιγράφει την κατανομή της θερμότητας στο Ω κατά την αρχική στιγμή t_0, $\varphi(x)$ είναι η αρχική θερμοκρασία στο σημείο x.

Για την *κυματική εξίσωση* (wave equation)

$$u_{tt} = \Delta u, \tag{1.23}$$

όπου $u = u(x,t)$, $t \geq t_0, x \in \Omega$, Ω χωρίο του $\mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$, έχουμε ένα ζεύγος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u(x,t_0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,t_0) = \psi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.24}$$

Η u στην (1.23) δίνει τη *θέση* (τη *μετατόπιση*) ενός παλλόμενου σώματος Ω, φερ' ειπείν ενός τυμπάνου ή μιας χορδής, $u(x,t)$ είναι η θέση ενός σημείου x κατά τη χρονική στιγμή $t \geq t_0$. Στις αρχικές συνθήκες (1.24), οι φ και ψ δίνουν την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα κάθε σημείου του σώματος κατά την αρχική στιγμή t_0.

Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις της θερμότητας και του κύματος είναι *πρώτης* και *δεύτερης* τάξεως ως προς τη χρονική μεταβλητή t, αντίστοιχα, και γι' αυτές απαιτούνται *μία* και *δύο* αρχικές συνθήκες, αντίστοιχα, όπως ακριβώς και στην περίπτωση συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Σε κάθε φυσικό πρόβλημα, μια Μ.Δ.Ε. αναφέρεται σε ένα χωρίο Ω, στο οποίο ισχύει, και περιγράφει μια διαδικασία η οποία μπορεί να είναι είτε *στατική* είτε *δυναμική*, να είναι δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου ή να εξαρτάται από αυτόν. Η Μ.Δ.Ε. λέγεται τότε *στατική* ή *δυναμική*, αντίστοιχα.

Το *σύνορο* του Ω το συμβολίζουμε με $\partial\Omega$. Στην περίπτωση μιας παλλόμενης χορδής, το Ω είναι ένα διάστημα $[0,\ell]$, και φυσικά το σύνορό του αποτελείται από δύο μόνο σημεία, τα άκρα του διαστήματος, στην περίπτωση ενός τυμπάνου έχουμε ένα επίπεδο χωρίο και το σύνορό του είναι μια κλειστή καμπύλη.

Τα τρία σημαντικότερα είδη συνοριακών συνθηκών είναι τα εξής:

◦ *Συνθήκες του Dirichlet*: προκαθορίζεται η λύση u στο σύνορο $\partial\Omega$ (δηλαδή οι τιμές της στο σύνορο), π.χ. για τις εξισώσεις της θερμότητας (1.21) και του κύματος (1.23)

$$u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq t_0,$$

όπου g δεδομένη συνάρτηση.

◦ *Συνθήκες του Neumann*: προκαθορίζεται η κατά κατεύθυνση παράγωγος στην κατεύθυνση του εξωτερικού κανονικού διανύσματος n (το οποίο είναι κάθετο στο $\partial\Omega$) σε κάθε σημείο του $\partial\Omega$, π.χ. για τις εξισώσεις (1.21) και (1.23)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq t_0.$$

◦ *Συνθήκες του Robin*: για δεδομένη συνάρτηση a, προκαθορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ στο $\partial\Omega$, π.χ. για τις εξισώσεις (1.21) και (1.23)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + a(x,t)u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq t_0.$$

Οι συνοριακές συνθήκες του Dirichlet λέγονται και συνοριακές συνθήκες *πρώτου είδους*, οι συνοριακές συνθήκες του Neumann και συνοριακές συνθήκες *δευτέρου είδους*, και οι συνοριακές συνθήκες του Robin είτε συνοριακές συνθήκες *τρίτου είδους* είτε *μεικτές* συνοριακές συνθήκες.

Στην περίπτωση μονοδιάστατων προβλημάτων, όπου $\Omega = (0, \ell)$, οι συνοριακές συνθήκες του Dirichlet, του Neumann και του Robin, αντίστοιχα, γράφονται στη μορφή

$$\begin{aligned}
&u(0,t) = g(t), \quad u(\ell,t) = h(t), && t \geq t_0,\\
&u_x(0,t) = g(t), \quad u_x(\ell,t) = h(t), && t \geq t_0,\\
&u_x(0,t) + a(0,t)u(0,t) = g(t), \quad u_x(\ell,t) + a(\ell,t)u(\ell,t) = h(t), && t \geq t_0,
\end{aligned}$$

αντίστοιχα.

Λίγα λόγια τώρα για τη *φυσική σημασία* των συνοριακών συνθηκών. Ας αρχίσουμε με την παλλόμενη χορδή. Οι συνοριακές συνθήκες του Dirichlet σημαίνουν ότι τα άκρα της χορδής πάλλονται (ταλαντούνται, κινούνται δηλαδή) κατά έναν συγκεκριμένο τρόπο, ιδιαίτερα οι *ομογενείς* συνθήκες του Dirichlet $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ σημαίνουν ότι τα άκρα της χορδής παραμένουν σταθερά, δεν κινούνται καθόλου. Οι συνοριακές συνθήκες του Neumann σημαίνουν ότι προκαθορίζουμε την κλίση της χορδής στα άκρα της. Ιδιαίτερα οι *ομογενείς* συνθήκες του Neumann $u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$ σημαίνουν ότι η χορδή στα άκρα της έχει οριζόντια κλίση, δηλαδή ότι τα άκρα της χορδής κινούνται ελεύθερα και χωρίς τριβή κατακόρυφα, κάθετα στην κατεύθυνση του άξονα των x. Οι συνοριακές συνθήκες του Robin σημαίνουν ότι προκαθορίζεται κάποιος συνδυασμός της θέσεως των άκρων της χορδής και της κλίσης της στα άκρα της.

Στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας οι συνοριακές συνθήκες του Dirichlet σημαίνουν ότι προκαθορίζεται η θερμοκρασία στο σύνορο, ιδιαίτερα οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες του Dirichlet σημαίνουν ότι η θερμοκρασία στο σύνορο διατηρείται σταθερά ίση με το μηδέν. Οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες του Neumann σημαίνουν ότι το Ω είναι θερμικά απόλυτα μονωμένο, ούτε διαφεύγει θερμότητα από το Ω προς το περιβάλλον ούτε εισρέει σε αυτό θερμότητα από το περιβάλλον.

1.5 Καλώς τεθειμένα προβλήματα

Καλώς τεθειμένα προβλήματα (well posed problems) συνίστανται από μια Μ.Δ.Ε., η οποία ισχύει σε ένα χωρίο, καθώς και από αρχικές και/ή συνοριακές (ή ακόμη και άλλες βοηθητικές) συνθήκες, και έχουν τις εξής ιδιότητες:

- *Υπαρξη λύσεως*: Υπάρχει τουλάχιστον μία λύση u, η οποία ικανοποιεί τόσο την εξίσωση όσο και τις βοηθητικές συνθήκες.
- *Μοναδικότητα*: Υπάρχει το πολύ μία λύση του προβλήματος.
- *Ευστάθεια* (ή *συνεχής εξάρτηση*): Η μοναδική λύση u εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος, δηλαδή "μικρή" (υπό κάποια έννοια) μεταβολή των δεδομένων έχει ως συνέπεια μικρή (υπό κάποια έννοια) μεταβολή της λύσεως.

Αν θέσουμε περισσότερες βοηθητικές συνθήκες από όσες απαιτούνται για ένα πρόβλημα, τότε δεν θα έχουμε γενικά ύπαρξη λύσεων, αν θέσουμε λιγότερες τότε δεν θα έχουμε μοναδικότητα.

Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\ell), \quad t \geq 0, \\ u(0,t) = g(t), \ \ u(\ell,t) = h(t), & t \geq 0, \\ u(\cdot,0) = \varphi, & x \in (0,\ell), \end{cases} \tag{1.25}$$

είναι, υπό κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας των δεδομένων g, h και φ, καλώς τεθειμένο. Το αντίστοιχο πρόβλημα προς τα πίσω στον χρόνο

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\ell), \quad t \leq 0, \\ u(0,t) = g(t), \ \ u(\ell,t) = h(t), & t \leq 0, \\ u(\cdot,0) = \varphi, & x \in (0,\ell), \end{cases} \tag{1.26}$$

δεν είναι καλώς τεθειμένο. Αυτό είναι σαφές από φυσικής απόψεως και θα το μελετήσουμε και από μαθηματικής απόψεως αργότερα.

Ως ένα άλλο παράδειγμα μη καλώς τεθειμένου προβλήματος αναφέρουμε το εξής:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, \ \ y > 0, \\ u(\cdot,0) = g, \ u_y(\cdot,0) = h, & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Πράγματι, για κατάλληλα g και h έχουμε τις λύσεις

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \sin(nx) \sinh(ny).$$

Τότε, προφανώς, $u_n(x,0) = 0$ και

$$\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \sin(nx),$$

και οι τιμές αυτές τείνουν στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο. Αλλά, για $x = 1$, φερ' ειπείν, και $y \neq 0$, $u_n(x,y) \not\to 0$ καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς, με αυτήν την έννοια η λύση δεν εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα.

1.6 Ταξινόμηση Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως

Θα ταξινομήσουμε εδώ τις γραμμικές Μ.Δ.Ε. *δευτέρας τάξεως* με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Η γενική μορφή μιας τέτοιας εξισώσεως είναι

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = f, \tag{1.28}$$

όπου a_{ij}, a_i και f συναρτήσεις των x και y.

Χάριν απλότητος, θεωρούμε κατ' αρχάς τις συναρτήσεις a_{ij} και a_i *σταθερές*, a_{ij}, $a_i \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1 (Ταξινόμηση γραμμικών Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως.) Θεωρούμε την εξίσωση (1.28) με $a_{ij}, a_i \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση αυτή καλείται *ελλειπτική* (elliptic), αν $(a_{12})^2 < a_{11}a_{22}$, καλείται *υπερβολική* (hyperbolic), αν $(a_{12})^2 > a_{11}a_{22}$, και, τέλος, καλείται *παραβολική* (parabolic), αν $(a_{12})^2 = a_{11}a_{22}$. [Για την επέκταση αυτών των εννοιών στην περίπτωση γραμμικών Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως σε περισσότερες διαστάσεις παραπέμπουμε στην Άσκηση 1.12.]

Σημείωση. Εφιστούμε την προσοχή του αναγνώστη στο γεγονός ότι ο *τύπος* της εξισώσεως (1.28) καθορίζεται από τους συντελεστές των όρων δευτέρας τάξεως και μόνο, οι συντελεστές όρων χαμηλότερης τάξεως δεν παίζουν κανένα ρόλο. □

Παρατήρηση 1.1 (Επεξήγηση ονοματολογίας.) Η καμπύλη

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

είναι, κατά τα γνωστά, *έλλειψη*, αν $(a_{12})^2 < a_{11}a_{22}$, *υπερβολή*, αν $(a_{12})^2 > a_{11}a_{22}$, και *παραβολή*, αν $(a_{12})^2 = a_{11}a_{22}$. Σε αυτό το γεγονός οφείλουν την ονομασία τους οι διάφορες μορφές της εξισώσεως (1.28). □

Ο ορισμός της ελλειπτικότητας, της υπερβολικότητας ή της παραβολικότητας της εξισώσεως (1.28), στην περίπτωση που οι συντελεστές είναι συναρτήσεις των x και y, είναι εντελώς ανάλογος εκείνου της περιπτώσεως σταθερών συντελεστών. Συγκεκριμένα, αν η ποσότητα $[a_{12}(x,y)]^2$ είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίση, αντίστοιχα, της $a_{11}(x,y)a_{22}(x,y)$, τότε η εξίσωση είναι στο σημείο (x,y) ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική, αντίστοιχα. Φυσικά, στην προκειμένη περίπτωση, είναι δυνατόν η εξίσωση να είναι διαφορετικού τύπου σε διάφορες περιοχές του επιπέδου xy. Η *εξίσωση του Tricomi*, $u_{yy} - yu_{xx} = 0$, φερ' ειπείν, είναι ελλειπτική για $y < 0$, υπερβολική για $y > 0$ και παραβολική για $y = 0$.

Η *εξίσωση του Laplace* $u_{xx} + u_{yy} = 0$ είναι ελλειπτική, η *εξίσωση του κύματος* $u_{tt} = u_{xx}$ είναι υπερβολική, και η *εξίσωση της θερμότητας* $u_t = u_{xx}$ είναι παραβολική, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως. Αυτές οι τρεις εξισώσεις θα αποτελέσουν το κύριο αντικείμενο μελέτης μας στη συνέχεια.

Στο ακόλουθο θεώρημα θα δούμε ότι, στην περίπτωση σταθερών συντελεστών, οι όροι δευτέρας τάξεως της (1.28) έχουν ουσιαστικά μία από τρεις δυνατές μορφές:

Θεώρημα 1.1 (Βασικές μορφές ελλειπτικών, υπερβολικών και παραβολικών εξισώσεων σε δύο διαστάσεις.) *Θεωρούμε την εξίσωση* (1.28) *και υποθέτουμε ότι οι συντελεστές* a_{ij} *είναι σταθεροί. Τότε, με μια γραμμική αλλαγή μεταβλητών, η εξίσωση ανάγεται στη μορφή*

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \cdots = g,$$

στην περίπτωση που είναι ελλειπτική, στη μορφή

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + \cdots = g,$$

στην περίπτωση που είναι υπερβολική, και στη μορφή

$$U_{\xi\xi} + \cdots = g,$$

στην περίπτωση που είναι παραβολική. Οι $\cdots$ *συμβολίζουν εδώ όρους πρώτης ή μηδενικής τάξεως.*

Απόδειξη. Τα ουσιαστικά σημεία παρουσιάζονται ήδη στην περίπτωση $a_1 = a_2 = a_0 = 0$ και $f = 0$· υποθέτουμε λοιπόν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $a_1 = a_2 = a_0 = 0$ και $f = 0$.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: ($a_{11} \neq 0$ ή $a_{22} \neq 0$) και $a_{11} = a_{22} = 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, πάλι χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι $a_{11} = 1$, αφού η περίπτωση $a_{11} = 0$, δηλαδή $a_{22} \neq 0$, είναι εντελώς ανάλογη. Η εξίσωσή μας είναι δηλαδή

$$u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0$$

ή

$$(\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2)u = 0.$$

Προσθαφαιρούμε τώρα τον όρο $a_{12}^2\partial_y^2$ για να προκύψει τέλειο τετράγωνο και η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 u = 0. \tag{1.29}$$

Η ιδέα τώρα είναι να εισαγάγουμε νέες μεταβλητές κατά τρόπον ώστε κάθε όρος της (1.29) να γραφεί ως (δεύτερη) μερική παράγωγος στις νέες μεταβλητές (κατευθύνσεις). Στην παραβολική περίπτωση ο συντελεστής του δευτέρου όρου μηδενίζεται, στην ελλειπτική είναι θετικός και στην υπερβολική αρνητικός.

Αρχίζουμε με την ελλειπτική περίπτωση, οπότε έχουμε $a_{12}^2 < a_{22}$. Θέτουμε τότε $b := \sqrt{a_{22} - a_{12}^2}$ και εισάγουμε τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές ξ και η δια

$$x = \xi, \quad y = a_{12}\xi + b\eta$$

δηλαδή

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1}{b}(y - a_{12}x),$$

ο άξονας των η συμπίπτει δηλαδή με τον άξονα των y και ο άξονας των ξ με την ευθεία $y = a_{12}x$, και θέτουμε $U(\xi, \eta) := u(x, y)$. Προφανώς $\partial_\xi = \partial_x + a_{12}\partial_y$ και $\partial_\eta = b\partial_y$, επομένως η εξίσωση (1.29) λαμβάνει τη μορφή

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0.$$

Στην υπερβολική περίπτωση έχουμε $a_{12}^2 > a_{22}$. Τότε θέτουμε $b := \sqrt{a_{12}^2 - a_{22}}$ και εισάγουμε τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές ξ και η, όπως και προηγουμένως, δια

$$x = \xi, \quad y = a_{12}\xi + b\eta.$$

Η εξίσωση (1.29) λαμβάνει τότε τη μορφή

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0.$$

Τέλος, στην παραβολική περίπτωση έχουμε $a_{12}^2 = a_{22}$ και η (1.29) γράφεται ως

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u = 0. \tag{1.30}$$

Με την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \xi, \quad y = a_{12}\xi + \eta$$

έχουμε τότε $\partial_\xi = \partial_x + a_{12}\partial_y$ και $\partial_\eta = \partial_y$, και η εξίσωση (1.29) λαμβάνει τη μορφή

$$U_{\xi\xi} = 0.$$

Στην περίπτωση $a_{11} = a_{22} = 0$ η εξίσωση γράφεται ως $u_{xy} = 0$. Με την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta$$

η εξίσωση αυτή λαμβάνει τη μορφή

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0.$$

Η συγκεκριμένη αλλαγή μεταβλητών σε αυτήν την περίπτωση υπαγορεύεται από το γεγονός ότι η εξίσωση $u_{xy} = 0$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$(\partial_x + \partial_y)^2 u - (\partial_x - \partial_y)^2 u = 0. \qquad \square$$

Ασκήσεις

1.7 Προσδιορίστε τον τύπο κάθε μίας των ακολούθων εξισώσεων, δηλαδή αποφανθείτε κατά πόσον αυτή είναι ελλειπτική, υπερβολική ή παραβολική:

(i) $\quad u_{xx} - 5u_{xy} = 0,$

(ii) $\quad 4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0,$

(iii) $\quad 4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0,$

(iv) $\quad u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + 4u = 0,$

(v) $\quad 9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0.$

1.8 Σε ποιες περιοχές του επιπέδου xy είναι η εξίσωση

$$(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$$

ελλειπτική, υπερβολική και παραβολική, αντίστοιχα;

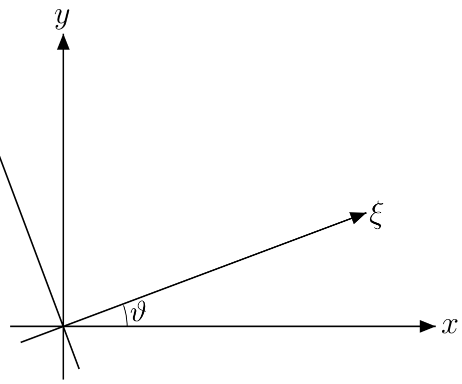
1.9 Αποδείξτε ότι μεταξύ των εξισώσεων της μορφής (1.28) με σταθερούς συντελεστές, οι μόνες που μένουν όπως είναι σε όλες τις περιστροφές του επιπέδου (είναι, όπως λέμε, *αναλλοίωτες σε περιστροφές*),

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

είναι εκείνες που έχουν τη μορφή

$$a(u_{xx} + u_{yy}) + bu = f.$$

1.10 Θεωρούμε τη Μ.Δ.Ε. $3u_y + u_{xy} = 0$.



Σχήμα 1.6: Περιστροφή του συστήματος των αξόνων κατά γωνία ϑ.

(i) Ποιου τύπου είναι αυτή η εξίσωση;

(ii) Θέτοντας $v := u_y$, προσδιορίστε τη γενική της λύση, βλ. την Άσκηση 1.3.

(iii) Τι μπορείτε να πείτε σχετικά με ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσεως της Μ.Δ.Ε. για την οποία ισχύει

$$u(x, 0) = \mathrm{e}^{-3x}, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

1.11 Θεωρούμε μια μη ομογενή Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξεως της μορφής $u_t + cu_x = h(x + ct)$, όπου $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και c ένας πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι οι λύσεις αυτής της εξισώσεως είναι της μορφής

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

όπου f και g συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f' = \frac{1}{2c}h$. Ιδιαίτερα δηλαδή μια ειδική λύση της εξισώσεως είναι η

$$u(x, t) = f(x + ct).$$

Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα με δύο τρόπους:

(i) Με την αλλαγή μεταβλητών $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ και $U(\xi, \eta) := u(x, t)$, γράψτε κατ' αρχάς την εξίσωση στη μορφή $2cU_\xi(\xi, \eta) = h(\xi)$.

(ii) Σύμφωνα με την $(1.14')$ έχουμε

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x-ct,0) + \int_0^t h(x + c(\sigma - t) + c\sigma)\, d\sigma \\ &= u(x-ct,0) + \int_0^t h(x - ct + 2c\sigma)\, d\sigma \\ &= u(x-ct,0) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\, ds \\ &= u(x-ct,0) + f(x+ct) - f(x-ct)\,. \end{aligned}$$

1.12 Αντιστοιχίζουμε στην εξίσωση (1.28) τον μη μηδενικό συμμετρικό πίνακα A,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

[Εξ ίσου λογικό θα ήταν να θεωρήσουμε τον $-A$ στη θέση του A, δηλαδή να πολλαπλασιάσουμε την (1.28) επί -1.] Αποδείξτε ότι:

- Αν η (1.28) είναι ελλειπτική, οι ιδιοτιμές του A είναι ομόσημες. [Γιατί μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι θετικές;]
- Αν η (1.28) είναι υπερβολική, οι ιδιοτιμές του A είναι ετερόσημες.
- Αν η (1.28) είναι παραβολική, μια ιδιοτιμή του A είναι το μηδέν και η άλλη είναι μη μηδενική.

[Η αντίστοιχη της (1.28) γραμμική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές στις n διαστάσεις είναι

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + a_0 u = f,$$

όπου, χωρίς περιορισμό της γενικότητας (γιατί;), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \dots, n$. Η εξίσωση αυτή καλείται *ελλειπτική*, αν όλες οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

είναι θετικές (ή όλες αρνητικές, φυσικά), και καλείται *υπερβολική* ή *παραβολική*, αντίστοιχα, αν $n-1$ ιδιοτιμές του A είναι θετικές και μία είναι αρνητική ή μηδέν, αντίστοιχα.]

1.13 Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (1.28) είναι ελλειπτική και ότι $a_{11} > 0$. Αποδείξτε ότι ο αντίστοιχος πίνακας A,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο των Ax και x είναι θετικό, $x^T Ax > 0$. Τι μπορείτε να πείτε για τον πίνακα A στην περίπτωση $a_{11} < 0$;

1.14 Προσδιορίστε κατ' αρχάς τη γενική λύση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u = u(x,t)$, της εξίσωσης $u_t + 2u_x + 3u = 0$, $x, t \in \mathbb{R}$, και εν συνεχεία προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + 3u = 0 & \text{στον } \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.15 Προσδιορίστε τη λύση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u = u(x,t)$, του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + 4u = \mathrm{e}^{x-2t} & \text{στον } \mathbb{R}^2, \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στον } \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2$.

2. Η κυματική εξίσωση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την *κυματική εξίσωση* σε μία (χωρική) διάσταση. Η εξίσωση αυτή είναι, όπως προαναφέραμε, υπερβολική και είναι η απλούστερη Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως.

2.1 Η κυματική εξίσωση σε όλο το $\mathbb{R}$

Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε την κυματική εξίσωση σε όλη την πραγματική ευθεία. Τα πραγματικά φυσικά φαινόμενα λαμβάνουν συνήθως χώρα σε φραγμένα διαστήματα. Ο λόγος για τον οποίο μελετάμε την εξίσωση σε όλη την ευθεία είναι ότι από μαθηματικής απόψεως απλοποιούνται τα πράγματα σε σημαντικό βαθμό γιατί σε αυτήν την περίπτωση απαλλασσόμεθα από τις συνοριακές συνθήκες. Δέον να σημειωθεί ότι οι πιο βασικές ιδιότητες των Μ.Δ.Ε. εμφανίζονται ήδη στην περίπτωση που τις εξετάζουμε σε όλον τον χώρο, και αυτή η πρακτική ακολουθείται σε μεγάλο βαθμό και στην έρευνα στην περιοχή αυτή στην παρούσα φάση. Αλλά και από φυσικής απόψεως έχει αυτή η μελέτη έννοια για την κυματική εξίσωση, γιατί τα κύματα διαδίδονται σχετικά "αργά" και για μικρά χρονικά διαστήματα, όταν είμαστε μακριά από το σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες δεν επηρεάζουν τη λύση. Γράφουμε λοιπόν την κυματική εξίσωση στη μορφή

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

με $c > 0$. Σημειώνουμε ότι με την αλλαγή μεταβλητών $v(x,t) := u(cx,t)$ η εξίσωση (2.1) λαμβάνει την απλούστερη μορφή $v_{tt} = v_{xx}$· παρά ταύτα προτιμούμε να μελετήσουμε την κυματική εξίσωση στη μορφή (2.1).

Πρόταση 2.1 (Γενική λύση της κυματικής εξίσωσης.) *Οι λύσεις της εξισώσεως* (2.1) *δίνονται δια*

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{2.2}$$

όπου f και g τυχαίες ομαλές συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη με δύο τρόπους.

$1^{\underline{\text{ος}}}$ *τρόπος*: Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0. \tag{2.3}$$

Έστω $v := u_t + cu_x$. Τότε η v ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση πρώτης τάξεως: $v_t - cv_x = 0$. Η λύση αυτής της εξισώσεως δίνεται δια

$$v(x,t) = h(x+ct), \tag{2.4}$$

όπου h τυχαία ομαλή συνάρτηση μίας μεταβλητής, βλ. τις (1.11) και (1.10). Σύμφωνα με τον ορισμό της v και τη (2.4) έχουμε

$$u_t(x,t) + cu_x(x,t) = h(x+ct). \tag{2.5}$$

Η γενική λύση u_1 της αντίστοιχης ομογενούς της (2.5) είναι

$$u_1(x,t) = g(x-ct),$$

βλ. τις (1.11″) και (1.10′). Επίσης εύκολα διαπιστώνει κανείς, βλ. την Άσκηση 1.11, ότι μία ειδική λύση u_2 της (2.5) είναι

$$u_2(x,t) = f(x+ct),$$

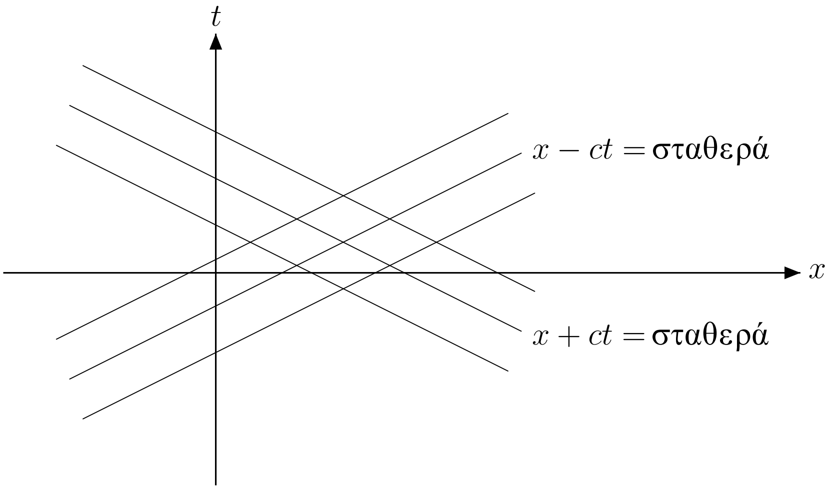
όπου f τέτοια ώστε $f' = \frac{1}{2c}h$. Η γενική λύση της (2.5) είναι $u_1 + u_2$, οπότε η γενική λύση της (2.1) δίνεται από τη (2.2).

$2^{\underline{\text{ος}}}$ *τρόπος*: Εισάγοντας τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές ξ και η δια

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

και θέτοντας $U(\xi,\eta) := u(x,t)$ έχουμε $\partial_x u = \partial_\xi U + \partial_\eta U$ και $\partial_t u = c\partial_\xi U - c\partial_\eta U$. Συνεπώς $\partial_t u - c\partial_x u = -2c\partial_\eta U$ και $\partial_t u + c\partial_x u = 2c\partial_\xi U$, οπότε η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$(-2c\partial_\xi)(2c\partial_\eta)U = 0,$$



Σχήμα 2.1: Οικογένειες χαρακτηριστικών γραμμών για την κυματική εξίσωση.

βλ. τη (2.3). [Με πράξεις οδηγούμαστε στο ανωτέρω συμπέρασμα ως εξής: έχουμε

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\eta} + c^2 U_{\eta\eta},$$

συνεπώς $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 U_{\xi\eta}$.] Επομένως έχουμε $U_{\xi\eta} = 0$, οπότε

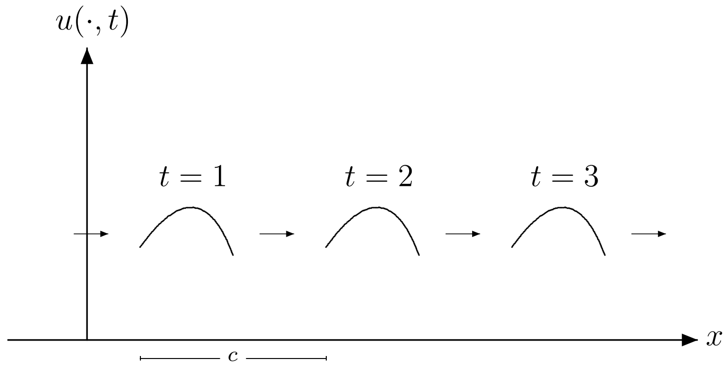
$$U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

βλ. την (1.4), από την οποία έπεται αμέσως η (2.2). Το κίνητρο για τη συγκεκριμένη επιλογή των αξόνων ξ και η είναι φυσικά αυτοί να είναι παράλληλοι προς τις χαρακτηριστικές γραμμές της κυματικής εξίσωσης. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε δύο οικογένειες χαρακτηριστικών, επομένως δεν υπάρχουν περιθώρια για αυθαίρετη επιλογή ενός των αξόνων, κατ' αντιδιαστολήν προς την περίπτωση γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές, βλ. την ενότητα 1.2.2. □

Η κυματική εξίσωση έχει μια απλή και ωραία γεωμετρία. Υπάρχουν δύο οικογένειες χαρακτηριστικών γραμμών, $x \pm ct =$ σταθερά.

Η $g(x - ct)$ παριστά ένα κύμα, το οποίο ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα c.

Η $f(x + ct)$ παριστά ένα κύμα, το οποίο ταξιδεύει προς τα αριστερά, πάλι με ταχύτητα c. Η γενική λύση (2.2) είναι η σύνθεση δύο τέτοιων κυμάτων.



Σχήμα 2.2: Κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα c.

2.1.1 Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση σε όλη την πραγματική ευθεία είναι: Δίδονται δύο ομαλές συναρτήσεις $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ζητείται μια ομαλή συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{2.6i}$$

και

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = \varphi & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(\cdot, 0) = \psi & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.6ii}$$

Σύμφωνα με τη (2.2) η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης (2.6i) είναι

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct). \tag{2.7}$$

Θέτοντας εδώ $t = 0$ και χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση της (2.6ii) λαμβάνουμε

$$\varphi = f + g \quad \text{στον } \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Εξ άλλου παραγωγίζοντας τη (2.7) ως προς t έχουμε

$$u_t(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct),$$

οπότε θέτοντας $t = 0$ και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη σχέση της (2.6ii) λαμβάνουμε

$$\psi = cf' - cg' \quad \text{στον } \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Οι (2.8) και (2.9) αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις f και g. Παραγωγίζοντας τη (2.8) και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τη (2.9) λαμβάνουμε

$$f' = \frac{1}{2}(\varphi' + \frac{\psi}{c}), \quad g' = \frac{1}{2}(\varphi' - \frac{\psi}{c}).$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{cases} f(s) = \dfrac{1}{2}\varphi(s) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^s \psi(\tau)d\tau + \alpha \\ g(s) = \dfrac{1}{2}\varphi(s) - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^s \psi(\tau)d\tau + \beta, \end{cases} \tag{2.10}$$

όπου α και β σταθερές. Από τις (2.8) και (2.10) έπεται ότι $\alpha + \beta = 0$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} f(x+ct) + g(x-ct) = {} & \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau \\ & + \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f(x+ct) + g(x-ct) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau.$$

Σύμφωνα με τη (2.7) συμπεραίνουμε ότι η λύση του προβλήματος (2.6) είναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau. \tag{2.11}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, από τα προηγούμενα έπεται αμέσως το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.2 (Λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση.) *Έστω $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση u του προβλήματος* (2.6), *η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και δίνεται από τον τύπο* (2.11). □

Σημειώνουμε ακόμη ότι από την παράσταση (2.11) προκύπτει η ομαλότητα της λύσεως u της κυματικής εξίσωσης: Αν η φ είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και η ψ είναι $m-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (υπενθυμίζουμε ότι η ψ αντιστοιχεί στη u_t, έχουμε δηλαδή ήδη παραγωγίσει μία φορά), τότε η u είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Παρατήρηση 2.1 (Αρνητικοί χρόνοι.) Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η συνάρτηση u, που δίνεται από τον τύπο (2.11), για $t < 0$, ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και για αυτά τα t. Ένας άλλος τρόπος για να δει κανείς ότι το πρόβλημα (2.6) μπορεί να λυθεί και για αρνητικό t είναι η αλλαγή μεταβλητής $s := -t$. Από φυσικής απόψεως αυτό σημαίνει ότι γνωρίζοντας σε μία χρονική στιγμή t_0 τα χαρακτηριστικά $u(\cdot, t_0)$ και $u_t(\cdot, t_0)$ του κύματος, όχι μόνο μπορούμε να προβλέψουμε με ποιον τρόπο θα διαδοθεί το κύμα για $t > t_0$, αλλά μπορούμε και να πούμε από πού προήλθε αυτό το κύμα, ποια ήταν τα χαρακτηριστικά του ανά πάσα χρονική στιγμή στο παρελθόν. Μπορούμε με άλλα λόγια να μελετήσουμε την ιστορία του. Ριζικά διαφορετική είναι η κατάσταση στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, όπως θα δούμε στη συνέχεια του μαθήματος.

Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα. Σύμφωνα με τη (2.11), έχουμε

$$|u(x,t)| \le \sup_{\tilde{x}\in\mathbb{R}} |\varphi(\tilde{x})| + t \sup_{\tilde{x}\in\mathbb{R}} |\psi(\tilde{x})|.$$

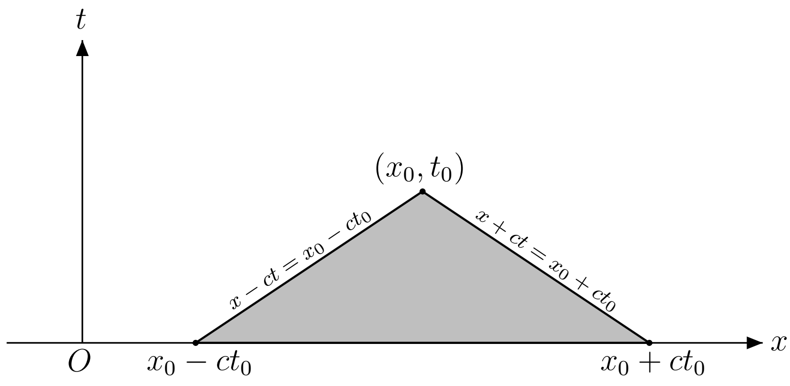
Αν λοιπόν u είναι η λύση του (2.6) και $\tilde{u}$ η λύση του αντίστοιχου προβλήματος με αρχικά δεδομένα $\tilde{\varphi}$ και $\tilde{\psi}$, στη θέση των φ και ψ, αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη εκτίμηση

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \le \sup_{\tilde{x}\in\mathbb{R}} |\varphi(\tilde{x}) - \tilde{\varphi}(\tilde{x})| + t \sup_{\tilde{x}\in\mathbb{R}} |\psi(\tilde{x}) - \tilde{\psi}(\tilde{x})|,$$

δηλαδή, με αυτήν την έννοια, η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα.

2.1.2 Εξάρτηση και επιρροή

Από τον τύπο (2.11) συνάγονται εύκολα ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία.



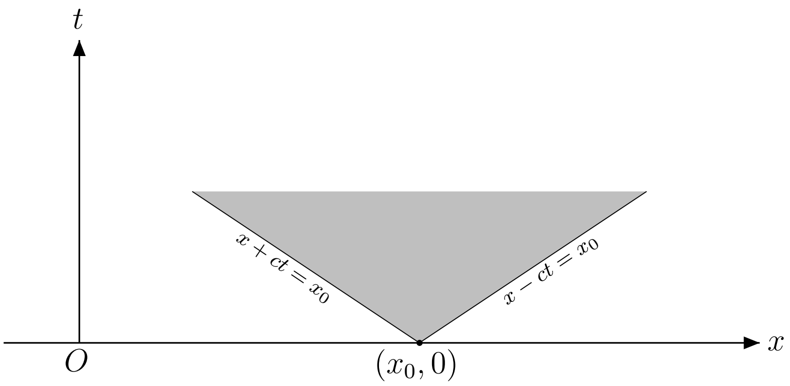
Σχήμα 2.3: Περιοχή εξάρτησης του σημείου (x_0, t_0).

Η τιμή της λύσεως u σε ένα σημείο (x_0, t_0) εξαρτάται μόνο από τις τιμές της φ στα δύο σημεία $x_0 - ct_0$ και $x_0 + ct_0$, καθώς και από τις τιμές της ψ στο διάστημα $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Το γκρι μέρος στο Σχήμα 2.3 καλείται *περιοχή εξαρτήσεως* του σημείου (x_0, t_0). Σημειώνουμε ότι τα άκρα της περιοχής εξαρτήσεως είναι τα σημεία τομής των χαρακτηριστικών της κυματικής εξισώσεως που διέρχονται από το σημείο (x_0, t_0) με τον άξονα των x.

Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε μεταβολή των φ και ψ έξω από το διάστημα $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ δεν γίνεται αντιληπτή στο σημείο (x_0, t_0). Από φυσικής απόψεως αυτό σημαίνει ότι μεταβολές στα αρχικά δεδομένα διαδίδονται με ταχύτητα μικρότερη ή ίση του c, ακριβέστερα οι μεταβολές της φ διαδίδονται με ταχύτητα ακριβώς c, ενώ οι μεταβολές της ψ με ταχύτητα το πολύ c.

Βλέποντας τα πράγματα από μια κατά κάποια έννοια αντίστροφη πλευρά, διαπιστώνουμε, πάλι από τον τύπο (2.11), ότι μια αρχική συνθήκη σε ένα σημείο x_0, μπορεί να επηρεάσει τη λύση μόνο στη γκρι περιοχή στο Σχήμα 2.4, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών της κυματικής εξίσωσης που διέρχονται από το σημείο $(x_0, 0)$, και λέγεται *περιοχή επιρροής* του σημείου $(x_0, 0)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα αρχικά δεδομένα, φ και ψ, είναι συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, μηδενίζονται δηλαδή έξω από ένα κατάλληλο κλειστό και φραγμένο διάστημα, ας το πούμε $[a, b]$. Έστω $x^\star \in \mathbb{R}$. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει τώρα είναι για ποιες τιμές του t μπορεί η $u(x^\star, t)$ να πάρει γενικά μη μηδενικές τιμές. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, $\psi = 0$ και $\psi \neq 0$.



Σχήμα 2.4: Πεδίο επιρροής του σημείου $(x_0, 0)$.

1η Περίπτωση: $\psi = 0$

Σε αυτήν την περίπτωση η (2.11) λαμβάνει τη μορφή

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\big].$$

Επομένως, η $u(x^\star, t)$ μπορεί να πάρει γενικά μη μηδενικές τιμές για t τέτοια ώστε $x^\star - ct \in (a,b)$ ή $x^\star + ct \in (a,b)$, δηλαδή

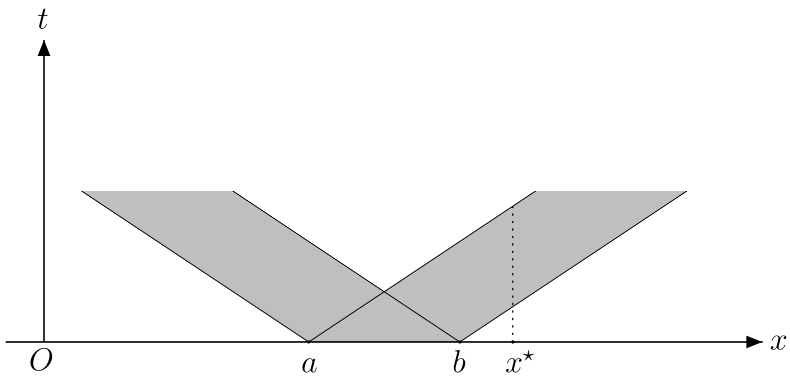
$$\frac{a - x^\star}{c} < t < \frac{b - x^\star}{c} \quad \text{ή} \quad \frac{x^\star - a}{c} > t > \frac{x^\star - b}{c}.$$

Διακρίνουμε τώρα διάφορες περιπτώσεις:

- Για $x^\star \geq b$ έχουμε $\frac{x^\star - b}{c} < t < \frac{x^\star - a}{c}$.
- Για $x^\star \leq a$ έχουμε $\frac{a - x^\star}{c} < t < \frac{b - x^\star}{c}$.
- Για $a < x^\star < b$ έχουμε $0 \leq t \leq \max\left(\frac{b-x^\star}{c}, \frac{x^\star - a}{c}\right)$.

Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό κύμα γίνεται αντιληπτό σε έναν παρατηρητή, που βρίσκεται στο σημείο $x^\star$, μόνο κατά το χρονικό διάστημα που αναφέρθηκε προηγουμένως, ανάλογα με τη θέση του $x^\star$, βλ. το Σχήμα 2.5.

Αναφέρουμε ακόμη ότι παρόμοιο φαινόμενο, δηλαδή κύματα με συμπαγή φορέα να γίνονται αντιληπτά, σε κάθε σημείο, για φραγμένα χρονικά διαστήματα, παρατηρείται στις περιττές διαστάσεις $d \geq 3$, ακόμη και για μη μηδενικά ψ με συμπαγή φορέα. Η φυσική σημασία αυτού του γεγονότος είναι προφανής στις τρεις διαστάσεις που ζούμε· αν αυτό δεν ήταν σωστό, θα ακούγαμε τον θόρυβο οποιουδήποτε ακουστικού κύματος επ' άπειρον!



Σχήμα 2.5: Στην περίπτωση που $\psi = 0$ και ο φορέας της φ περιέχεται στο διάστημα $[a, b]$, η λύση u του προβλήματος (2.6) μηδενίζεται έξω από τη γκρι περιοχή του σχήματος. Η περιοχή αυτή παράγεται από τις χαρακτηριστικές ημιευθείες της εξίσωσης που ξεκινούν από ένα σημείο $(x, 0)$, καθώς το x διαγράφει όλο το διάστημα $[a, b]$. Κατά συνέπεια, ένας παρατηρητής που βρίσκεται στη θέση $x^\star$ αντιλαμβάνεται το κύμα για εκείνο το χρονικό διάστημα που αποτελείται από τα t για τα οποία τα σημεία $(x^\star, t)$ ανήκουν στη γκρι περιοχή.

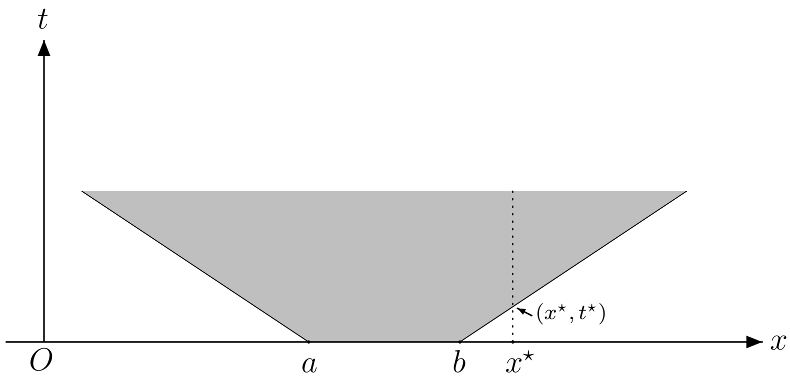
$2^{\underline{\eta}}$ Περίπτωση: $\psi \neq 0$

Σε αυτήν την περίπτωση αρκεί να ισχύει $(x^\star - ct, x^\star + ct) \cap (a, b) \neq \emptyset$, δηλαδή $x^\star + ct > a$ και $x^\star - ct < b$, συνεπώς

- $t > \max\left(\frac{a-x^\star}{c}, \frac{x^\star-b}{c}\right)$ για $x^\star < a$ ή $x^\star > b$
- και $t \geq 0$ για $a < x^\star < b$.

Στην προκειμένη περίπτωση δηλαδή το αρχικό κύμα γίνεται αντιληπτό σε έναν παρατηρητή, που βρίσκεται στο σημείο $x^\star$, από μία χρονική στιγμή και μετά συνεχώς, βλ. το Σχήμα 2.6.

Παρόμοιο φαινόμενο, δηλαδή κύματα με συμπαγή φορέα να γίνονται αντιληπτά επ' άπειρον, πέραν της περιπτώσεως της μίας χωρικής διάστασης, $d = 1$, παρατηρείται επίσης στις άρτιες διαστάσεις $d = 2, 4, \ldots$. Ευτυχώς που ζούμε στις τρεις διαστάσεις!



Σχήμα 2.6: Στη γενική περίπτωση που $\psi \neq 0$ και οι φορείς των φ και ψ περιέχονται στο διάστημα $[a, b]$, η λύση u του προβλήματος (2.6) μηδενίζεται έξω από τη γκρι περιοχή του σχήματος. Η περιοχή αυτή παράγεται από το σύνολο των σημείων που περικλείονται από τις χαρακτηριστικές ημιευθείες της εξίσωσης που ξεκινούν από ένα σημείο $(x, 0)$, καθώς το x διαγράφει όλο το διάστημα $[a, b]$. Κατά συνέπεια, ένας παρατηρητής που βρίσκεται στη θέση $x^\star$ αντιλαμβάνεται το κύμα για άπειρο χρονικό διάστημα $(t^\star, \infty)$, όπου $t^\star$ ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο το σημείο $(x^\star, t^\star)$ βρίσκεται στο σύνορο της γκρι περιοχής του σχήματος.

2.1.3 Ενέργεια

Για να είμαστε βέβαιοι ότι τα ολοκληρώματα για τα οποία θα μιλάμε στη συνέχεια πράγματι υπάρχουν, θα υποθέσουμε σε αυτό το εδάφιο ότι οι αρχικές συνθήκες μηδενίζονται έξω από ένα διάστημα $[-R, R]$, όπου R τυχαίος θετικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, για κάθε $t > 0$, η $u(\cdot, t)$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-R - ct, R + ct]$. Πολλαπλασιάζοντας την κυματική εξίσωση με u_t και ολοκληρώνοντας ως προς x έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)dx$$

ή

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx = c^2 \int_{-R-ct}^{R+ct} u_{xx}(x,t)u_t(x,t)dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη το δεξιό μέλος αυτής της σχέσεως και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η u_x μηδενίζεται στα σημεία $(-R - ct, t)$ και $(R + ct, t)$

λαμβάνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big[u_{tt}(x,t)u_t(x,t) + c^2 u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\big]dx = 0.$$

Τώρα,

$$u_{tt}u_t = \frac{1}{2}\big((u_t)^2\big)_t \quad \text{και} \quad u_x u_{tx} = u_x u_{xt} = \frac{1}{2}\big((u_x)^2\big)_t,$$

και η ανωτέρω σχέση γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \big(u_t^2 + c^2 u_x^2\big)_t(x,t)\,dx = 0$$

ή

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \big(u_t^2 + c^2 u_x^2\big)(x,t)\,dx = 0. \tag{2.12}$$

Το μέγεθος $E(t)$,

$$E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \Big[[u_t(x,t)]^2 + c^2[u_x(x,t)]^2\Big]dx,$$

είναι η *ενέργεια*, και σύμφωνα με τη (2.12) η ενέργεια είναι ανεξάρτητη του χρόνου, έχουμε δηλαδή *διατήρηση* της ενέργειας. Συνεπώς $E(t) = E(0)$, γεγονός το οποίο γράφεται και στη μορφή

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big[[u_t(x,t)]^2 + c^2[u_x(x,t)]^2\Big]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[[\psi(x)]^2 + c^2[\varphi'(x)]^2\Big]dx, \ t \geq 0. \tag{2.13}$$

Ιδιαίτερα, από τη σχέση (2.13) έπεται ότι για $\varphi = \psi = 0$ η λύση u μηδενίζεται ταυτοτικά. Τέτοιες ιδιότητες μπορούν να φανούν χρήσιμες σε αποδείξεις μοναδικότητας της λύσης γραμμικών προβλημάτων, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που δεν έχουμε παράσταση της λύσης, κάτι που αποτελεί και τον κανόνα στις Μ.Δ.Ε.

Σημείωση. Η παράσταση (2.11) της λύσεως του προβλήματος αρχικών τιμών (2.6) για την κυματική εξίσωση απεδείχθη από τον d' Alembert το 1746.

Ασκήσεις

2.1 Έστω u μια λύση της κυματικής εξίσωσης (2.1). Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $v, w, v(x,t) := u(x-y,t), w(x,t) := u(\alpha x, \alpha t)$, με δεδομένα $y, \alpha \in \mathbb{R}$, είναι επίσης λύσεις της κυματικής εξίσωσης. Επίσης, οποιαδήποτε μερική παράγωγος της u, φερ' ειπείν η u_x, είναι λύση, αν είναι αρκετά ομαλή.

2.2 Έστω u λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} = u_{xx}$. Αποδείξτε ότι

$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = u(x+k, t+h) + u(x-k, t-h),$$

για κάθε $x, t, h, k \in \mathbb{R}$. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της σχέσεως;

2.3 Έστω ότι οι αρχικές τιμές φ και ψ είναι περιττές συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι και η λύση u του προβλήματος αρχικών τιμών (2.6), είναι, για κάθε $t > 0$, περιττή συνάρτηση του x, δηλαδή ότι η συνάρτηση $u(\cdot, t)$ είναι περιττή.

2.2 Ανάκλαση κυμάτων

Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε το απλούστερο πρόβλημα *ανακλάσεως κυμάτων*, την περίπτωση δηλαδή όπου υπάρχει ένα μόνο σημείο ανακλάσεως, το άκρο μιας ημιευθείας. Θεωρούμε λοιπόν το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση στην ημιευθεία: Ζητείται μια ομαλή συνάρτηση $v : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \tag{2.14i}$$

τις αρχικές συνθήκες

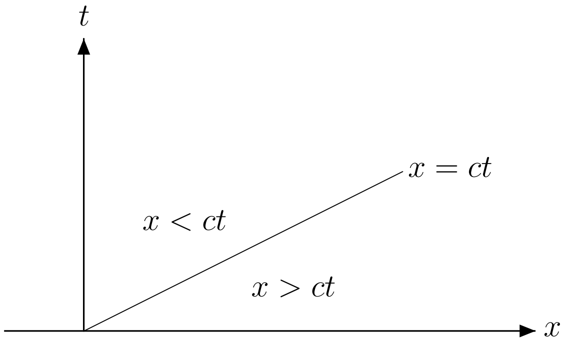
$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi, & x \geq 0, \\ v_t(x,0) = \psi, & x \geq 0, \end{cases} \tag{2.14ii}$$

και την ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$v(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.14iii}$$

Για προφανείς λόγους συμβατότητας έχουμε $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Επεκτείνουμε τις φ και ψ κατά περιττό τρόπο στον αρνητικό ημιάξονα, ορίζουμε δηλαδή τις συναρτήσεις $\varphi_{\text{περ.}}, \psi_{\text{περ.}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δια

$$\varphi_{\text{περ.}}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \psi_{\text{περ.}}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}.$$



Σχήμα 2.7: Στα χωρία $x \geq ct$ και $x < ct$, αντίστοιχα, η λύση του προβλήματος (2.14) δίνεται από τις (2.16i) και (2.16ii), αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $u = u(x,t)$ τη λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών για την κυματική εξίσωση σε όλη την ευθεία, με αρχικές τιμές $\varphi_{\text{περ.}}$ και $\psi_{\text{περ.}}$. Κατά την Άσκηση 2.3, για κάθε t, η u είναι περιττή συνάρτηση του x. Συνεπώς ισχύει $u(0,t) = 0, t \geq 0$, δηλαδή η u ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (2.14iii). Συνεπώς η $v, v(x,t) := u(x,t), x \geq 0, t \geq 0$, είναι λύση του προβλήματος (2.14). Σύμφωνα με τον τύπο (2.11) έχουμε, για $x \geq 0$,

$$v(x,t) = u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi_{\text{περ.}}(x-ct) + \varphi_{\text{περ.}}(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{περ.}}(\tau)\,d\tau. \tag{2.15}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις: $x \geq ct$ και $0 < x < ct$ $(t > 0)$.

Για $x \geq ct$ στο δεξιό μέλος της (2.15) εμφανίζονται τιμές των $\varphi_{\text{περ.}}$ και $\psi_{\text{περ.}}$ μόνο σε μη αρνητικά σημεία, στα οποία φυσικά αυτές συμπίπτουν με τις φ και ψ, αντίστοιχα. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση η u γράφεται στη μορφή

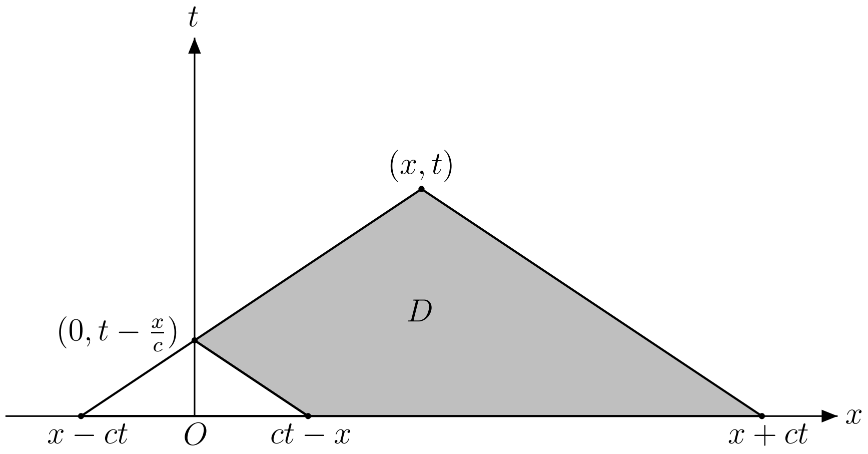
$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau, \quad x \geq ct. \tag{2.16i}$$

Για $x < ct$ έχουμε $\varphi_{\text{περ.}}(x-ct) = -\varphi_{\text{περ.}}(ct-x)$ και συνεπώς η (2.15) δίνει τώρα

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\big] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{ct-x} \psi_{\text{περ.}}(\tau)\,d\tau.$$

Ο τελευταίος όρος ισούται με μηδέν, ως ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό ως προς το μηδέν διάστημα, επομένως

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\big] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} \psi(\tau)\,d\tau, \quad 0 < x < ct. \tag{2.16ii}$$



Σχήμα 2.8: Περιοχή εξαρτήσεως για το πρόβλημα (2.14).

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν έχουμε ότι η λύση του προβλήματος (2.14) δίνεται από τη (2.16). Αν οι χαρακτηριστικές που διέρχονται από ένα σημείο (x, t) τέμνουν τον άξονα των x πριν τμήσουν τον άξονα των t, τότε ισχύει ο τύπος (2.16i) και όσα αναφέραμε όσον αφορά την περιοχή εξάρτησης για το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση σε όλη την ευθεία. Αν μια χαρακτηριστική τέμνει τον άξονα των t πριν τμήσει τον άξονα των x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.8, τότε η περιοχή εξαρτήσεως είναι το γκρι μέρος αυτού του σχήματος.

Παρατήρηση 2.2 (Ομαλότητα αρχικών τιμών.) Έστω ότι $\varphi \in C^2(0, \infty)$ και $\psi \in C^1(0, \infty)$. Τότε, μπορεί εύκολα να ελέγξει κανείς, εκ των υστέρων, ότι η συνάρτηση v που δίνεται από τη (2.16) αποτελεί όντως λύση του προβλήματος (2.14). Πάντως, η $\varphi_{\text{περ.}}$ είναι γενικά μόνο μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο 0. Για να είναι η $\varphi_{\text{περ.}}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, πρέπει επί πλέον να υποθέσουμε ότι $\varphi''(0) = 0$. Αν ζητήσουμε να ικανοποιείται η εξίσωση για $x \geq 0$ και $t \geq 0$ (και όχι μόνο για $x, t > 0$ όπως στη (2.14i)), τότε αυτή η συνθήκη είναι φυσιολογική συνθήκη συμβατότητας.

2.3 Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών σε ένα πεπερασμένο διάστημα

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση σε ένα πεπερασμένο διάστημα, λόγου χάριν το διάστημα $[0, \ell]$:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0, \tag{2.17i}$$

τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le \ell, \end{cases} \tag{2.17ii}$$

και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες του Dirichlet

$$v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{2.17iii}$$

Μοναδικότητα: Θα αποδείξουμε μοναδικότητα της ομαλής λύσεως του προβλήματος (2.17). Πολλαπλασιάζοντας τη (2.17i) επί v_t, ολοκληρώνοντας ως προς x, από 0 έως ℓ, ολοκληρώνοντας στο δεξιό μέλος κατά μέρη και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες, λαμβάνουμε

$$\int_0^\ell \big[v_{tt}(x,t)v_t(x,t) + c^2 v_x(x,t)v_{xt}(x,t)\big]\,dx = 0.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell \big(v_t^2 + c^2 v_x^2\big)_t(x,t)\,dx = 0,$$

οπότε

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \big(v_t^2 + c^2 v_x^2\big)(x,t)\,dx = 0. \tag{2.18}$$

Από τη (2.18) συμπεραίνουμε αμέσως ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στη (2.18) είναι ανεξάρτητο του t, άρα

$$\int_0^\ell \Big[[v_t(x,t)]^2 + c^2[v_x(x,t)]^2\Big]dx = \int_0^\ell \Big[[\psi(x)]^2 + c^2[\varphi'(x)]^2\Big]dx,\ t \ge 0, \tag{2.19}$$

όπου το δεξιό μέλος λαμβάνεται για $t = 0$ χρησιμοποιώντας τη (2.17ii).

Από τη (2.19) έπεται ιδιαίτερα ότι, αν $\varphi = \psi = 0$, τότε τόσο $v_t(x,t) = 0$ όσο και $v_x(x,t) = 0$. Από κάθε μία από αυτές τις σχέσεις συμπεραίνουμε εύκολα, χρησιμοποιώντας τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες, αντίστοιχα, ότι $v(x,t) = 0,\ 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0$. Αν τώρα v_1, v_2 λύσεις του προβλήματος (2.17), τότε η $v := v_1 - v_2$ ικανοποιεί τη (2.17i) και τις συνοριακές συνθήκες, και επί πλέον οι αντίστοιχες αρχικές τιμές μηδενίζονται ταυτοτικά, οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα $v = 0$ ή $v_1 = v_2$. Η τεχνική με την οποία αποδείξαμε τη μοναδικότητα, αναφέρεται συχνά ως *μέθοδος της ενέργειας*.

Ένας τρόπος για να παραστήσουμε τη λύση του προβλήματος (2.17) είναι ο ακόλουθος: Επεκτείνουμε τη συνάρτηση φ περιττά στο διάστημα $[-\ell, 0)$, και στη συνέχεια επεκτείνουμε τη νέα συνάρτηση περιοδικά με περίοδο 2ℓ σε όλο το $\mathbb{R}$. Ορίζουμε δηλαδή την περιοδική, με περίοδο 2ℓ, συνάρτηση $\varphi_{\text{επεκ.}}$ δια

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & 0 \le x \le \ell \\ -\varphi(-x), & -\ell \le x < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x + 2\ell) = \varphi_{\text{επεκ.}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

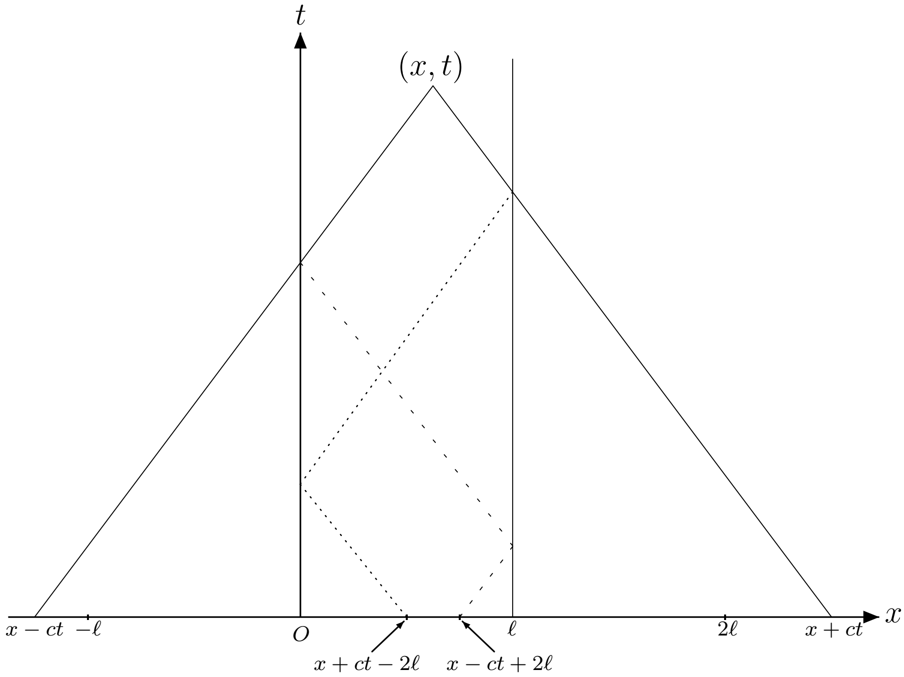
Σημειώνουμε ακόμη ότι χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο ιδιότητες της $\varphi_{\text{επεκ.}}$, διαπιστώνουμε εύκολα ότι η $\varphi_{\text{επεκ.}}$ είναι επίσης περιττή ως προς το ℓ, δηλαδή $\varphi_{\text{επεκ.}}(\ell + x) = -\varphi_{\text{επεκ.}}(\ell - x)$, για κάθε πραγματικό x. Πράγματι, έχουμε

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(\ell + x) = -\varphi_{\text{επεκ.}}(-\ell - x) = -\varphi_{\text{επεκ.}}(2\ell - \ell - x) = -\varphi_{\text{επεκ.}}(\ell - x).$$

Σημειώνουμε ότι για λόγους συμβατότητας των δεδομένων του προβλήματος (2.17) έχουμε $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ και $\varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0$. Συνεπώς $\varphi_{\text{επεκ.}}(-\ell) = \varphi_{\text{επεκ.}}(\ell)$. Επεκτείνουμε κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο και τη συνάρτηση ψ, και συμβολίζουμε με $\psi_{\text{επεκ.}}$ τη συνάρτηση που προκύπτει. Έστω τώρα u η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t \ge 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi_{\text{επεκ.}} & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(\cdot, 0) = \psi_{\text{επεκ.}} & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Η $u(\cdot, t)$ είναι περιττή, άρα $u(0,t) = 0$, και περιοδική με περίοδο 2ℓ, συνεπώς $u(\ell + x, t) = u(-\ell + x, t) = -u(\ell - x, t)$, οπότε $u(\ell, t) = 0$. Ο περιορισμός v της



Σχήμα 2.9: Ανάκλαση κυμάτων· σχηματική εξήγηση του τύπου (2.22).

u στο $[0,\ell]\times[0,\infty)$ είναι τότε λύση του προβλήματος (2.17). Συνεπώς, κατά τα γνωστά,

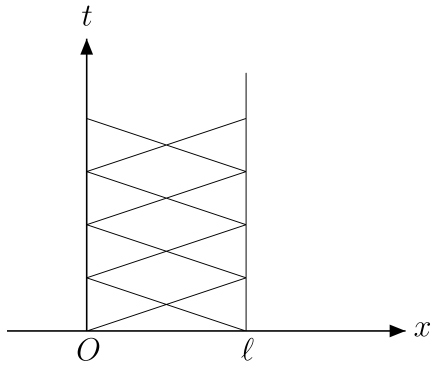
$$v(x,t)=\frac{1}{2}\big[\varphi_{\text{επεκ.}}(x+ct)+\varphi_{\text{επεκ.}}(x-ct)\big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\,d\tau, \qquad 0\le x\le\ell,\ t\ge 0. \tag{2.21}$$

Αν τώρα θελήσουμε να εκφράσουμε το δεξιό μέλος της (2.21) συναρτήσει των φ και ψ μόνο, θα δούμε ότι ο τύπος που θα πάρουμε δεν είναι ο ίδιος για όλα τα σημεία (x,t). Φερ' ειπείν, για ένα σημείο (x,t) του Σχήματος 2.9 έχουμε

$$\begin{aligned} v(x,t)=&\frac{1}{2}\big[\varphi(x+ct-2\ell)+\varphi(x-ct+2\ell)\big]\\ &+\frac{1}{2c}\Big[\int_{x-ct}^{x-ct+2\ell}\psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\,d\tau+\int_{x-ct+2\ell}^{x+ct}\psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\,d\tau\Big]. \end{aligned}$$

Τώρα από τον τρόπο που επεκτείναμε την ψ είναι εύκολο να δούμε ότι το ολοκλήρωμά της σε κάθε διάστημα μήκους 2ℓ μηδενίζεται. Έτσι ο ανωτέρω τύπος γράφεται στη μορφή

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\big[\varphi(x-ct+2\ell)+\varphi(x+ct-2\ell)\big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct+2\ell}^{x+ct}\psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\,d\tau.$$



Σχήμα 2.10: Στα τρίγωνα και τους ρόμβους του σχήματος, που σχηματίζονται από το σύνορο και τις χαρακτηριστικές γραμμές, διαφορετικοί τύποι μας δίνουν τη λύση του προβλήματος (2.17).

Τώρα,

$$\int_{x-ct+2\ell}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\, d\tau = \int_{x+ct-2\ell}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\, d\tau - \int_{x+ct-2\ell}^{x-ct+2\ell} \psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\, d\tau.$$

Όπως προηγουμένως, το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος μηδενίζεται, οπότε

$$\int_{x-ct+2\ell}^{x+ct} \psi_{\text{επεκ.}}(\tau)\, d\tau = -\int_{x+ct-2\ell}^{x-ct+2\ell} \psi(\tau)\, d\tau.$$

Συνολικά επομένως έχουμε έχουμε

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-ct+2\ell) + \varphi(x+ct-2\ell)\big] - \frac{1}{2c}\int_{x+ct-2\ell}^{x-ct+2\ell} \psi(s)\, ds. \tag{2.22}$$

Σε κάθε έναν από τους ρόμβους και τα τρίγωνα του Σχήματος 2.10, που σχηματίζονται από τα σύνορα και τις χαρακτηριστικές γραμμές, έχουμε διαφορετική μορφή του τύπου (2.22).

Η διαδικασία που περιγράψαμε είναι αρκετά πολύπλοκη, αν θέλει κανείς να δώσει τη λύση σε μορφή ανάλογη του τύπου (2.22). Αργότερα θα γνωρίσουμε και άλλους τρόπους παραστάσεως της λύσεως.

2.4 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση

Έστω $f : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ και $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Θεωρούμε τότε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών για μια μη ομογενή κυματική εξίσωση: Ζητείται μια ομαλή συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \text{στο } \mathbb{R} \times [0, \infty) \tag{2.23i}$$

και

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = \varphi & \text{στον } \mathbb{R}, \\ u_t(\cdot, 0) = \psi & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.23ii}$$

Το πρόβλημα (2.23) περιγράφει την ταλάντωση μιας άπειρης χορδής με δεδομένη θέση και ταχύτητα στη χρονική στιγμή $t = 0$, όταν η εξασκούμενη *εξωτερική δύναμη* στο σημείο x τη χρονική στιγμή t είναι $f(x, t)$.

Μοναδικότητα. Έστω u_1 και u_2 λύσεις του προβλήματος (2.23). Τότε η $v := u_1 - u_2$ είναι προφανώς λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & \text{στο } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ v(\cdot, 0) = v_t(\cdot, 0) = 0 & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το πρόβλημα (2.24) έχει ακριβώς μία λύση, τη $v = 0$. Συνεπώς $u_1 = u_2$.

Θεώρημα 2.1 (Λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση.) *Αν το πρόβλημα* (2.23) *έχει μια λύση* u, *τότε αυτή δίνεται από τη σχέση*

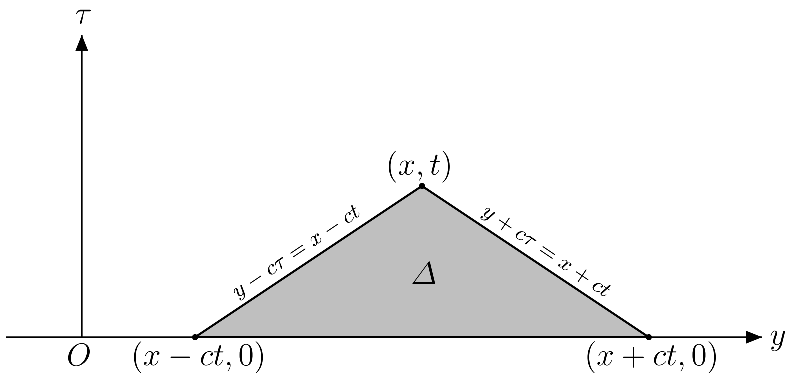
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2c}\iint\limits_{\varDelta} f\,, \tag{2.25}$$

όπου $\varDelta$ *το χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου* (x, t), *που φαίνεται στο Σχήμα* 2.11.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, σημειώνουμε ότι το διπλό ολοκλήρωμα στη (2.25) είναι το μόνο σημείο σε αυτόν τον τύπο, στο οποίο υπεισέρχεται ο μη ομογενής όρος f. Το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται και στη μορφή

$$\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\, dy\, d\tau.$$

Η επιρροή της f στη λύση u σε ένα σημείο (x, t) δίνεται δηλαδή από το ολοκλήρωμα της f στο πεδίο εξαρτήσεως του σημείου αυτού.



Σχήμα 2.11: Χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x,t).

Σημειώνουμε επίσης ότι, αν u^1 και u^2 είναι λύσεις των προβλημάτων

(2.26i) $$u^1_{tt} = c^2 u^1_{xx} \quad \text{στο } \mathbb{R}\times[0,\infty)$$

(2.26ii) $$\begin{cases} u^1(\cdot,0)=\varphi & \text{στον } \mathbb{R},\\ u^1_t(\cdot,0)=\psi & \text{στον } \mathbb{R},\end{cases}$$

και

(2.27i) $$u^2_{tt} = c^2 u^2_{xx} + f(x,t) \qquad \text{στο } \mathbb{R}\times[0,\infty),$$

(2.27ii) $$u^2(\cdot,0) = u^2_t(\cdot,0) = 0 \qquad \text{στον } \mathbb{R},$$

τότε η λύση u του προβλήματος (2.23) είναι προφανώς το άθροισμα των u^1 και u^2, $u=u^1+u^2$.

Παρατήρηση 2.3 (Λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση, στην περίπτωση μηδενικών αρχικών τιμών.) Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα ανωτέρω και τη (2.11), σύμφωνα με την οποία

$$u^1(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)\,d\tau,$$

συμπεραίνουμε αμέσως ότι το Θεώρημα 2.1 είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι αν το πρόβλημα (2.27) έχει μια λύση u^2, τότε

(2.28) $$u^2(x,t) = \frac{1}{2c}\iint\limits_{\Delta} f\,,$$

όπου Δ το χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x,t), βλ. το Σχήμα 2.11. $\square$

Αρχή του Duhamel. Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, η λύση u^2 του προβλήματος αρχικών τιμών (2.27) για τη μη ομογενή κυμματική εξίσωση δίνεται από τη σχέση

$$u^2(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Θα γράψουμε αυτή τη σχέση στη συνέχεια λίγο διαφορετικά, στη μορφή που είναι γνωστή ως αρχή του Duhamel. Αρχίζουμε συμβολίζοντας με $w(\tau;x,t)$ την τιμή στο σημείο (x,t) της λύσης του ακολούθου προβλήματος αρχικών τιμών για την *ομογενή* κυματική εξίσωση

$$\begin{cases} w_{tt}(\tau;\cdot,\cdot) = c^2 w_{xx}(\tau;\cdot,\cdot) & \text{στο } \mathbb{R}\times(\tau,\infty),\\ w(\tau;\cdot,\tau) = 0 & \text{στον } \mathbb{R},\\ w_t(\tau;\cdot,\tau) = f(\cdot,\tau) & \text{στον } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Τονίζουμε ότι σε αυτή τη σχέση οι αρχικές συνθήκες δίνονται στη χρονική στιγμή $t=\tau$, σε αντιδιαστολή με ό,τι συνέβαινε μέχρι τώρα που ξεκινούσαμε πάντα από τη χρονική στιγμή μηδέν, και ακόμα ότι ο μη ομογενής όρος f υπεισέρχεται τώρα στα αρχικά δεδομένα. Αμέσως διαπιστώνουμε ότι

$$w(\tau;x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy,$$

βλ. τη (2.11). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η λύση u^2 του προβλήματος αρχικών τιμών (2.27) γράφεται και στη μορφή

$$u^2(x,t) = \int_0^t w(\tau;x,t)\,d\tau,$$

σχέση που αναφέρεται ως αρχή του Duhamel.

Θα αποδείξουμε τώρα το Θεώρημα 2.1 με δύο διαφορετικούς τρόπους.

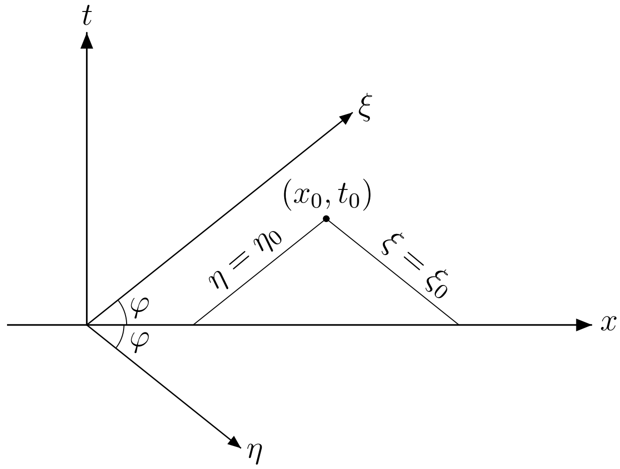
$1^{\underline{\eta}}$ *Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1* (Με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.)

Εισάγοντας τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές ξ και η ως συνήθως δια

$$\xi := x+ct, \quad \eta := x-ct,$$

και θέτοντας $U(\xi,\eta) := u(x,t)$, η εξίσωση (2.23i) γράφεται στη μορφή

$$-4c^2 U_{\xi\eta}(\xi,\eta) = f(x,t). \tag{2.29}$$



Σχήμα 2.12: Χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x_0, t_0).

Ολοκληρώνουμε τη (2.29) ως προς η, από η_0 έως ξ ($\xi = \eta$ είναι ο άξονας των x), και έχουμε

$$U_\xi(\xi,\xi) - U_\xi(\xi,\eta_0) = -\frac{1}{4c^2}\int_{\eta_0}^{\xi} f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})\,d\eta.$$

Τώρα, κατά τα γνωστά,

$$U_\xi(\xi,\eta) = \frac{1}{2c}u_t(x,t) + \frac{1}{2}u_x(x,t).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Παρατήρηση 2.3 θεωρούμε, για να απλοποιήσουμε κάπως τα πράγματα, το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.27). Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε φυσικά

$$U_\xi(\xi,\xi) = \frac{1}{2c}u_t(\xi,0) + \frac{1}{2}u_x(\xi,0) = 0,$$

οπότε, σύμφωνα με τα ανωτέρω,

$$U_\xi(\xi,\eta_0) = \frac{1}{4c^2}\int_{\eta_0}^{\xi} f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})\,d\eta.$$

Ολοκληρώνουμε αυτή τη σχέση ως προς ξ, από η_0 έως ξ_0, και έχουμε

$$U(\xi_0,\eta_0) - U(\eta_0,\eta_0) = \frac{1}{4c^2}\int_{\eta_0}^{\xi_0}\int_{\eta_0}^{\xi} f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})\,d\eta\,d\xi,$$

οπότε, λόγω του ότι $U(\xi_0,\eta_0) = u(x_0,t_0)$ και $U(\eta_0,\eta_0) = 0$,

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{4c^2}\int_{\eta_0}^{\xi_0}\int_{\eta_0}^{\xi} f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})\,d\eta\,d\xi. \tag{2.30}$$

Επιστρέφοντας τώρα στις μεταβλητές x, t,

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2c},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι η ολοκλήρωση γίνεται στο τρίγωνο εξάρτησης του (x_0, t_0) και η Ιακωβιανή J του μετασχηματισμού είναι

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix} \right| = 2c, \tag{2.31}$$

η (2.30) δίνει

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2c} \iint\limits_{\Delta} f(x,t)\, dx\, dt, \tag{2.32}$$

δηλαδή τη (2.28), γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Σημειώνουμε επίσης ότι η (2.32) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2c} \int_0^{t_0} \int_{x_0 - c(t_0 - t)}^{x_0 + c(t_0 - t)} f(x,t)\, dx\, dt. \qquad \square \tag{2.33}$$

$2\underline{\eta}$ *Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1* (Με το Θεώρημα του Green.)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Green, για δύο ομαλές συναρτήσεις P και Q ισχύει

$$\iint\limits_{\Delta} (P_x - Q_t)\, dt\, dx = \int_{\partial \Delta} (P\, dt + Q\, dx), \tag{2.34}$$

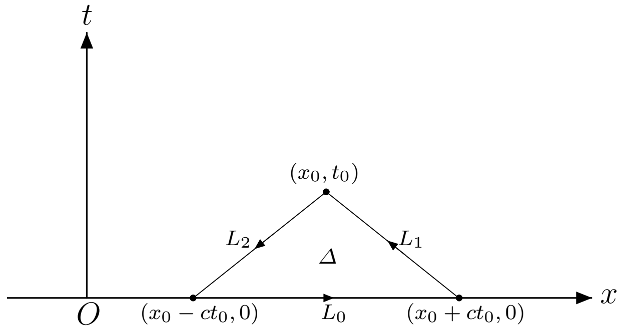
όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος λαμβάνεται σε φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου.

Ολοκληρώνοντας τη (2.23i) στο Δ και εφαρμόζοντας τη (2.34) έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,t)\, dt\, dx = \int_{\partial \Delta} (-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx). \tag{2.35}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Παρατήρηση 2.3, θεωρούμε πάλι, για να απλοποιήσουμε κάπως τα πράγματα, το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.27). Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε φυσικά

$$\int_{L_0} (-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx) = -\int_{L_0} u_t\, dx = 0, \tag{2.36i}$$



Σχήμα 2.13: Χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x_0, t_0).

βλ. το Σχήμα 2.13 για τον συμβολισμό. Τώρα στην L_1 έχουμε $x + ct = x_0 + ct_0$, επομένως $dx + cdt = 0$, οπότε

$$-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx = cu_x\, dx + cu_t\, dt = c\, du,$$

συνεπώς

$$\int_{L_1} (-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx) = c \int_{L_1} du = cu(x_0, t_0) - cu(x_0 + ct_0, 0),$$

και φυσικά για το πρόβλημα (2.27), το οποίο εξετάζουμε εδώ,

$$\int_{L_1} (-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx) = cu(x_0, t_0). \tag{2.36ii}$$

Ακριβώς αντίστοιχα έχουμε

$$\int_{L_2} (-c^2 u_x\, dt - u_t\, dx) = cu(x_0, t_0). \tag{2.36iii}$$

Από τις (2.35) και (2.36) έπεται αμέσως η (2.28), γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σημείωση. Στο Θεώρημα 2.1 υποθέσαμε ότι το πρόβλημα (2.23) έχει λύση u και αποδείξαμε ότι αυτή δίνεται τότε από τη σχέση (2.25). Για να είναι η συνάρτηση u που δίνεται από τη (2.25) όντως λύση, οπότε θα έχουμε και ύπαρξη λύσεως, αρκεί αυτή να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη· αυτό μπορεί να αποδειχθεί, αν υποθέσουμε ομαλότητα της f.

2.4.1 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση στην ημιευθεία

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση στην ημιευθεία: Έστω $f : [0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi,\psi : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις. Ζητείται μια ομαλή συνάρτηση $v : [0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + f(x,t), \quad x>0,\ t>0, \tag{2.37i}$$

τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x,0)=\varphi(x), & x\geq 0,\\ v_t(x,0)=\psi(x), & x\geq 0,\end{cases} \tag{2.37ii}$$

και την ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$v(0,t)=0, \quad t\geq 0. \tag{2.37iii}$$

Κατ' αρχάς η μοναδικότητα της λύσεως έπεται αμέσως από τη μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (2.14).

Για την ύπαρξη ομαλής λύσεως πρέπει φυσικά τα δεδομένα να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες συμβατότητας, φερ' ειπείν $\varphi(0)=\psi(0)=0,\ c^2\varphi''(0)+f(0,0)=0.$

Έχοντας ήδη μελετήσει το πρόβλημα (2.14), για να λύσουμε το πρόβλημα (2.37), αρκεί να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x,t), \qquad x>0,\ t>0, \tag{2.38i}$$

$$w(x,0)=w_t(x,0)=0, \quad x>0, \tag{2.38ii}$$

$$w(0,t)=0, \qquad t\geq 0. \tag{2.38iii}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η λύση του προβλήματος (2.38) δίνεται δια

$$w(x,t)=\frac{1}{2c}\iint\limits_D f(y,\tau)\,dy\,d\tau, \quad x,t\geq 0, \tag{2.39}$$

όπου D το γκρι μέρος του Σχήματος 2.8. Είναι βέβαια προφανές ότι η w που ορίζεται μέσω της (2.39) ικανοποιεί τις συνθήκες $w(x,0)=w(0,t)=0, x,t\geq 0.$ Ότι η w πληροί τη (2.38i) και τη $w_t(x,0)=0, x>0$, μπορεί να το δει κανείς εύκολα παραγωγίζοντας τη (2.39), αυτό όμως έπεται και από το γεγονός ότι η λύση του προβλήματος (2.27) δίνεται από τη (2.28), όπως διαπιστώνει κανείς πολύ εύκολα.

Θα εξετάσουμε τώρα σύντομα την περίπτωση μη ομογενούς συνοριακής συνθήκης. Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα

$$\text{(2.40}i\text{)} \qquad w_{tt} = c^2 w_{xx} + g(x,t), \quad x > 0,\ t > 0,$$

$$\text{(2.40}ii\text{)} \qquad \begin{cases} w(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ w_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{(2.40}iii\text{)} \qquad w(0,t) = h(t), \quad t \geq 0.$$

Υποθέτοντας ότι τα δεδομένα του προβλήματος (2.40) είναι συμβατά και θέτοντας

$$v(x,t) := w(x,t) - h(t),$$

βλέπουμε πολύ εύκολα ότι η v είναι λύση του προβλήματος

$$\text{(2.41}i\text{)} \qquad v_{tt} = c^2 v_{xx} + g(x,t) - h''(t), \quad x > 0,\ t > 0,$$

$$\text{(2.41}ii\text{)} \qquad \begin{cases} v(x,0) = \varphi(x) - h(0), & x \geq 0, \\ v_t(x,0) = \psi(x) - h'(0), & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{(2.41}iii\text{)} \qquad v(0,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

το οποίο είναι φυσικά της μορφής (2.37).

Παρατήρηση 2.4 (Εναλλακτική μορφή της (2.39).) Επεκτείνοντας την f περιττώς ως προς x,

$$f_{\text{περ.}}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0, \\ -f(-x,t), & x < 0, \end{cases}$$

(η $f_{\text{περ.}}$ μπορεί φυσικά να μην είναι συνεχής για $x = 0$) η (2.39) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\text{(2.42)} \qquad w(x,t) = \frac{1}{2c} \iint\limits_{\Delta} f_{\text{περ.}}(y,\tau)\, dy\, d\tau, \quad x,t \geq 0,$$

όπου Δ το χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x,t). □

2.4.2 Η μη ομογενής κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα: Έστω $f : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ ομαλές συναρτήσεις. Ζητείται μια ομαλή συνάρτηση $v : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \tag{2.43i}$$

τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le \ell, \end{cases} \tag{2.43ii}$$

και ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{2.43iii}$$

Η μοναδικότητα της λύσεως έπεται αμέσως από τη μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (2.17).

Για να υπάρχει ομαλή λύση πρέπει φυσικά τα δεδομένα να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες συμβατότητας, $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0, c^2\varphi''(0) + f(0,0) = c^2\varphi''(\ell) + f(\ell,0) = 0$.

Έχοντας ήδη μελετήσει το πρόβλημα (2.17), για να λύσουμε το (2.43), αρκεί να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα

$$w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < \ell,\ t > 0, \tag{2.44i}$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2.44ii}$$

$$w(0,t) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{2.44iii}$$

Επεκτείνουμε την f περιττά ως προς x στο διάστημα $(-\ell, 0)$ και στη συνέχεια επεκτείνουμε τη νέα συνάρτηση περιοδικά ως προς x με περίοδο 2ℓ σε όλο το $\mathbb{R}$. Ορίζουμε δηλαδή την (πιθανώς ασυνεχή για $x = n\ell,\ n \in \mathbb{Z}$) περιοδική ως προς x, με περίοδο 2ℓ, συνάρτηση $f_{\text{επεκ.}}$ δια

$$f_{\text{επεκ.}}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0, \\ -f(-x,t), & -\ell < x < 0,\ t \ge 0, \end{cases}$$

$$f_{\text{επεκ.}}(x+2\ell,t)=f_{\text{επεκ.}}(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μέχρι τώρα μελέτη μας σε αυτήν την παράγραφο, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η λύση του προβλήματος (2.44) δίνεται δια

$$w(x,t)=\frac{1}{2c}\iint\limits_{\Delta} f_{\text{επεκ.}}(y,\tau)\,dy\,d\tau,\quad 0<x<\ell,\ t\geq 0. \tag{2.45}$$

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια σύντομη αναφορά στην περίπτωση μη ομογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet. Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα

$$w_{tt}=c^2w_{xx}+g(x,t),\quad 0<x<\ell,\ t>0, \tag{2.46i}$$

$$\begin{cases} w(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq \ell,\\ w_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq \ell, \end{cases} \tag{2.46ii}$$

$$\begin{cases} w(0,t)=h(t), & t\geq 0,\\ w(\ell,t)=k(t), & t\geq 0. \end{cases} \tag{2.46iii}$$

Θέτοντας $v(x,t):=w(x,t)-\frac{1}{\ell}\big[(\ell-x)h(t)+xk(t)\big]$, διαπιστώνουμε αμέσως ότι η v λύνει το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών:

$$v_{tt}=c^2v_{xx}+g(x,t)-\frac{1}{\ell}\big[(\ell-x)h''(t)+xk''(t)\big],\quad 0<x<\ell,\ t>0, \tag{2.47i}$$

$$\begin{cases} v(x,0)=\varphi(x)-\dfrac{1}{\ell}\big[(\ell-x)h(0)+xk(0)\big], & 0\leq x\leq \ell,\\ w_t(x,0)=\psi(x)-\dfrac{1}{\ell}\big[(\ell-x)h'(0)+xk'(0)\big], & 0\leq x\leq \ell, \end{cases} \tag{2.47ii}$$

$$v(0,\ell)=v(\ell,t)=0,\quad t\geq 0. \tag{2.47iii}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα (2.46) ανάγεται σε ένα πρόβλημα της μορφής (2.44).

Στην κυματική εξίσωση θα επανέλθουμε αργότερα, όταν θα διαθέτουμε τις απαιτούμενες γνώσεις για να συνεχίσουμε τη μελέτη της.

Ασκήσεις

2.4 Έστω ότι οι αρχικές τιμές φ και ψ είναι άρτιες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι και η λύση u του προβλήματος αρχικών τιμών (2.6) είναι, για κάθε $t > 0$, άρτια συνάρτηση του x.

2.5 Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια άρτια ομαλή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $\varphi'(0) = 0$.

2.6 (Συνθήκη του Neumann.) Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση στην ημιευθεία: Ζητείται μια ομαλή συνάρτηση $v : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \tag{2.48i}$$

τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{2.48ii}$$

και την ομογενή συνοριακή συνθήκη του Neumann

$$v_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.48iii}$$

Αποδείξτε ότι οι συνθήκες $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ είναι αναγκαίες συνθήκες συμβατότητας για την ύπαρξη ομαλής λύσεως του προβλήματος (2.48). Επεκτείνετε τις συναρτήσεις φ και ψ κατά άρτιο τρόπο στον αρνητικό ημιάξονα, και δώστε μια παράσταση της λύσεως του προβλήματος (2.48), αντίστοιχη της (2.15) στην περίπτωση ομογενούς συνθήκης του Dirichlet.

2.7 (Μη ομογενής εξίσωση και συνθήκη του Neumann.) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + f(x,t), \quad x > 0,\ t > 0, \tag{2.49i}$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{2.49ii}$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.49iii}$$

όπου f, φ και ψ δεδομένες και συμβατές με το πρόβλημα ομαλές συναρτήσεις. Δώστε μια παράσταση της λύσεως του προβλήματος (2.49), αντίστοιχη της (2.42) στην περίπτωση ομογενούς συνθήκης του Dirichlet (και $\varphi = \psi = 0$).

2.8 (Μη ομογενής εξίσωση και μη ομογενής συνθήκη του Neumann.) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$w_{tt} = c^2 w_{xx} + g(x,t), \quad x > 0,\ t > 0, \tag{2.50i}$$

(2.50ii)
$$\begin{cases} w(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0,\\ w_t(x,0)=\psi(x), & x\ge 0,\end{cases}$$

(2.50iii)
$$w_x(0,t)=h(t),\quad t\ge 0,$$

όπου g,φ,ψ και h δεδομένες και συμβατές με το πρόβλημα ομαλές συναρτήσεις. Χρησιμοποιήστε την αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής

$$v(x,t):=w(x,t)-xh(t),\quad x\ge 0,\ t\ge 0,$$

για να αναγάγετε αυτό το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα της μορφής (2.49).

2.9 Θεωρούμε το πρόβλημα

(2.51i)
$$v_{tt}=c^2v_{xx},\quad 0<x<\ell,\ t>0,$$

(2.51ii)
$$\begin{cases} v(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le \ell,\\ v_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le \ell,\end{cases}$$

(2.51iii)
$$v_x(0,t)=v_x(\ell,t)=0,\quad t\ge 0.$$

i. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα (2.51) έχει το πολύ μία ομαλή λύση.

ii. Προσδιορίστε μια παράσταση της λύσεως v του προβλήματος (2.51), υποθέτοντας ότι ισχύουν κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας για τα δεδομένα φ και ψ του προβλήματος.

[*Υπόδειξη για το* ii: Ορίστε μια συνάρτηση $\varphi_{\text{επεκ.}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ως

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x):=\begin{cases}\varphi(x), & 0\le x\le \ell,\\ \varphi(-x), & -\ell<x<0,\end{cases}$$

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x+2\ell)=\varphi_{\text{επεκ.}}(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ορίστε κατ' αναλογίαν και τη συνάρτηση $\psi_{\text{επεκ.}}$.]

2.10 Θεωρούμε το πρόβλημα

(2.52i)
$$v_{tt}=c^2v_{xx}+f(x,t),\quad 0<x<\ell,\ t>0,$$

(2.52ii)
$$\begin{cases} v(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le \ell,\\ v_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le \ell,\end{cases}$$

(2.52iii) $$v_x(0,t) = v_x(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Υποθέτοντας ότι ισχύουν κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας για τα δεδομένα, προσδιορίστε μια παράσταση της λύσεως u του προβλήματος (2.52).

2.11 Θεωρούμε το πρόβλημα

(2.53i) $$w_{tt} = c^2 w_{xx} + g(x,t), \quad 0 < x < \ell, \; t > 0,$$

(2.53ii) $$\begin{cases} w(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ w_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

(2.53iii) $$\begin{cases} w_x(0,t) = h(t), & t \geq 0, \\ w_x(\ell,t) = k(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου g, φ, ψ, h και k δεδομένες ομαλές και συμβατές με το πρόβλημα συναρτήσεις.

Χρησιμοποιήστε κατάλληλη αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής για να αναγάγετε αυτό το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα της μορφής (2.52).

[*Υπόδειξη*: $v(x,t) := w(x,t) - \big[xh(t) + \frac{x^2}{2\ell}\big(k(t) - h(t)\big)\big]$.]

2.12 Αν τα αρχικά δεδομένα φ και ψ είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο ℓ, αποδείξτε ότι και η λύση u του προβλήματος (2.6) είναι, για κάθε $t \geq 0$, περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο ℓ.

2.13 Αν τα αρχικά δεδομένα φ και ψ είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο ℓ, και ο μη ομογενής όρος f είναι, για κάθε $t \geq 0$, περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο ℓ, αποδείξτε ότι και η λύση u του προβλήματος (2.23) είναι, για κάθε $t \geq 0$, περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο ℓ.

2.14 Θεωρούμε το πρόβλημα

(2.54i) $$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \; t > 0,$$

(2.54ii) $$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

(2.54iii) $$v(0,t) = v_x(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

i. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα (2.54) έχει το πολύ μία ομαλή λύση.

ii. Προσδιορίστε μια παράσταση της λύσεως u του προβλήματος (2.54), υποθέτοντας ότι ισχύουν κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας για τα δεδομένα φ, ψ του προβλήματος.

2.15 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \tag{2.55i}$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le \ell, \end{cases} \tag{2.55ii}$$

$$v(0,t) = v_x(\ell,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{2.55iii}$$

Υποθέτοντας ότι ισχύουν κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας για τα δεδομένα, προσδιορίστε μια παράσταση της λύσεως u του προβλήματος (2.55).

2.16 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + g(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \tag{2.56i}$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le \ell, \end{cases} \tag{2.56ii}$$

$$\begin{cases} v_x(0,t) = h(t), & t \ge 0, \\ v_x(\ell,t) = k(t), & t \ge 0, \end{cases} \tag{2.56iii}$$

όπου g, φ, ψ, h και k δεδομένες ομαλές και συμβατές με το πρόβλημα συναρτήσεις.

Χρησιμοποιήστε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών, για να αναγάγετε αυτό το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα της μορφής (2.55).

2.17 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + xt, & x \in \mathbb{R},\ t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.18 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \mathrm{e}^{ax}, & x \in \mathbb{R},\ t \ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου a μια πραγματική σταθερά, $a \in \mathbb{R}$.

2.19 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos x, & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 1 + x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.20 Προσδιορίστε την τιμή της λύσεως u του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \mathrm{e}^x, & 0 < x < 1,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

2.21 Έστω $\varphi \in C^1[0,1]$.

$i.$ Αν $\varphi(0) = 0$, αποδείξτε ότι

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sqrt{2}\, \|\varphi\|^{1/2}\, \|\varphi'\|^{1/2},$$

όπου $\|\psi\| := \big(\int_0^1 |\psi(x)|^2\, dx\big)^{1/2}$.

[*Υπόδειξη*: $\big(\varphi(x)\big)^2 = 2\int_0^x \varphi(y)\, \varphi'(y)\, dy$.]

$ii.$ Αν $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, βελτιώστε την ανωτέρω ανισότητα σε

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|^{1/2}\, \|\varphi'\|^{1/2}.$$

2.22 Αν $\varphi \in C^1[0,1]$ και $\varphi(0) = 0$, αποδείξτε ότι

$$\|\varphi\| \leq 2\|\varphi'\|.$$

2.23 (Συνεχής εξάρτηση της λύσεως του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση από τα αρχικά δεδομένα.) Έστω u και v οι λύσεις των ακολούθων προβλημάτων:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < 1,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = h(t), & t \geq 0, \\ u(1,t) = k(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + f(x,t), & 0 < x < 1,\ t \geq 0, \\ v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ v(0,t) = h(t), & t \geq 0, \\ v(1,t) = k(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

i. Αποδείξτε ότι

$$\|u_x(\cdot,t) - v_x(\cdot,t)\| \leq \|\psi - \tilde{\psi}\| + \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|, \quad t \geq 0.$$

ii. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \geq 0$,

$$\max_{0\leq x\leq 1} |u(x,t) - v(x,t)| \leq \sqrt{2}\big[\|\psi - \tilde{\psi}\| + \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|\big].$$

2.24 (Το Λήμμα του Gronwall)

i. Έστω $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [0,T]$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$. Τότε ισχύει

$$\varphi(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta t} \quad \forall t \in [0,T].$$

[*Υπόδειξη*: Για $\varepsilon > 0$, έστω $\psi(t) := (\alpha + \varepsilon)\mathrm{e}^{\beta t}$. Τότε

$$\psi(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \quad \text{και} \quad \varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t \in [0,T].\,]$$

ii. Έστω $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\varphi'(t) \leq \alpha + \beta\varphi(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

όπου α μη αρνητική σταθερά και β θετική σταθερά. Τότε ισχύει

$$\varphi(t) \leq [\varphi(0) + T\alpha]\mathrm{e}^{\beta t} \quad \forall t \in [0,T].$$

2.25 (Συνεχής εξάρτηση της λύσεως του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση από τον μη ομογενή όρο.) Έστω u η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < 1,\ 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι

$$\frac{d}{dt}\big[\|u_t(\cdot,t)\|^2 + c^2\|u_x(\cdot,t)\|^2\big] \le \|f(\cdot,t)\|^2 + \|u_t(\cdot,t)\|^2 + c^2\|u_x(\cdot,t)\|^2$$

και

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2 + c^2\|u_x(\cdot,t)\|^2 \le \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\|f(\cdot,\tau)\|^2\,d\tau, \quad 0 \le t \le T.$$

2.26 Προσδιορίστε τη γενική λύση της υπερβολικής εξίσωσης

$$u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0$$

με τρεις τρόπους, ακολουθώντας όσα αναφέρονται στη συνέχεια:

○ Γράψτε κατ' αρχάς την εξίσωση στη μορφή $(\partial_t - 2\partial_x)^2 u - 3u_{xx} = 0$ και χρησιμοποιήστε εν συνεχεία την αλλαγή μεταβλητών

$$t = \xi, \quad x = -2\xi + \sqrt{3}\eta$$

και $U(\xi,\eta) := u(x,t)$ για να την αναγάγετε σε μορφή κυματικής εξίσωσης $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$, βλ. την Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.

○ Λόγω του ότι $\tau^2 - 4\tau\sigma + \sigma^2 = \big(\tau - (2+\sqrt{3})\sigma\big)\big(\tau - (2-\sqrt{3})\sigma\big)$, η αρχική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\big(\partial_t - (2+\sqrt{3})\partial_x\big)\big(\partial_t - (2-\sqrt{3})\partial_x\big)u = 0.$$

- Επιλύστε τις εξισώσεις

$$v_t - (2+\sqrt{3})v_x = 0 \quad \text{και} \quad u_t - (2-\sqrt{3})u_x = v\,,$$

  βλ. την πρώτη Απόδειξη της Πρότασης 2.1. Ποιες είναι οι οικογένειες των χαρακτηριστικών γραμμών της αρχικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως;

- Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών

$$\xi = x + (2+\sqrt{3})t, \quad \eta = x + (2-\sqrt{3})t$$

  και $U(\xi,\eta) := u(x,t)$, και γράψτε την εξίσωση στη μορφή $U_{\xi\eta} = 0$, βλ. τη δεύτερη Απόδειξη της Πρότασης 2.1.

2.27 Χρησιμοποιήστε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0$, βλ. την Άσκηση 2.26, για να προσδιορίσετε μια παράσταση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0 & \text{στο } \mathbb{R}\times(0,\infty),\\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στον } \mathbb{R},\\ u_t(\cdot,0) = \psi & \text{στον } \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου φ και ψ δεδομένες ομαλές συναρτήσεις.

2.28

- Έστω u λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Αποδείξτε ότι

  $$u(x+ch, t+k) + u(x-ch, t-k) = u(x+ck, t+h) + u(x-ck, t-h),$$

  για κάθε $x, t, h, k \in \mathbb{R}$, βλ. και την Άσκηση 2.2. Λόγω ακριβώς αυτής της σχέσεως λέμε ότι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης έχουν την *ιδιότητα του παραλληλογράμμου* (γιατί;).

- Αποδείξτε ότι, αντίστροφα, κάθε δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση u, η οποία έχει την ιδιότητα του παραλληλογράμμου, αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης.

  [*Υπόδειξη*: Αναπτύξτε κατά Taylor, μέχρι και όρους δεύτερης τάξεως, κάθε όρο στην ιδιότητα του παραλληλογράμμου και εν συνεχεία αφήστε τα k και h να τείνουν στο μηδέν. Οι πράξεις διευκολύνονται σε σημαντικό βαθμό, αν επιλέξουμε είτε $k = 0$ είτε $h = 0$.]

3. Η εξίσωση της θερμότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την εξίσωση της θερμότητας σε μία (χωρική) διάσταση. Η διάδοση της θερμότητας γίνεται κατά τρόπο ουσιαστικά διαφορετικό από τη διάδοση των κυμάτων, γεγονός το οποίο αντανακλάται και στις μαθηματικές ιδιότητες των δύο εξισώσεων, οι οποίες δεν παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες. Σημειώνουμε επίσης ότι η ίδια εξίσωση, που περιγράφει τη διάδοση της θερμότητας, περιγράφει επίσης και τη διάχυση ορισμένων χημικών ουσιών. Η εξίσωση της θερμότητας σε μία χωρική διάσταση έχει τη μορφή

$$u_t = k u_{xx}, \tag{3.1}$$

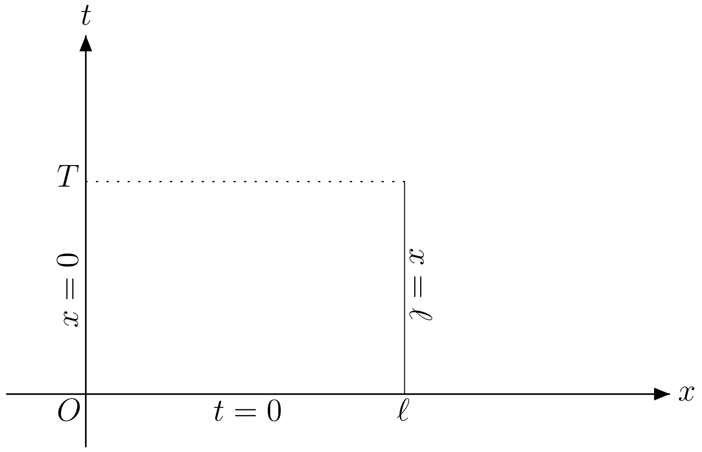
όπου k μια *θετική* σταθερά.

3.1 Η αρχή του μεγίστου

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες λύσεων της εξισώσεως της θερμότητας είναι ότι για αυτές ισχύει η λεγόμενη *αρχή του μεγίστου*. Υπάρχουν δύο μορφές αυτής της αρχής, η *ασθενής* και η *ισχυρά* μορφή. Η ασθενής μορφή αποδεικνύεται πολύ ευκολότερα και ήδη από αυτή απορρέουν οι βασικότερες ιδιότητες των λύσεων.

Θεώρημα 3.1 (Αρχή του μεγίστου, ασθενής μορφή.) *Έστω $\ell, T > 0$ και $u : [0,\ell] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, λύση της εξισώσεως* (3.1) *στο* $(0,\ell) \times (0,T]$. *Τότε η u λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο ορθογώνιο $[0,\ell] \times [0,T]$ και σε μια από τις τρεις πλευρές $\{(x,0) : 0 \le x \le \ell\}$, $\{(0,t) : 0 \le t \le T\}$ και $\{(\ell,t) : 0 \le t \le T\}$ του ορθογωνίου.*

Απόδειξη. Έστω M το μέγιστο της u στις τρεις πλευρές που αναφέρονται στο θεώρημα (γιατί υπάρχει μέγιστο;). Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε τότε είναι



Σχήμα 3.1: Λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας λαμβάνουν το μέγιστό τους στο ορθογώνιο $[0, \ell] \times [0, T]$ και σε μια από τις τρεις πλευρές του που σχεδιάστηκαν με συνεχή γραμμή.

ότι

$$u(x,t) \le M, \quad 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T. \tag{3.2}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση v δια $v(x,t) := u(x,t) + \varepsilon x^2$. Θα αποδείξουμε ότι

$$v(x,t) \le M + \varepsilon \ell^2, \quad 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T. \tag{3.3}$$

Πριν αποδείξουμε την (3.3), σημειώνουμε ότι από αυτή έπεται αμέσως ότι

$$u(x,t) \le M + \varepsilon(\ell^2 - x^2), \quad 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T. \tag{3.4}$$

Η (3.4) ισχύει για όλα τα θετικά ε και έτσι συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (3.2). Απομένει συνεπώς να αποδείξουμε την (3.3). Για τη v ισχύει προφανώς

$$v_t - kv_{xx} = u_t - k(u + \varepsilon x^2)_{xx} = u_t - ku_{xx} - 2\varepsilon k,$$

συνεπώς

$$v_t - kv_{xx} = -2\varepsilon k < 0. \tag{3.5}$$

Τώρα η v δεν λαμβάνει το μέγιστό της στο $\{(x,t) : 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T\}$ σε ένα σημείο (x_0, t_0) τέτοιο ώστε $0 < x_0 < \ell,\ 0 < t_0 < T$. Πράγματι, αν συνέβαινε αυτό, τότε θα ίσχυε

$$v_t(x_0,t_0) = 0,\ v_{xx}(x_0,t_0) \le 0,$$

γεγονός το οποίο αντίκειται στην (3.5). Έστω τώρα ότι η v λαμβάνει το μέγιστό της στο $\{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T\}$ σε ένα σημείο $(x_0, T),\ 0 < x_0 < \ell$. Τότε θα ίσχυε

$$v_x(x_0, T) = 0,\ v_{xx}(x_0, T) \leq 0.$$

Επί πλέον επειδή, σύμφωνα με τα ανωτέρω, $v(x_0, T) \geq v(x_0, T - \delta), \delta > 0$, θα είχαμε τότε

$$v_t(x_0, T) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{v(x_0, T) - v(x_0, T - \delta)}{\delta} \geq 0.$$

Συνολικά δηλαδή και σε αυτήν την περίπτωση

$$v_t(x_0, T) \geq 0,\ v_{xx}(x_0, T) \leq 0,$$

γεγονός που πάλι αντίκειται στην (3.5). Επομένως η v λαμβάνει το μέγιστό της στο ορθογώνιο $\{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T\}$ αναγκαστικά σε μια των πλευρών του $\{(x,0) : 0 \leq x \leq \ell\}$, $\{(0,t) : 0 \leq t \leq T\}$ ή $\{(\ell,t) : 0 \leq t \leq T\}$. Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν τους ορισμούς των M και v διαπιστώνουμε αμέσως ότι και στις τρεις αυτές πλευρές ισχύει $v(x,t) \leq M + \varepsilon\ell^2$, και συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (3.3). Κατ' αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 3.1 (Κίνητρο για την εισαγωγή της βοηθητικής συνάρτησης.) Ο λόγος για τον οποίον εισαγάγαμε τη βοηθητική συνάρτηση v στην προηγούμενη απόδειξη είναι ο εξής: Έστω ότι η u λαμβάνει το μέγιστό της, στο ορθογώνιο που εξετάζουμε, σε ένα εσωτερικό του σημείο (x_0, t_0). Τότε θα ίσχυε

$$u_t(x_0, t_0) = 0,\ u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0.$$

Αν γνωρίζαμε ότι $u_{xx}(x_0, t_0) \neq 0$, τότε θα οδηγούμεθα στο συμπέρασμα ότι η u δεν ικανοποιεί την (3.1) στο σημείο (x_0, t_0). Για τη v όμως, ήδη το γεγονός ότι

$$v_t(x_0, t_0) = 0,\ v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$$

μας οδηγεί σε άτοπο, διότι για τη v ισχύει η (3.5). □

Παρατήρηση 3.2 (Αρχή του μεγίστου, ισχυρά μορφή.) Η ισχυρά μορφή της αρχής του μεγίστου λέει ότι αν μια λύση u της (3.1) λαμβάνει το μέγιστό της στο ορθογώνιο $\{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T\}$ και σε ένα σημείο του ορθογώνιου, το οποίο δεν βρίσκεται σε μια από τις τρεις πλευρές του $\{(x,0) : 0 \leq x \leq \ell\}$, $\{(0,t) : 0 \leq t \leq T\}$, $\{(\ell,t) : 0 \leq t \leq T\}$, τότε η u είναι *σταθερά* σε όλο το ορθογώνιο που εξετάζουμε. □

Παρατήρηση 3.3 (Αρχή του “ελαχίστου”.) Αντικαθιστώντας τη λέξη μέγιστο με τη λέξη ελάχιστο στην αρχή του μεγίστου, οδηγούμεθα στην αρχή του “ελαχίστου”, τόσο στην ασθενή όσο και στην ισχυρά μορφή της. Η αρχή του “ελαχίστου” έπεται αμέσως από την αρχή του μεγίστου, αφού όταν η u είναι λύση της (3.1), τότε και η $-u$ ικανοποιεί την ίδια εξίσωση. □

Σημείωση. Η φυσική σημασία των αρχών μεγίστου και “ελαχίστου” είναι προφανής.

Μοναδικότητα. Ως μια πρώτη εφαρμογή της αρχής του μεγίστου αναφέρουμε τη μοναδικότητα ομαλής λύσεως του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα:

$$u_t = ku_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t \geq 0, \tag{3.6i}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{3.6ii}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = g(t), & t \geq 0, \\ u(\ell,t) = h(t), & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.6iii}$$

Πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (3.6) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ v(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

έχει ως μόνη ομαλή λύση την τετριμμένη, $v = 0$.

Τώρα, σύμφωνα με την αρχή του μεγίστου, για τυχόν $T > 0$ και για κάθε λύση v του προβλήματος (3.7) ισχύει $v(x,t) \leq 0,\ 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T$. Ομοίως, σύμφωνα με την αρχή του “ελαχίστου”, έχουμε $v(x,t) \geq 0,\ 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T$. Επομένως $v(x,t) = 0,\ 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T$, και επειδή το T είναι τυχαίος θετικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι $v = 0$.

Συνεχής εξάρτηση της λύσεως από τα αρχικά δεδομένα. Θεωρούμε το πρόβλημα: Ζητείται συνεχής συνάρτηση $v : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Σύμφωνα με την αρχή του μεγίστου έχουμε, για $t \geq 0$,

$$v(x,t) \leq \max_{0\leq x\leq \ell} |\varphi(x)|,$$

και σύμφωνα με την αρχή του "ελαχίστου"

$$v(x,t) \geq -\max_{0\leq x\leq \ell} |\varphi(x)|.$$

Συνολικά συνεπώς

$$\max_{0\leq x\leq \ell} |v(x,t)| \leq \max_{0\leq x\leq \ell} |\varphi(x)|, \quad t \geq 0. \tag{3.9}$$

Από τα ανωτέρω έπεται αμέσως ότι, αν u_1 και u_2 είναι ομαλές λύσεις των προβλημάτων

$$u_t = ku_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t \geq 0, \tag{3.10i}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{3.10ii}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = g(t), & t \geq 0, \\ u(\ell,t) = h(t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.10iii}$$

και

$$u_t = ku_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t \geq 0, \tag{3.11i}$$

$$u(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{3.11ii}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = g(t), & t \geq 0, \\ u(\ell,t) = h(t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.11iii}$$

αντίστοιχα, τότε

$$\max_{0\leq x\leq \ell} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{0\leq x\leq \ell} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|, \quad t \geq 0. \tag{3.12}$$

Ασκήσεις

3.1 (Ευστάθεια της λύσεως του προβλήματος (3.8) στην L^2 νόρμα.) Αποδείξτε ότι, αν v ομαλή λύση του προβλήματος (3.8), τότε

$$\|v(\cdot,t)\| \le \|\varphi\|, \quad t \ge 0, \tag{3.13}$$

όπου $\|\psi\| := \big(\int_0^\ell |\psi(x)|^2\,dx\big)^{1/2}$. Συγκρίνετε την (3.13) με την (3.9).
[*Υπόδειξη*: Πολλαπλασιάστε τη διαφορική εξίσωση στην (3.8) επί v και ολοκληρώστε στο δεξιό μέλος κατά μέρη.]

Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\|f\| \le \ell\|f'\|$, για $f \in C^1[0,\ell]$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$, βλ. και τις Ασκήσεις 2.21 και 2.22, για να βελτιώσετε την (3.13) στη μορφή

$$\|v(\cdot,t)\| \le \mathrm{e}^{-\frac{k}{\ell^2}t}\|\varphi\|, \quad t \ge 0.$$

3.2 (Συνεχής εξάρτηση της λύσεως από τον μη ομογενή όρο.) Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx} + f(x,t), & 0 < x < \ell,\ t > 0,\\ v(x,0) = 0, & 0 \le x \le \ell,\\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Αποδείξτε ότι, αν v ομαλή συνάρτηση, τότε

$$\|v(\cdot,t)\| \le \mathrm{e}^{t/2}\Big(\int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2\,ds\Big)^{1/2}.$$

Η $\|\cdot\|$ έχει την ίδια έννοια όπως στην προηγούμενη Άσκηση.

Βελτιώστε την ανωτέρω εκτίμηση στη μορφή

$$\|v(\cdot,t)\| \le \frac{\ell}{\sqrt{2k}}\Big(\int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2\,ds\Big)^{1/2}.$$

3.3 (Εναλλακτική απόδειξη της αρχής του μεγίστου.)

α) Για $p \ge 1$, ορίζουμε στον $C[0,\ell]$ τις νόρμες $\|\cdot\|_p$ δια

$$\|\psi\|_p := \Big(\int_0^\ell |\psi(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \|\psi\|_p = \max_{0\le x\le \ell} |\psi(x)|.$$

[*Υπόδειξη*: Έστω $M := \max_{0\le x\le \ell} |\psi(x)|$ και $x^\star \in [0,\ell]$ τέτοιο ώστε $M = |\psi(x^\star)|$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ και υποδιάστημα I του $[0,\ell]$, μήκους δ, τέτοιο ώστε $x^\star \in I$ και

$$\forall x \in I \quad |\psi(x)| \ge M - \varepsilon.$$

Επομένως,

$$\delta^{1/p}(M-\varepsilon) \le \|\psi\|_p \le (b-a)^{1/p}M.$$

Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\delta^{1/p} \to 1$ και $(b-a)^{1/p} \to 1$, καθώς το p τείνει στο άπειρο, για να αποδείξετε ότι υπάρχει p_0 τέτοιο ώστε, για $p \ge p_0$, να ισχύει

$$(M-2\varepsilon) \le \|\psi\|_p \le M+\varepsilon.]$$

β) Πολλαπλασιάστε τη διαφορική εξίσωση στην (3.8) επί $\big(v(x,t)\big)^{2n-1}$, ολοκληρώστε στο δεξιό μέλος κατά μέρη, και χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να δώσετε μια άλλη απόδειξη της (3.9), για αρκετά ομαλή v.

3.4 Έστω u ομαλή λύση της γενικής γραμμικής παραβολικής εξισώσεως

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u$$

στο $[0,\ell]\times[0,T]$, όπου $\min_{x,t} a(x,t) > 0$.

i. Αν $c(x,t) < 0$ στο $[0,\ell]\times[0,T]$, αποδείξτε ότι

$$|u(x,t)| \le \max\{|u(y,\tau)| :\ 0\le y\le \ell,\ 0\le\tau\le T \ \text{ και } \ y=0 \text{ ή } y=\ell \text{ ή } \tau=0\}.$$

[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε ότι η u δεν λαμβάνει το μέγιστό της στο $[0,\ell]\times[0,T]$ στο εσωτερικό του ή στην πλευρά $\{(x,T) :\ 0<x<\ell\}$ εκτός εάν το μέγιστο στο $[0,\ell]\times[0,T]$ είναι μη θετικό.]

ii. Αποδείξτε ότι

$$|u(x,t)| \le \mathrm{e}^{Ct}\max\{|u(y,\tau)| :\ 0\le y\le \ell,\ 0\le\tau\le T \quad \text{και} \quad y=0 \text{ ή } y=\ell \text{ ή } \tau=0\},$$

όπου $C := \max(0, \max c)$.

[*Υπόδειξη*: Θέστε $v := \mathrm{e}^{-\gamma t}u$, όπου $\gamma > C$, και εφαρμόστε το *i.* στη v.]

3.2 Η εξίσωση της θερμότητας σε όλο το $\mathbb{R}$

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας σε όλη την πραγματική ευθεία

$$u_t = k u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.15i}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.15ii}$$

Η έλλειψη συνοριακών συνθηκών στο πρόβλημα (3.15) απλοποιεί κάπως το πρόβλημα του προσδιορισμού μιας παραστάσεως μιας λύσεως, σε προβλήματα με συνοριακές συνθήκες θα αναφερθούμε στη συνέχεια. Σημειώνουμε πάντως ότι για να εξασφαλισθεί μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (3.15) θα απαιτηθούν ορισμένες συνθήκες στη λύση, οι οποίες αφορούν τη συμπεριφορά της στο άπειρο.

Μη μοναδικότητα: Θεωρούμε το πρόβλημα

$$v_t = k v_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.16i}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.16ii}$$

Από τον Απειροστικό Λογισμό θυμόμαστε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Ιδιαίτερα λοιπόν ισχύει $f^{(n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση v,

$$v(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(kt) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \ge 0\,. \tag{3.17}$$

Αποδεικνύεται ότι η v είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, και οι παραγωγίσεις μπορούν να γίνουν κατά όρους. Εύκολα τότε διαπιστώνουμε ότι η v λύνει το πρόβλημα (3.16): Πράγματι ικανοποιεί προφανώς την αρχική συνθήκη (3.16ii), και

$$\begin{aligned} v_{xx}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(kt) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(kt) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ v_t(x,t) &= k \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(kt) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned}$$

συνεπώς η v ικανοποιεί και την (3.16i).

Το πρόβλημα (3.16) έχει συνεπώς δύο ομαλές λύσεις, την τετριμμένη και τη v που δίνεται από την (3.17). Προφανώς, και κάθε πολλαπλάσιο της v είναι λύση, άρα το πρόβλημα (3.15) έχει άπειρες λύσεις. Από όλες αυτές τις λύσεις μόνο η μηδενική έχει φυσική σημασία. Υπό ορισμένες συνθήκες στη λύση εξασφαλίζεται όμως μοναδικότητα, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Μοναδικότητα: Όπως είδαμε μόλις, χωρίς κάποια συνθήκη στις λύσεις του, το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας μπορεί να έχει πολλές λύσεις. Ιδιαίτερα δεν ισχύει γι' αυτό η αρχή του μεγίστου.

Στο Θεώρημα 3.2, στη συνέχεια, θα δούμε ότι υπό μια αρκετά ασθενή συνθήκη στις λύσεις, που αφορά τη συμπεριφορά τους καθώς το x τείνει στο άπειρο, ισχύει η αρχή του μεγίστου και η λύση είναι μοναδική σε αυτήν την κλάση.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 δεν είναι απλή. Για να διευκολύνουμε κάπως τον αναγνώστη στην κατανόησή της, εξετάζουμε κατ' αρχάς μια πολύ απλούστερη περίπτωση. Υποθέτοντας, συγκεκριμένα, ότι μια λύση u του (3.15) είναι φραγμένη προς τα πάνω,

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in [0,T] \quad u(x,t) \le M,$$

όπου $T > 0$ και $M \in \mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει η αρχή του μεγίστου, δηλαδή ότι

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in [0,T] \quad u(x,t) \le \sup_{z\in\mathbb{R}} \varphi(z).$$

Θέτουμε $m := \sup_{z\in\mathbb{R}} \varphi(z)$, επιλέγουμε ένα $y \in \mathbb{R}$, και αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\forall t \in [0,T] \quad u(y,t) \le m.$$

(Προφανώς, χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M > m$.)

Για έναν θετικό αριθμό ε, ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση v,

$$v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon\big[kt + \frac{1}{2}(x-y)^2\big].$$

Αμέσως διαπιστώνουμε ότι η v ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας, $v_t = kv_{xx}$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την αρχή του μεγίστου στο ορθογώνιο

$[y-\rho, y+\rho] \times [0,T]$, με οποιοδήποτε θετικό ρ. Για λόγους που θα γίνουν εύκολα κατανοητοί στη συνέχεια, επιλέγουμε

$$\rho := \sqrt{\frac{2(M-m)}{\varepsilon}}.$$

Τώρα,

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{1}{2}(x-y)^2 \le u(x,0) = \varphi(x) \le m,$$

$$v(y+\rho,0) = u(y+\rho,0) - \varepsilon\big[kt + \frac{1}{2}\rho^2\big] \le M - \varepsilon\frac{1}{2}\rho^2 = m$$

και, ακριβώς αντίστοιχα,

$$v(y-\rho,0) \le m.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την αρχή του μεγίστου για την εξίσωση της θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα, εδώ το $[y-\rho, y+\rho]$, συμπεραίνουμε αμέσως ότι

$$v(y,t) \le m.$$

Αλλά, προφανώς, $u(y,t) = v(y,t) + \varepsilon kt$, οπότε

$$u(y,t) \le m + \varepsilon kT.$$

Αφού αυτή η εκτίμηση ισχύει για κάθε θετικό ε, οδηγούμαστε στο επιθυμητό συμπέρασμα ότι όντως

$$u(y,t) \le m.$$

Προχωρούμε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη της αρχής του μεγίστου για τις λύσεις του προβλήματος (3.15) σε μια πολύ ευρύτερη κλάση συναρτήσεων. Εν συνεχεία θα συμπεράνουμε εύκολα ότι η λύση σε αυτήν την κλάση συναρτήσεων είναι μοναδική.

Θεώρημα 3.2 (Η αρχή του μεγίστου για το πρόβλημα αρχικών τιμών.) *Έστω $T > 0$, και $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε u_t, u_{xx} συνεχείς στο $\mathbb{R} \times (0,T)$, λύση του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$u_t = ku_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T, \tag{3.18i}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.18ii}$$

για την οποία ισχύει

$$|u(x,t)| \le M\mathrm{e}^{\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T, \tag{3.19}$$

για κάποιες σταθερές M *και* α. *Τότε ισχύει*

$$|u(x,t)| \le \sup_z |\varphi(z)|, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T. \tag{3.20}$$

Απόδειξη. Αρκεί φυσικά να αποδείξουμε ότι

$$u(x,t) \le \sup_z \varphi(z), \quad x \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T, \tag{3.21}$$

διότι οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται και από τη $-u$ και η (3.21) για τις u και $-u$ συνεπάγεται αμέσως την (3.20).

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε την (3.21) υπό την υπόθεση

$$4k\alpha T < 1. \tag{3.22}$$

Πράγματι, μπορούμε να διαιρέσουμε το διάστημα $[0,T]$ σε ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\tau < \frac{1}{4k\alpha}$, και να συμπεράνουμε διαδοχικά, για $n = 0, 1, \dots, \frac{T}{\tau}$, ότι

$$u(x,t) \le \sup_z u(z, n\tau) \le \sup_z u(z,0),$$

για $n\tau \le t \le (n+1)\tau$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ισχύει η (3.22). Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$4k\alpha(T+\varepsilon) < 1. \tag{3.23}$$

Για σταθερό y, θεωρούμε τώρα τις συναρτήσεις $v_\mu,\ \mu > 0$,

$$v_\mu(x,t) := u(x,t) - \mu \frac{1}{\sqrt{4k\pi(T+\varepsilon-t)}}\,\mathrm{e}^{\frac{(x-y)^2}{4k(T+\varepsilon-t)}},$$

$x \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T$. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(v_\mu)_t - k(v_\mu)_{xx} = u_t - ku_{xx},$$

συνεπώς

$$(v_\mu)_t = k(v_\mu)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\,. \tag{3.24}$$

Θεωρούμε τώρα το ορθογώνιο $[y-\rho, y+\rho] \times [0,T]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 έχουμε τότε, για $y-\rho \le x \le y+\rho$ και $0 \le t \le T$,

$$\begin{aligned} v_\mu(x,t) \le \max\{v_\mu(s,\tau) : y-\rho \le s \le y+\rho,\ 0 \le \tau \le T \\ \text{και } (s = y-\rho \text{ ή } s = y+\rho \text{ ή } \tau = 0)\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Τώρα προφανώς

$$v_\mu(x,0) \le u(x,0) \le \sup_z \varphi(z). \tag{3.26i}$$

Για $x = y-\rho$ ή $x = y+\rho$ και $\tau \in [0,T]$ εξ άλλου, χρησιμοποιώντας την (3.19), έχουμε

$$\begin{aligned} v_\mu(x,\tau) &\le M\mathrm{e}^{\alpha x^2} - \mu \frac{1}{\sqrt{4k\pi(T+\varepsilon-\tau)}}\, \mathrm{e}^{\frac{(x-y)^2}{4k(T+\varepsilon-\tau)}} \\ &\le M\mathrm{e}^{\alpha(|y|+\rho)^2} - \mu \frac{1}{\sqrt{4k\pi(T+\varepsilon)}}\, \mathrm{e}^{\frac{\rho^2}{4k(T+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.23), διαπιστώνουμε ότι το δεξιό μέλος της ανισότητας μπορεί να γίνει μικρότερο από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό, αν πάρουμε το ρ αρκετά μεγάλο. Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο ρ,

$$v_\mu(y-\rho,\tau),\ v_\mu(y+\rho,\tau) \le \sup_z \varphi(z)\,. \tag{3.26ii}$$

Από τις (3.25) και (3.26) έπεται τώρα

$$v_\mu(y,t) \le \sup_z \varphi(z), \quad 0 \le t \le T\,. \tag{3.27}$$

Τώρα

$$v_\mu(y,t) = u(y,t) - \mu \frac{1}{\sqrt{4k\pi(T+\varepsilon-t)}},$$

και η (3.27) δίνει

$$u(y,t) \le \sup_z \varphi(z) + \mu \frac{1}{\sqrt{4k\pi(T+\varepsilon-t)}}.$$

Αφήνοντας το μ να τείνει στο μηδέν, συμπεραίνουμε ότι

$$u(y,t) \le \sup_z \varphi(z),$$

και από αυτή τη σχέση έπεται αμέσως η (3.21). □

Από το Θεώρημα 3.2 έπεται ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας (3.15) έχει το πολύ μία λύση u, για την οποία ισχύει μια εκτίμηση της μορφής (3.19).

3.2.1 Παράσταση της λύσεως u του (3.15), που πληροί την (3.19)

Αρχίζουμε με την εισαγωγή της λεγόμενης *συνέλιξης* συναρτήσεων, μιας διαδικασίας κατασκευής μιας συναρτήσεως με συνδυασμό δύο άλλων συναρτήσεων με πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες και πολλές εφαρμογές, γενικότερα στην Ανάλυση και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Συνέλιξη συναρτήσεων. Έστω $S, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο κατάλληλες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y)g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $S \star g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(S \star g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y)g(y)\,dy,$$

λέγεται *συνέλιξη* των S και g. Με αλλαγή μεταβλητής, μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχθεί ότι η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική, $S \star g = g \star S$.

Για την ύπαρξη της συνέλιξης $S \star g$ αρκεί, φερ' ειπείν, να υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |S(y)|\,dy$ και να είναι η g φραγμένη. Δεν είναι φυσικά υποχρεωτικό να ορίζονται δύο συναρτήσεις σε όλο το $\mathbb{R}$ για να μπορούμε να ορίσουμε τη συνέλιξή τους. Αν ορίζονται σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε τις επεκτείνουμε ως μηδενικές συναρτήσεις στο συμπλήρωμα του πεδίου ορισμού τους.

Ένας βασικός λόγος για το ενδιαφέρον για τη συνέλιξη, είναι το γεγονός ότι οποιαδήποτε καλή ιδιότητα έχει ένας εκ των "γονέων" S και g την κληρονομεί και το "παιδί" τους $S \star g$, λόγος για τον οποίο οι μαθηματικοί αρέσκονται να αναφέρονται στη συνέλιξη ως τον "τέλειο γάμο".

Συνεχίζουμε με ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα, τις βασικές ιδιότητες αναλλοιώτου της εξισώσεως (3.15i).

(i) Αν $y \in \mathbb{R}$ και $u(x,t)$ λύση της (3.15i), τότε και η $v(x,t) := u(x-y,t)$ είναι λύση της (3.15i).

(ii) Αν u είναι λύση της (3.15i), τότε και κάθε παράγωγος της u, π.χ. $u_x, u_t, u_{xt}, \ldots$, αποτελεί λύση της (3.15i).

(iii) Κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (3.15i) αποτελεί επίσης λύση της.

(iv) Έστω $S(x,t)$ λύση της (3.15i), και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαία συνάρτηση. Τότε και η συνέλιξη v των $S(\cdot,t)$ και g,

$$v(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\,dy\,,$$

αποτελεί λύση της (3.15i), αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό κατάλληλη έννοια ώστε η σειρά μερικής παραγωγίσεως ως προς t,x,xx και ολοκληρώσεως να μπορεί να αλλάξει. Θα επανέλθουμε σε αυτό το σημείο αργότερα, βλ. το Λήμμα 3.1.

(v) Αν α θετικός αριθμός, και $u(x,t)$ λύση της (3.15i), τότε και η συνάρτηση v, $v(x,t) := u(\sqrt{\alpha}x,\alpha t)$ είναι επίσης λύση της (3.15i), όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε έναν τύπο για τη λύση u του προβλήματος (3.15) για την οποία ισχύει η (3.19).

Θα προσδιορίσουμε πρώτα μια λύση $Q(x,t)$ της (3.15i) υπό την ειδική αρχική συνθήκη

$$Q(x,0)=0 \quad \text{για } x<0, \quad Q(x,0)=1 \quad \text{για } x>0. \tag{3.28}$$

Για τον προσδιορισμό της λύσεως θα απαιτηθούν τρία βήματα.

$1^{\underline{o}}$ *Βήμα*: Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια λύση της μορφής

$$Q(x,t)=g(p), \quad \text{όπου } p=\frac{x}{\sqrt{4kt}}\,, \tag{3.29}$$

και g άγνωστη συνάρτηση μίας μεταβλητής, την οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε. Ο λόγος για τον οποίον αναμένουμε να έχει η λύση την ανωτέρω μορφή είναι ο εξής: Λόγω της ειδικής επιλογής της αρχικής συνθήκης έχουμε $Q(\alpha x,0)=Q(x,0)$ για οποιονδήποτε θετικό αριθμό α, οπότε, κατά τη (v), αν Q είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (3.15i), (3.28), τότε και η $Q(\sqrt{\alpha}x,\alpha t)$ θα είναι επίσης λύση. Λόγω της μοναδικότητας της λύσεως, για την οποία ισχύει η (3.19), θα έχουμε συνεπώς

$$Q(x,t)=Q(\sqrt{\alpha}x,\alpha t) \quad \forall \alpha>0,$$

επομένως $Q(x,t) = f(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Ο παράγων $\frac{1}{\sqrt{4k}}$ χρησιμοποιείται απλώς και μόνον για να απλοποιηθεί κάπως ο ζητούμενος τύπος.

$2^{\underline{\text{ο}}}$ *Βήμα*: Η (3.29) μας δίνει τη δυνατότητα να μετατρέψουμε την (3.15i) σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση για την g: έχουμε

$$Q_t = \frac{dg}{dp}\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{2t}\frac{x}{\sqrt{4kt}}g'(p) = -\frac{1}{2t}\,pg'(p)$$
$$Q_x = \frac{dg}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4kt}}g'(p)$$
$$Q_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4kt}}\,g''(p)\,\frac{dp}{dx} = \frac{1}{4kt}g''(p),$$

επομένως

$$Q_t - kQ_{xx} = -\frac{1}{2t}\big[pg'(p) + \frac{1}{2}g''(p)\big],$$

και η $Q_t = kQ_{xx}$ συνεπάγεται

$$g''(p) + 2pg'(p) = 0. \tag{3.30}$$

Από την (3.30) έπεται, $g'(p) = c_1\mathrm{e}^{-p^2}$, c_1 σταθερά, και συνεπώς

$$g(p) = c_1\int_0^p \mathrm{e}^{-s^2}\,ds + c_2, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}. \tag{3.31}$$

Από τις (3.29), (3.31) έπεται

$$Q(x,t) = c_1\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \mathrm{e}^{-p^2}\,dp + c_2, \quad t > 0, \tag{3.32}$$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$3^{\underline{\text{ο}}}$ *Βήμα*: Θα προσδιορίσουμε τώρα τις σταθερές c_1, c_2 για να ικανοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες. Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό, αλλά και εύκολα αποδεικνυόμενο με διπλή ολοκλήρωση και χρήση πολικών συντεταγμένων, γεγονός ότι $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-p^2}\,dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Για θετικό x, λαμβάνουμε από τις (3.32) και (3.28)

$$1 = \lim_{t\downarrow 0} Q(x,t) = c_1\int_0^\infty \mathrm{e}^{-p^2}\,dp + c_2 = c_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2.$$

Ομοίως, για αρνητικό x, έχουμε

$$0 = \lim_{t\downarrow 0} Q(x,t) = c_1\int_0^{-\infty} \mathrm{e}^{-p^2}\,dp + c_2 = -c_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2.$$

Συνεπώς έχουμε $c_1 = 1/\sqrt{\pi}, c_2 = 1/2$, και η (3.32) μας οδηγεί στην

$$Q(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \mathrm{e}^{-p^2}\, dp, \quad t > 0. \tag{3.33}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν επεκτείνουμε την Q που δίνεται από την (3.33) συνεχώς και για $t = 0$, όταν $(x,t) \neq (0,0)$, τότε αυτή λύνει πράγματι το πρόβλημα (3.15i), (3.28).

Έχοντας λύσει το πρόβλημα για μια ειδική αρχική τιμή, επιστρέφουμε τώρα στο γενικό πρόβλημα (3.15). Εισάγουμε τη συνάρτηση $S, S := Q_x$, η οποία κατά τη (ii) αποτελεί λύση της (3.15i), και ορίζουμε τη συνάρτηση u δια

$$u(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\varphi(y)\, dy, \quad t > 0. \tag{3.34}$$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι, για φραγμένη φ, η (3.34) δίνει τη ζητούμενη λύση του προβλήματος (3.15). Πρώτα όμως ορισμένες παρατηρήσεις.

Παραγωγίζοντας την (3.33) ως προς x διαπιστώνουμε ότι

$$S(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad t > 0. \tag{3.35}$$

Επίσης, για $t > 0$, έχουμε, με $q := \frac{x}{\sqrt{4kt}}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-q^2}\, dq,$$

συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)\, dx = 1, \quad t > 0. \tag{3.36}$$

Η (3.36) είναι φυσικά αναμενόμενη, αφού για σταθερή αρχική τιμή, ας πούμε $\varphi(x) = 1$, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που μας ενδιαφέρει είναι επίσης σταθερή, και ισούται με την ίδια σταθερά όπως και η αρχική τιμή.

Με την αλλαγή μεταβλητής $z = x - y$, η (3.34) γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(z,t)\varphi(x-z)\, dz, \tag{3.37}$$

και αυτή με τη σειρά της, με $p = \frac{z}{\sqrt{kt}}$, γράφεται

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}} \varphi(x - p\sqrt{kt})\, dp. \tag{3.38}$$

Πριν προχωρήσουμε, θυμίζουμε ένα γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.1 *Έστω* $f = f(x,t)$ *και* f_t *συνεχείς συναρτήσεις στο* $(-\infty,\infty)\times(c,d)$. *Έστω ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f_t(x,t)|\,dx$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα $[\tilde{c},\tilde{d}]$ *του* (c,d), *δηλαδή, φερ' ειπείν για το πρώτο, υπάρχει μια συνάρτηση* g *τέτοια ώστε*

$$\forall t \in [\tilde{c},\tilde{d}] \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x,t)| \le g(x)$$

και το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ *να συγκλίνει, δηλαδή να υπάρχει. Τότε*

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x,t)\,dx \quad \text{για } t \in (c,d). \qquad \square$$

Σημείωση (Υπενθύμιση σχετικά με την ορολογία στο Λήμμα 3.1.) Έστω $t \in (c,d)$ και f όπως στο προηγούμενο Λήμμα. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|\,dx$$

συγκλίνει, αν για κάθε θετικό ε, υπάρχει κατάλληλο διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε το ολοκλήρωμα έξω από αυτό το διάστημα να είναι μικρότερο του ε,

$$\int_{-\infty}^{a} |f(x,t)|\,dx + \int_{b}^{\infty} |f(x,t)|\,dx < \varepsilon.$$

Προφανώς το διάστημα $[a,b]$ μπορεί να αντικατασταθεί και με διάστημα της μορφής $[-n,n]$, για κατάλληλον φυσικό αριθμό n, οπότε σύγκλιση του ολοκληρώματος σημαίνει ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \quad \int_{-\infty}^{-n} |f(x,t)|dx + \int_{n}^{\infty} |f(x,t)|dx < \varepsilon.$$

Τώρα, ο όρος το ολοκλήρωμα συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $[\tilde{c},\tilde{d}]$ υποδηλώνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n, *ο ίδιος για όλα τα* $t \in [\tilde{c},\tilde{d}]$, τέτοιος ώστε

$$\int_{-\infty}^{-n} |f(x,t)|dx + \int_{n}^{\infty} |f(x,t)|dx < \varepsilon.$$

Θεώρημα 3.3 (Η (3.34) δίνει τη λύση του προβλήματος (3.15).) *Έστω* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής, φραγμένη συνάρτηση. Τότε δια της* (3.34) *ορίζεται μια συνάρτηση* u, *η οποία είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, για* $x \in \mathbb{R}, t > 0$, *ικανοποιεί την* (3.15i), *καθώς και την* (3.15ii) *υπό την έννοια ότι*

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς από την (3.38) έπεται

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sup_z |\varphi(z)| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\, dp = \sup_z |\varphi(z)|\,, \tag{3.40}$$

(βλ. και την (3.20)), συνεπώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα. Τώρα

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(x-y,t)\varphi(y)|\, dy &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{x-y}{2kt}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y)|\, dy \\ &= \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} |p\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}} \varphi(x - p\sqrt{kt})\, |dp,\end{aligned}$$

όπου c μια θετική σταθερά. Συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(x-y,t)\varphi(y)|\, dy \le \frac{2c}{\sqrt{t}} \sup_z |\varphi(z)| \int_0^{\infty} p\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\, dp\,, \tag{3.41}$$

και με τη βοήθεια του Λήμματος 3.1 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει η u_x και δίνεται δια

$$u_x(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(x-y,t)\varphi(y)\, dy, \quad t > 0. \tag{3.42}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν οι $u_t, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, \ldots$. Κάθε φορά στις αντίστοιχες της (3.41) εκτιμήσεις καταλήγουμε σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{\infty} p^n \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\, dp,$$

όπου n είναι η τάξη της παραγώγου, τα οποία φυσικά υπάρχουν. Κατ' αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι η u είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και οι παράγωγοί της δίνονται δια παραγωγίσεως της S, όπως στον τύπο (3.42). Είναι τώρα προφανές ότι η u ικανοποιεί την (3.15i), αφού η S ικανοποιεί την ίδια εξίσωση.

Απομένει να αποδείξουμε την (3.39). Λόγω της (3.36) έχουμε

$$\begin{aligned} u(x,t) - \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)[\varphi(y) - \varphi(x)]\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}} [\varphi(x - p\sqrt{kt}) - \varphi(x)]\, dp. \end{aligned}$$

Για σταθερό x, θέλουμε να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν καθώς το t τείνει στο μηδέν. Αυτό θα γίνει με διάσπαση του διαστήματος ολοκλήρωσης σε δύο υποδιαστήματα· στο ένα υποδιάστημα ο δεύτερος παράγοντας της προς ολοκλήρωση συνάρτησης θα είναι μικρός και στο άλλο ο πρώτος. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της φ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall y \in [x-\delta, x+\delta].$$

Τότε

$$\begin{aligned} &\Big| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|p| < \frac{\delta}{\sqrt{kt}}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}} [\varphi(x - p\sqrt{kt}) - \varphi(x)]\, dp \Big| \\ &\le \max_{|x-y| \le \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| \, \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\, dp \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\, dp = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Επί πλέον

$$\begin{aligned} &\Big| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|p| > \frac{\delta}{\sqrt{kt}}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}} [\varphi(x - p\sqrt{kt}) - \varphi(x)]\, dp \Big| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{4\pi}} 2 \sup_z |\varphi(z)| \int_{|p| > \frac{\delta}{\sqrt{kt}}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\, dp. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος τείνει προφανώς στο μηδέν καθώς το t τείνει στο μηδέν. Επομένως για αρκετά μικρό t η όλη παράσταση γίνεται μικρότερη του $\frac{\varepsilon}{2}$. Συνολικά επομένως

$$|u(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

για αρκετά μικρό t, το οποίο αποδεικνύει την (3.39). □

Με βάση το Θεώρημα 3.3 διαπιστώνουμε ότι η λύση u του προβλήματος (3.15), η οποία ικανοποιεί την (3.19), είναι για φραγμένη αρχική τιμή άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, ακόμη και αν η φ είναι μόνο συνεχής και όχι παραγωγίσιμη. Σε αυτό το σημείο υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά μεταξύ της εξισώσεως της θερμότητας και της κυματικής εξισώσεως, όπως βλέπει κανείς αμέσως χρησιμοποιώντας τη (2.11).

Όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως από τις (3.34), (3.35), όταν μεταβάλλουμε την αρχική τιμή φ σε κάποια περιοχή, αυτό επηρεάζει τις τιμές της λύσεως u, για οποιοδήποτε $t > 0$, σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Γι' αυτό συνήθως λέμε ότι η θερμότητα διαδίδεται με "άπειρη" ταχύτητα. Αυτό είναι προφανώς ένα φυσικό παράδοξο, η θερμότητα στη φύση *δεν* διαδίδεται με άπειρη ταχύτητα. Ορισμένες όμως φυσικές παραδοχές, που γίνονται για να οδηγηθούμε στην εξίσωση της θερμότητας, έχουν ως αποτέλεσμα να ισχύει για τη λύση της εξισώσεως αυτό το παράδοξο. Τονίζουμε πάντως ότι η εξίσωση της θερμότητας, παρά το γεγονός αυτό, περιγράφει κατά τα άλλα τη διάδοση της θερμότητας με μεγάλη ακρίβεια.

3.3 Η εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία:

(3.43i) $$v_t = kv_{xx}, \qquad x > 0,\ t > 0,$$

(3.43ii) $$v(x,0) = \varphi(x), \qquad x \geq 0,$$

(3.43iii) $$v(0,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

Στόχος μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε μια ομαλή, συνεχή στο $[0,\infty)\times[0,\infty)$, λύση του προβλήματος (3.43) τέτοια ώστε

(3.44) $$|v(x,t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha x^2}, \quad x \geq 0,\ t \geq 0,$$

για κάποιες σταθερές M και α, υποθέτοντας ότι η αρχική τιμή φ είναι συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αναγκαία συνθήκη συμβατότητας για την ύπαρξη μιας λύσεως, όπως την περιγράψαμε ανωτέρω, είναι $\varphi(0) = 0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\varphi(0) = 0$. Τότε η φ μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στον αρνητικό ημιάξονα ως περιττή συνάρτηση,

$$\varphi_{\text{περ.}}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Η $\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}$ είναι προφανώς φραγμένη. Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.45}$$

Η λύση u του προβλήματος (3.45) για την οποία ισχύει η (3.19) είναι λόγω της μοναδικότητας περιττή συνάρτηση του x, και δίνεται, σύμφωνα με την (3.34), δια

$$u(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(y)\,dy, \quad t > 0. \tag{3.46}$$

Επειδή η u είναι περιττή, ισχύει $u(0,t) = 0$, και εύκολα διαπιστώνουμε ότι η μοναδική λύση v του (3.43), για την οποία ισχύει η (3.44), είναι ο περιορισμός της u για μη αρνητικά x,

$$v(x,t) = u(x,t), \quad x \geq 0,\ t \geq 0. \tag{3.47}$$

Τώρα

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^{\infty} S(x-y,t)\varphi(y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} S(x-y,t)\varphi(-y)\,dy \\ &= \int_0^{\infty} [S(x-y,t) - S(x+y,t)]\varphi(y)\,dy, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} \big[\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\big]\varphi(y)\,dy. \tag{3.48}$$

3.4 Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών σε ένα φραγμένο διάστημα

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα, λόγου χάρη στο διάστημα $[0,\ell]$:

(3.49i) $\quad v_t = kv_{xx}, \quad 0 \leq x \leq \ell,\ t \geq 0,$

(3.49ii) $\quad v(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$

(3.49iii) $\quad v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0.$

Αναγκαίες συνθήκες συμβατότητας για να έχει το πρόβλημα (3.49) μια ομαλή λύση, συνεχή στο $[0, \ell] \times [0, \infty)$, είναι, όπως διαπιστώνουμε αμέσως,

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0. \tag{3.50}$$

Η μοναδικότητα της λύσεως του (3.49) απεδείχθη στην παράγραφο 3.1. Ένας τρόπος, όχι ιδιαίτερα εύχρηστος, για να παραστήσουμε τη λύση του προβλήματος (3.49) είναι ο ακόλουθος: Επεκτείνουμε τη συνάρτηση φ περιττά στο $[-\ell, 0]$, και εν συνεχεία επεκτείνουμε τη νέα συνάρτηση περιοδικά με περίοδο 2ℓ σε όλο το $\mathbb{R}$. Ορίζουμε δηλαδή την περιοδική, με περίοδο 2ℓ, συνάρτηση $\varphi_{\text{επεκ.}}$ δια

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ -\varphi(-x), & -\ell < x < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x + 2\ell) = \varphi_{\text{επεκ.}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αν η φ είναι συνεχής στο $[0, \ell]$, τότε, λόγω της (3.50), και η $\varphi_{\text{επεκ.}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης η $\varphi_{\text{επεκ.}}$ είναι τότε, ως συνεχής και περιοδική, φραγμένη. Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t = ku_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.51i}$$

$$u(x, 0) = \varphi_{\text{επεκ.}}(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.51ii}$$

και τη λύση του u, που ικανοποιεί την (3.19). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η u είναι περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο 2ℓ, είναι περιττή και συνεπώς $u(0, t) = 0$, και ανάλογα ότι $u(\ell, t) = 0$. Συνεπώς, ο περιορισμός της u στο $[0, \ell] \times [0, \infty)$ είναι η λύση v του προβλήματος (3.49). Από την (3.34) τότε έπεται ότι

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\varphi_{\text{επεκ.}}(y)\, dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,\ t > 0\,. \tag{3.52}$$

3.5 Η μη ομογενής εξίσωση της θερμότητας

Έστω $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Θεωρούμε τότε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών για μια μη ομογενή εξίσωση της θερμότητας: Ζητείται μια ομαλή λύση $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ του προβλήματος

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3.53i}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.53ii}$$

για την οποία ισχύει η (3.19), για κάποια M, α. Η μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (3.53), που ικανοποιεί την (3.19), έπεται αμέσως από τη μοναδικότητα της λύσεως του αντίστοιχου προβλήματος για την ομογενή εξίσωση της θερμότητας, όταν η λύση ικανοποιεί την (3.19). Αμέσως διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των λύσεων των προβλημάτων (3.15) και

$$\text{(3.54}i\text{)} \qquad u_t = ku_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$\text{(3.54}ii\text{)} \qquad u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

αποτελεί λύση του προβλήματος (3.53). Αρκεί συνεπώς να λύσουμε το πρόβλημα (3.54). Έστω ότι η $f(\cdot,t)$ είναι φραγμένη, για κάθε $t \in [0,\infty)$.

Κατ' αναλογίαν προς τη (2.28) για την κυματική εξίσωση, θα αποδείξουμε ότι η λύση του προβλήματος (3.54) για την οποία ισχύει η (3.19) δίνεται δια

$$\text{(3.55)} \qquad u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 (βλ. την (3.34)), το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dy$$

είναι η τιμή στο σημείο (x,t) της λύσης v του προβλήματος αρχικών τιμών για την ομογενή εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > s, \\ v(x,s) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Σε συνδυασμό με αυτό το γεγονός, η (3.55) αναφέρεται ως *αρχή του Duhamel*.

Κατ' αρχάς, προφανώς, η u που δίνεται από την (3.55) ικανοποιεί την (3.54ii).

Παραγωγίζοντας την (3.55) ως προς t, λαμβάνοντας υπ' όψιν το Λήμμα 3.1 και εκτιμήσεις που έγιναν στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3, καθώς και το γεγονός ότι το $t = 0$ είναι ιδιάζον σημείο της S, διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$u_t(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_t(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds + \lim_{s\uparrow t} \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dy.$$

Τώρα η S πληροί την ομογενή εξίσωση της θερμότητας, συνεπώς

$$u_t(x,t) = k\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon)f(y,t-\varepsilon)\,dy$$

ή

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon)f(y,t-\varepsilon)\,dy. \tag{3.56}$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο εκείνου της απόδειξης της (3.39), θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της (3.56) ισούται με $f(x,t)$. Τώρα,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon)f(y,t-\varepsilon)\,dy\; - f(x,t)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon)[f(y,t-\varepsilon) - f(x,t)]\,dy\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi k\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4k\varepsilon}}[f(y,t-\varepsilon) - f(x,t)]\,dy\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}[f(x-p\sqrt{k\varepsilon},t-\varepsilon) - f(x,t)]\,dp.
\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon_1 > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x,t) - f(y,s)| \le \varepsilon_1/2 \quad \text{για } |s-t| < \delta \text{ και } |y-x| < \delta.$$

Επομένως, για $\varepsilon < \delta$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{|p|<\frac{\delta}{\sqrt{k\varepsilon}}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}[f(x-p\sqrt{k\varepsilon},t-\varepsilon) - f(x,t)]\,dp\Big|\\
&\le \frac{\varepsilon_1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\,dp = \frac{\varepsilon_1}{2}.
\end{aligned}$$

Επί πλέον,

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{|p|>\frac{\delta}{\sqrt{k\varepsilon}}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}[f(x-p\sqrt{k\varepsilon},t-\varepsilon) - f(x,t)]\,dp\Big|\\
&\le \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sup_{\substack{z\in\mathbb{R}\\ \tau\in[t-\varepsilon,t]}} |f(z,\tau)| \int_{|p|>\frac{\delta}{\sqrt{k\varepsilon}}} \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{4}}\,dp \to 0 \;\text{ για }\; \varepsilon\to 0.
\end{aligned}$$

Από τις δύο προηγούμενες εκτιμήσεις έπεται ότι

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,\varepsilon)f(y,t)\,dy = f(x,t),$$

οπότε από την (3.56) διαπιστώνουμε ότι η u που δίνεται από την (3.55) ικανοποιεί και την (3.54i).

3.5.1 Η μη ομογενής εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για μια μη ομογενή εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία: Έστω $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη συνάρτηση, $\varphi(0) = 0$ και $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε $t \geq 0$, η $f(\cdot, t)$ να είναι φραγμένη συνάρτηση της πρώτης της μεταβλητής. Ζητείται μια ομαλή, συνεχής στο $[0,\infty) \times [0,\infty)$, λύση του προβλήματος

$$
\begin{aligned}
&(3.57i) && v_t = kv_{xx} + f(x,t), && x > 0,\ t > 0,\\
&(3.57ii) && v(x,0) = \varphi(x), && x \geq 0,\\
&(3.57iii) && v(0,t) = 0, && t \geq 0,
\end{aligned}
$$

τέτοια ώστε

$$
(3.58) \qquad |v(x,t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha x^2}, \quad x \geq 0,\ t \geq 0,
$$

για κάποιες σταθερές M και α.

Η μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (3.57) έπεται αμέσως από τη μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (3.43), πάντα υπό τη συνθήκη (3.58). Τώρα το άθροισμα των λύσεων του προβλήματος (3.43) και

$$
\begin{aligned}
&(3.59i) && v_t = kv_{xx} + f(x,t), && x > 0,\ t > 0,\\
&(3.59ii) && v(x,0) = 0, && x \geq 0,\\
&(3.59iii) && v(0,t) = 0, && t \geq 0,
\end{aligned}
$$

είναι λύση του προβλήματος (3.57). Αρκεί συνεπώς να προσδιορίσουμε μια παράσταση της λύσεως του (3.59) για την οποία ισχύει η (3.58).

Επεκτείνουμε την f κατά περιττό τρόπο, ενδεχομένως ασυνεχώς, στον αρνητικό ημιάξονα των x, ορίζοντας τη συνάρτηση $f_{\text{περ.}}$ δια

$$
f_{\text{περ.}}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0,\ t \geq 0,\\ -f(-x,t), & x < 0,\ t \geq 0. \end{cases}
$$

Χρησιμοποιώντας τις μέχρι τώρα γνώσεις μας για την εξίσωση της θερμότητας, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη λύση του προβλήματος (3.59) δίνεται δια

$$
(3.60) \qquad v(x,t) := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t-s) f_{\text{περ.}}(y,s)\, dy\, ds, \quad x,t > 0.
$$

Ανάλογα εργαζόμεθα και για τον προσδιορισμό της λύσεως του αντίστοιχου προβλήματος σε ένα φραγμένο διάστημα. Αργότερα όμως θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα με άλλον τρόπο, συγκεκριμένα στην Παράγραφο 5.3 με την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών, και γι' αυτό δεν υπεισερχόμεθα εδώ σε λεπτομέρειες.

Ασκήσεις

3.5 Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

έχει το πολύ μία ομαλή λύση.

[*Υπόδειξη:* Ποιο πρόβλημα λύνει η u_x; Αρχή μεγίστου.]

3.6 Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ενέργειας, αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

έχει το πολύ μία ομαλή λύση.

3.7 Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u$$

μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$v_t = a(x,t)v_{xx} + b(x,t)v_x + [c(x,t) + \gamma]v\,,$$

όπου γ τυχαία σταθερά.

3.8 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u, & 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3.61}$$

με ομαλές συναρτήσεις a, b, c, φ, τέτοιες ώστε $a(x,t) \geq \alpha > 0$. Αποδείξτε ότι, αν $c(x,t) \leq \gamma_0 < 0$ με γ_0 αρκετά μικρό, τότε ισχύει

$$\|u(\cdot,t)\| \leq \|\varphi\|, \quad 0 \leq t \leq T,$$

όπου $\|\cdot\|$ η L^2-νόρμα στο διάστημα $[0,\ell]$.

3.9 Θεωρούμε το πρόβλημα (3.61), δεν υποθέτουμε όμως τώρα ότι $c(x,t) \leq \gamma_0 < 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά γ, ανεξάρτητη του φ, τέτοια ώστε

$$\|u(\cdot,t)\| \leq \mathrm{e}^{\gamma t}\|\varphi\|, \quad 0 \leq t \leq T,$$

όπου $\|\cdot\|$ η L^2-νόρμα στο διάστημα $[0,\ell]$.
[*Υπόδειξη:* Θέστε $v(x,t) := \mathrm{e}^{-\gamma t}u(x,t)$, με κατάλληλο γ.]

3.10 Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, περιοδική συνάρτηση με περίοδο ℓ. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

έχει ακριβώς μία ομαλή, περιοδική ως προς x, λύση, και ότι η περίοδός της είναι ℓ. [Σημειώνουμε ότι μπορεί να υπάρχουν και μη περιοδικές λύσεις, βλ. τις (3.16) και (3.17).]

3.11 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u(0,t) = h(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Να αναχθεί αυτό το πρόβλημα σε ένα αντίστοιχο με ομογενή συνοριακή συνθήκη.

3.12 Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία:

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ v_x(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Να αναχθεί αυτό το πρόβλημα σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για την ίδια εξίσωση.

3.13 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx} + f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ v_x(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.62}$$

Να αναχθεί αυτό το πρόβλημα σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών.

3.14 Να αναχθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} + g(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ w_x(0,t) = h(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

σε ένα πρόβλημα της μορφής (3.62), δηλαδή με ομογενή συνοριακή συνθήκη.

3.15 (Το πρόβλημα για την εξίσωση της θερμότητας δεν είναι καλώς τεθειμένο για t<0.) Θεωρούμε την ακολουθία προβλημάτων (με $k > 0$)

$$\begin{cases} (u_n)_t = k(u_n)_{xx}, & 0 \leq x \leq 2\pi,\ t \leq 0, \\ u_n(x,0) = \dfrac{1}{n}\sin(nx), & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u_n(0,t) = u_n(2\pi,t) = 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $u_n(x,t) = \frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{e}^{-n^2kt}$ είναι λύσεις του προβλήματος. Αποδείξτε ότι

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} |u_n(x,0)| = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty,$$

και

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} |u_n(x,-1)| = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{kn^2} \to \infty,\ n \to \infty.$$

3.16 (Η αρχή του μεγίστου δεν ισχύει για την εξίσωση του κύματος.) Θεωρούμε συναρτήσεις $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\psi(x) := \begin{cases} x^2(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

φ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$\varphi(x) = 1,\ \ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \varphi(x) < 1 \ \text{ για }\ x \in [-1,0) \cup (1,2],$$

και $\varphi(x) = 0$ διαφορετικά. Αποδείξτε ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(t), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

λαμβάνει το μέγιστό της μόνο στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.17 Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για τη μη ομογενή εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + f(x,t), & 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) = k(t), & t \ge 0, \\ u_x(\ell,t) + \alpha u(\ell,t) = h(t), & t \ge 0, \end{cases}$$

όπου $\alpha \ge 0$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ενέργειας για να αποδείξετε ότι το πρόβλημα αυτό έχει το πολύ μία ομαλή λύση.

3.18 Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για μια μη γραμμική παραβολική εξίσωση

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t,u), & 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) = k(t), & t \ge 0, \\ u(\ell,t) = h(t), & t \ge 0, \end{cases}$$

όπου f, φ, k και h δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ενέργειας για να αποδείξετε ότι το πρόβλημα αυτό έχει το πολύ μία ομαλή λύση, όταν η f ικανοποιεί μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Η f είναι συνάρτηση μόνο της τρίτης μεταβλητής και είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η f είναι συνάρτηση μόνο της τρίτης μεταβλητής, είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι ομοιόμορφα φραγμένη προς τα πάνω, $f'(s) \le c$, για κάθε πραγματικό αριθμό s.
- Για κάθε $x \in [0,\ell]$ και $t \ge 0$, η $f(x,t,\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.
- Για κάθε $x \in [0,\ell]$ και $t \ge 0$, η $f(x,t,\cdot)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς την τρίτη μεταβλητή της και η παράγωγός της ως προς την εν λόγω μεταβλητή είναι ομοιόμορφα φραγμένη προς τα πάνω, $\partial_3 f(x,t,s) \le c$, για κάθε $x \in [0,\ell]$, $t \ge 0$, και κάθε πραγματικό αριθμό s.
- Η f ικανοποιεί τη *μονόπλευρη* συνθήκη του Lipschitz ως προς την τρίτη μεταβλητή, ομοιόμορφα ως προς τις δύο πρώτες μεταβλητές, δηλαδή

  $$\big(f(x,t,s_1) - f(x,t,s_2)\big)(s_1 - s_2) \le c(s_1 - s_2)^2 \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

  για κάθε $x \in [0,\ell]$ και $t \ge 0$, με σταθερά c ανεξάρτητη των x και t.

Ποιες, κατά τη γνώμη σας, από τις ανωτέρω συνθήκες γενικεύονται εύκολα για συναρτήσεις $f : [0,\ell] \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ή και ακόμα γενικότερα για συναρτήσεις $f : [0,\ell] \times [0,\infty) \times H \to H$, όπου $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, δηλαδή πραγματικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο;

3.19 Έστω $\ell > 0$ και $f : [0,\ell] \times [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\big(f(x,t,s_1) - f(x,t,s_2)\big)(s_1 - s_2) \le 10(s_1 - s_2)^2, \quad x \in [0,\ell],\ \ t \in [0,\infty),\ \ s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε μοναδικότητα ομαλών λύσεων του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - u_x + f(x,t,u) & \text{στο } [0,\ell] \times [0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,\ell], \\ u_x(0,\cdot) = 2u(0,\cdot) + h & \text{στο } [0,\infty), \\ u(\ell,\cdot) = -\dfrac{1}{3}u_x(\ell,\cdot) + k & \text{στο } [0,\infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ και $h, k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές συναρτήσεις.

3.20 Έστω $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(xt)u_x - \mathrm{e}^{t+2x}u & \text{στο } [0,1] \times [0,\infty), \\ u(0,\cdot) = u(1,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,1], \end{cases}$$

όπου $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2(1-x)$. Αποδείξτε ότι

$$\forall x \in [0,1] \ \ \forall t \in [0,\infty) \quad u(x,t) \le \frac{4}{27}.$$

[*Υπόδειξη:* Βλ. την υπόδειξη στην Άσκηση 3.4*i*.]

3.21 Έστω u και $\tilde{u}$ λύσεις των εξής προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t), & 0 \le x \le \ell,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) = k(t), & t \ge 0, \\ u(\ell,t) = h(t), & t \ge 0, \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(x,t), & 0 \le x \le \ell,\ 0 < t < T, \\ \tilde{u}(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ \tilde{u}(0,t) = k(t), & t \ge 0, \\ \tilde{u}(\ell,t) = h(t), & t \ge 0, \end{cases}$$

αντίστοιχα, όπου $T > 0$ και $f, \tilde{f}, \varphi, k$ και h δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Αν $f(x,t) < \tilde{f}(x,t)$ για $0 < x < \ell,\ 0 < t \le T$, αποδείξτε ότι $u(x,t) < \tilde{u}(x,t)$ για $0 < x < \ell,\ 0 < t \le T$.

3.22 Έστω $\ell, T > 0$, και $u : [0,\ell] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, μια ομαλή συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - tu & \text{στο } [0,\ell] \times [0,T], \\ u(0,\cdot) = u(\ell,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,T], \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,\ell], \end{cases}$$

όπου $\varphi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση.

i. Αποδείξτε ότι

$$\forall x \in [0,\ell]\ \ \forall t \in [0,T] \quad |u(x,t)| \le \max_{0\le s\le \ell} |\varphi(s)|.$$

ii. Αποδείξτε ότι

$$\forall t \in [0,T] \quad \|u(\cdot,t)\| \le \|\varphi\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα

$$\|f\| := \Big(\int_0^\ell |f(x)|^2\, dx \Big)^{1/2}.$$

iii. Χρησιμοποιήστε κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής για να αναγάγετε το δοθέν πρόβλημα στο ακόλουθο

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} & \text{στο } [0,\ell] \times [0,T], \\ v(0,\cdot) = v(\ell,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,T], \\ v(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,\ell]. \end{cases}$$

iv. Αποδείξτε ότι

$$\forall x \in [0,\ell]\ \ \forall t \in [0,T] \quad |u(x,t)| \le \mathrm{e}^{-t^2/2} \max_{0\le s\le \ell} |\varphi(s)|.$$

v. Αποδείξτε ότι

$$\forall t \in [0,T] \quad \|u(\cdot,t)\| \le \mathrm{e}^{-t^2/2} \|\varphi\|.$$

4. Στοιχεία θεωρίας σειρών του Fourier

Το κεφάλαιο αυτό είναι βοηθητικό, δεν αναφέρεται άμεσα στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Εδώ θα γνωρίσουμε ορισμένα στοιχεία από τη θεωρία των σειρών του Fourier, τα οποία στα επόμενα κεφάλαια θα μας είναι χρήσιμα στη μελέτη προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση και την εξίσωση της θερμότητας, καθώς επίσης και για προβλήματα συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση του Laplace.

4.1 Προκαταρκτικά

Έστω $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας πραγματικός γραμμικός χώρος με *εσωτερικό γινόμενο*. Σε έναν τέτοιο χώρο ισχύει η *ανισότητα των Cauchy–Schwarz*

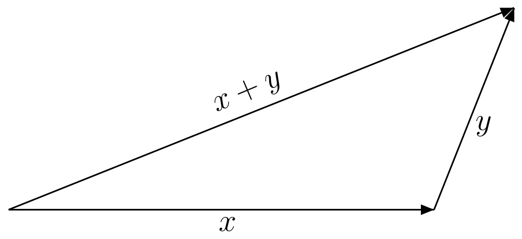
$$\forall\, x, y \in H \qquad \big|(x,y)\big| \le \sqrt{(x,x)}\,\sqrt{(y,y)}\,. \tag{4.1}$$

Η (4.1) είναι προφανής για $y = 0$. Αν $y \neq 0$, τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) := (x - \lambda y, x - \lambda y)$. Προφανώς $\varphi(\lambda) \ge 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ, και $\varphi(\lambda) = (y,y)\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (x,x)$. Αφού το τριώνυμο φ δεν αλλάζει πρόσημο, συμπεραίνουμε αμέσως ότι η διακρίνουσά του είναι μη θετική, συνεπώς

$$4\big[(x,y)^2 - (x,x)(y,y)\big] \le 0,$$

και από αυτή τη σχέση έπεται αμέσως η (4.1).

Με τη βοήθεια της ανισότητας των Cauchy–Schwarz διαπιστώνουμε εύκολα ότι η απεικόνιση $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$, $\|x\| := (x,x)^{1/2}$, αποτελεί *νόρμα* στον $H\cdot$ λέμε ότι αυτή η νόρμα *παράγεται* από το εσωτερικό γινόμενο. Ισχυριζόμαστε δηλαδή



Σχήμα 4.1: Σχηματική εξήγηση της τριγωνικής ανισότητας: Το μήκος $\|x+y\|$ της μιας πλευράς είναι το πολύ όσο και το άθροισμα $\|x\|+\|y\|$ των μηκών των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου.

ότι

(N1) $\qquad \forall x \in H \quad \|x\| = 0,$ εάν και μόνο εάν $x = 0,$

(N2) $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in H \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,$

(N3) $\qquad \forall x, y \in H \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$

Οι (N1) και (N2) έπονται αμέσως από τον ορισμό και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Όσον αφορά τη (N3), χρησιμοποιώντας την (4.1) έχουμε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2\\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,\end{aligned}$$

από την οποία έπεται αμέσως το αποτέλεσμα. Η (N3) καλείται, για ευνοήτους λόγους, *τριγωνική ανισότητα*, βλ. Σχήμα 4.1.

Αν για $x, y \in X$ ισχύει $(x,y) = 0$, τότε λέμε ότι τα x και y είναι *ορθογώνια*, ή *κάθετα* μεταξύ τους, και γράφουμε συμβολικά $x \perp y$. Όπως και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, ισχύει και εδώ το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η εύκολη απόδειξη του οποίου αφήνεται στον αναγνώστη.

Λήμμα 4.1 (Πυθαγόρειο Θεώρημα.) *Αν* $x, y \in H$ *και* $(x,y) = 0$, *τότε*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \qquad \square \tag{4.2}$$

Επίσης για νόρμες που παράγονται από εσωτερικό γινόμενο ισχύει, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, η *ισότητα του παραλληλογράμμου.*

Λήμμα 4.2 (Ισότητα του παραλληλογράμμου.) *Έστω* $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ *ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και* $\|\cdot\|$ *η παραγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα. Τότε ισχύει*

$$\forall\, x, y \in H \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{4.3}$$

Σημείωση. Κάθε νόρμα που παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί, όπως είδαμε, την ισότητα του παραλληλογράμμου. Αντίστροφα, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε νόρμα η οποία ικανοποιεί την ισότητα του παραλληλογράμμου παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο, συγκεκριμένα από το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον τύπο

$$\forall\, x, y \in X \qquad (x, y) := \frac{1}{4}\big[\, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big]. \tag{4.4}$$

Δίνουμε τώρα έναν χαρακτηρισμό *βέλτιστων προσεγγίσεων* (βλ. Ορισμό 4.1). Με τη βοήθεια αυτού του χαρακτηρισμού θα αποδείξουμε στη συνέχεια, για την περίπτωση που προσεγγίζουμε από υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης, ύπαρξη και μοναδικότητα, και θα δώσουμε επίσης έναν τρόπο υπολογισμού της βέλτιστης προσέγγισης.

Ορισμός 4.1 (Βέλτιστη προσέγγιση.) Έστω $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η παραγόμενη νόρμα. Έστω $\tilde H$ ένας υπόχωρος του H, και $x \in H$. Ένα στοιχείο $y \in \tilde H$ (αν υπάρχει), για το οποίο ισχύει

$$\forall\, z \in \tilde H \quad \|x-y\| \le \|x-z\|,$$

λέγεται *βέλτιστη προσέγγιση* του x από τον $\tilde H$.

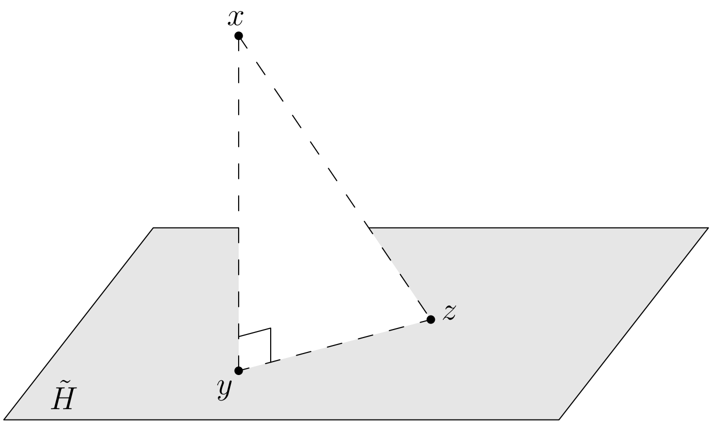
Πριν αποδείξουμε ύπαρξη, όταν ο υπόχωρος είναι πεπερασμένης διάστασης, δίνουμε έναν χαρακτηρισμό της βέλτιστης προσέγγισης.

Θεώρημα 4.1 (Χαρακτηρισμός βέλτιστων προσεγγίσεων.) *Έστω* $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ *ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο,* $\tilde H$ *ένας υπόχωρος του* H*, και* $x \in H$*. Ένα στοιχείο* $y \in \tilde H$ *είναι βέλτιστη προσέγγιση του* x *από τον* $\tilde H$*, αν και μόνο αν ισχύει*

$$\forall\, u \in \tilde H \quad (x, u) = (y, u) \tag{4.5}$$

ή ισοδύναμα

$$\forall\, u \in \tilde H \quad (x-y, u) = 0. \tag{4.5$'$}$$



Σχήμα 4.2: (4.5) $\Longrightarrow$ y είναι βέλτιστη προσέγγιση

Απόδειξη. Έστω κατ' αρχάς ότι ισχύει η (4.5). Τότε για $z \in \tilde{H}$ έχουμε $\|x-y\| \leq \|x-z\|$. Πράγματι, αφού $y-z \in \tilde{H}$, η (4.5) δίνει $(x-y, y-z) = 0$, οπότε σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\|x-z\|^2 = \big\|(x-y)+(y-z)\big\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$

Παρατηρήστε την αναλογία αυτής της απόδειξης με την απόδειξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το Πυθαγόρειο θεώρημα, ότι αν από σημείο x φέρουμε τη xy κάθετο σε ένα επίπεδο $\tilde{H}$ και $z \in \tilde{H}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα xz δεν μπορεί να έχει μικρότερο μήκος από το xy (Σχήμα 4.2).

Αντίστροφα τώρα, έστω $y \in \tilde{H}$ μια βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$, και έστω ότι υπάρχει $z \in \tilde{H}$ τέτοιο ώστε $(x-y, z) \neq 0$ (οπότε φυσικά $z \neq 0$). Τώρα για τη συνάρτηση

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi(\lambda) := \big\|x-(y+\lambda z)\big\|^2,$$

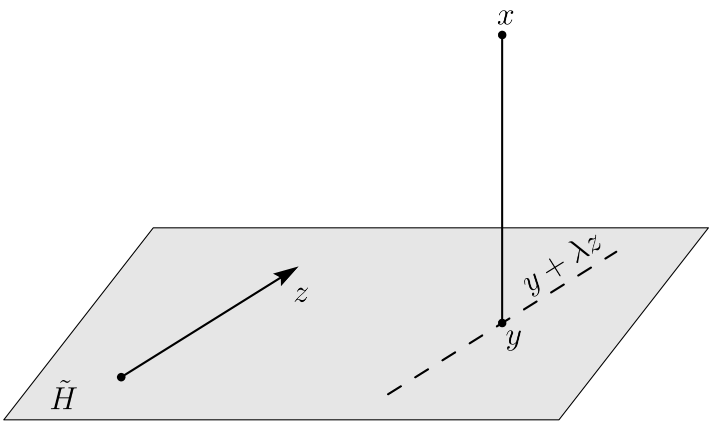
έχουμε

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= (x-y-\lambda z, x-y-\lambda z)\\ &= \|z\|^2\lambda^2 - 2\,(x-y,\ z)\,\lambda + \|x-y\|^2,\end{aligned}$$

οπότε

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \varphi(\lambda) = \varphi\left(\frac{(x-y,z)}{\|z\|^2}\right) < \varphi(0) = \|x-y\|^2,$$

άτοπο, γιατί το y είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$. Επομένως ισχύει $(x-y, z) = 0$ για κάθε $z \in \tilde{H}$, δηλαδή ικανοποιείται η (4.5).



Σχήμα 4.3: y είναι βέλτιστη προσέγγιση $\Longrightarrow$ (4.5)

Γεωμετρικά αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Αν το $x - y$ δεν είναι κάθετο στο z, τότε η κάθετος από το x στην ευθεία $y + \lambda z$, η οποία είναι παράλληλη προς το z, δεν είναι η xy (βλ. το Σχήμα 4.3). □

Μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης: Από το Θεώρημα 4.1 έπεται αμέσως η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης. Πράγματι, έστω $y, \tilde{y} \in \tilde{H}$ βέλτιστες προσεγγίσεις του x. Τότε

$$\forall u \in \tilde{H} \quad (x - y, u) = 0,$$
$$\forall u \in \tilde{H} \quad (x - \tilde{y}, u) = 0,$$

συνεπώς, αφαιρώντας κατά μέλη,

$$\forall u \in \tilde{H} \quad (y - \tilde{y}, u) = 0.$$

Θέτοντας σε αυτή τη σχέση $u := y - \tilde{y}$ λαμβάνουμε $\|y - \tilde{y}\| = 0$, δηλαδή $y = \tilde{y}$. □

Ύπαρξη της βέλτιστης προσέγγισης: Θα υποθέσουμε εδώ ότι ο υπόχωρος $\tilde{H}$, από τον οποίο προσεγγίζουμε, είναι *πεπερασμένης* διάστασης, $\dim \tilde{H} = n$. Αν $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι μια βάση του $\tilde{H}$, τότε η (4.5) ικανοποιείται, προφανώς, αν και μόνο αν ισχύει

$$(y, x_i) = (x, x_i)\,, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.6}$$

Επειδή $y \in \tilde{H}$ και $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι βάση του $\tilde{H}$, το y μπορεί να παρασταθεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ με $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας τώρα αυτήν την παράσταση στην (4.6) λαμβάνουμε το λεγόμενο *σύστημα κανονικών εξισώσεων*

$$
\left.\begin{aligned}
(x_1,x_1)\,\alpha_1+(x_1,x_2)\,\alpha_2+\cdots+(x_1,x_n)\,\alpha_n&=(x,x_1)\\
(x_2,x_1)\,\alpha_1+(x_2,x_2)\,\alpha_2+\cdots+(x_2,x_n)\,\alpha_n&=(x,x_2)\\
&\ \ \vdots\\
(x_n,x_1)\,\alpha_1+(x_n,x_2)\,\alpha_2+\cdots+(x_n,x_n)\,\alpha_n&=(x,x_n)
\end{aligned}\right\},\tag{4.7}
$$

δηλαδή ένα $n\times n$ γραμμικό σύστημα για τους n αγνώστους $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Για $x=0$ έχουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα, το οποίο έχει ως μόνη λύση την τετριμμένη, αφού η μόνη *βέλτιστη προσέγγιση* του μηδενικού διανύσματος από τον $\tilde H$ είναι το μηδενικό διάνυσμα. Συνεπώς το σύστημα (4.7) λύνεται μονοσήμαντα, και αυτό αποδεικνύει ότι για κάθε $x\in H$ υπάρχει ακριβώς μία βέλτιστη προσέγγιση y του x από έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $\tilde H$ του H. Σύμφωνα με την (4.5) η βέλτιστη προσέγγιση $y\in\tilde H$ ενός στοιχείου $x\in H$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $\tilde H$ με την ιδιότητα $(x-y,z)=0$ για κάθε $z\in\tilde H$, γι' αυτό και λέγεται *ορθογώνια προβολή* του x στον υπόχωρο $\tilde H$.

Ο πίνακας του συστήματος (4.7)

$$G(x_1,\dots,x_n):=\big((x_i,x_j)\big)_{i,j=1,\dots,n},$$

είναι γνωστός ως *πίνακας του Gram* για τα στοιχεία $x_1,\dots,x_n$, η δε αντίστοιχη ορίζουσα

$$\det G(x_1,\dots,x_n)$$

λέγεται *ορίζουσα του Gram*. Αν τα διανύσματα $x_1,\dots,x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε ο πίνακας του Gram είναι λοιπόν αντιστρέψιμος. Εύκολα μάλιστα διαπιστώνει κανείς ότι ο πίνακας αυτός είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος, βλ. την Άσκηση 4.2.

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων απλοποιείται στο μέγιστο δυνατό βαθμό, όταν η βάση είναι *ορθομοναδιαία* (*ορθοκανονική*), γιατί τότε ο πίνακας του Gram γίνεται μοναδιαίος. Θυμίζουμε ότι ένα σύστημα $\{e_1,\dots,e_n\}$ στοιχείων του H λέγεται ορθομοναδιαίο, αν

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & \text{για }\ i=j\\ 0 & \text{για }\ i\neq j\end{cases},\quad i,j=1,\dots,n.$$

Αν το ορθομοναδιαίο σύστημα $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι *βάση* του $\tilde{H}$, τότε αυτό λέγεται *ορθομοναδιαία βάση* του $\tilde{H}$. Ξεκινώντας από μια βάση του $\tilde{H}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθομοναδιαία βάση του με μια διαδικασία, η οποία είναι γνωστή ως *ορθοκανονικοποίηση κατά Gram–Schmidt*, βλ. την Άσκηση 4.4.

Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια ορθομοναδιαία βάση του υποχώρου $\tilde{H}$, από τον οποίο προσεγγίζουμε. Τότε από το σύστημα των κανονικών εξισώσεων (4.7) έπεται αμέσως ότι $\alpha_i = (x, e_i)$, και επομένως η βέλτιστη προσέγγιση $y \in \tilde{H}$ ενός στοιχείου x δίνεται από τη σχέση

$$y = (x, e_1)\, e_1 + \cdots + (x, e_n)\, e_n. \tag{4.8}$$

Παραστάσεις του είδους (4.8) λέγονται *αναπτύγματα του Fourier* ή *ορθογώνια αναπτύγματα*. Η πιο γνωστή περίπτωση είναι *οι σειρές του Fourier* περιοδικών συναρτήσεων, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα.

Θα δούμε τώρα ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες της βέλτιστης προσέγγισης. Κατ' αρχάς, από την (4.5′) έπεται ότι $(x-y, y) = 0$, συνεπώς κατά το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|x\|^2 = \|(x-y) + y\|^2 = \|y\|^2 + \|x-y\|^2,$$

δηλαδή

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 - \|x-y\|^2. \tag{4.9}$$

Ιδιαίτερα επομένως

$$\|y\| \le \|x\|, \tag{4.10}$$

δηλαδή η νόρμα της προσέγγισης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τη νόρμα του στοιχείου που προσεγγίζει.

Στην περίπτωση που προσεγγίζουμε από έναν χώρο πεπερασμένης διαστάσεως, η βέλτιστη προσέγγιση y δίνεται από την (4.8). Τώρα

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 = (y, y) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j\Big)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (x, e_i)\,(x, e_j)\,(e_i, e_j)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (x, e_i)\,(x, e_j)\,\delta_{ij},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)^2. \tag{4.11}$$

Άμεση συνέπεια των (4.10) και (4.11) είναι η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)^2 \le \|x\|^2, \tag{4.12}$$

η οποία είναι γνωστή ως *ανισότητα του Bessel.*

Ορισμός 4.2 (Πλήρη ορθομοναδιαία συστήματα.) Έστω $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα ορθομοναδιαίο σύστημα $\{e_1, e_2, \dots\} \subset H$ λέγεται *πλήρες* στον $\big(H, \|\cdot\|\big)$, αν ισχύει

$$\forall x \in H \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} \quad \|x - x_n\| < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Αν ισχύει η (4.13) για κάποιο $x_n \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, τότε θα έχουμε φυσικά και $\|x - y_n\| < \varepsilon$, όπου y_n η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, δηλαδή

$$y_n = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i.$$

Συνεπώς, θα έχουμε σε αυτήν την περίπτωση $\|x - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$, γεγονός που συμβολίζεται με $y_n \to x$, $n \to \infty$. Χρησιμοποιώντας τώρα τις (4.11) και (4.9), συμπεραίνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2 = \|x\|^2, \quad x \in H. \tag{4.14}$$

Η (4.14) λέγεται *ισότητα του Parseval.* Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ισότητα του Parseval είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ορθομοναδιαίο σύστημα πλήρες σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Σημειώνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2$$

συγκλίνει για κάθε $x \in H$ και για κάθε ορθομοναδιαίο σύστημα, όπως φαίνεται αμέσως από την (4.12). Η ισότητα του Parseval μας λέει ότι αυτή η σειρά δίνει $\|x\|^2$, όταν το σύστημα είναι πλήρες.

4.2 Σειρές του Fourier

Συμβολίζουμε με $C_{\text{περ.}}$ τον χώρο των συνεχών και περιοδικών, με περίοδο 2π, συναρτήσεων. Εισάγουμε στον $C_{\text{περ.}}$ το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ δια

$$(\varphi,\psi) := \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Χρησιμοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες διαπιστώνουμε πολύ εύκολα ότι το σύστημα συναρτήσεων $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$e_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ e_{2m-1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx),\ \ e_{2m}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx), \quad m\in\mathbb{N},$$

είναι ορθομοναδιαίο στον $\big(C_{\text{περ.}}(\cdot,\cdot)\big)$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ την παραγόμενη από το $(\cdot,\cdot)$ νόρμα στον $C_{\text{περ.}}$.

Έστω $f\in C_{\text{περ.}}$. Η βέλτιστη προσέγγιση S_nf της f από τον χώρο $\operatorname{span}(e_0,e_1,\dots,e_{2n})$ δίνεται, σύμφωνα με την (4.8), δια

$$S_nf = \sum_{m=0}^{2n}\alpha_m e_m, \tag{4.15}$$

όπου

$$\alpha_m := \int_0^{2\pi} f(x)e_m(x)\,dx. \tag{4.16}$$

Σύμφωνα με την ανισότητα του Bessel έχουμε

$$\sum_{m=0}^{2n}\alpha_m^2 \le \|f\|^2. \tag{4.17}$$

Η S_nf καλείται *$n-$στό* μερικό άθροισμα *της σειράς Fourier της* f. Πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι η S_nf γράφεται και στη μορφή

$$(S_nf)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}\big[a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx)\big], \tag{4.18}$$

όπου

$$\begin{cases} a_m := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx, & m=0,1,\dots, \\ b_m := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,dx, & m=1,2,\dots, \end{cases} \tag{4.19}$$

οι *συντελεστές Fourier της* f.

Σημειώστε ότι με αυτούς τους συμβολισμούς η (4.17) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{2}\,a_0^2+\sum_{m=1}^{n}\left(a_m^2+b_m^2\right)\le\frac{1}{\pi}\|f\|^2. \tag{4.20}$$

Επαναλαμβάνουμε ότι S_nf είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f στη νόρμα $\|\cdot\|$ από τον χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\mathcal{T}_n$, των γραμμικών συνδυασμών των συναρτήσεων $1,\cos(mx),\sin(mx),m=1,\dots,n$.

Το ερώτημα τώρα είναι, με ποιον τρόπο συμπεριφέρεται η S_nf καθώς το n τείνει στο άπειρο. Σε αυτή τη γενικότητα το θέμα είναι πολύ δύσκολο και αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της Αρμονικής Ανάλυσης, δηλαδή της θεωρίας των σειρών Fourier. Στην περίπτωση της νόρμας $\|\cdot\|$ όμως το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί πολύ εύκολα, όπως θα δούμε αμέσως τώρα.

Θα διατυπώσουμε πρώτα, χωρίς απόδειξη, το γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό θεώρημα προσεγγίσεως του Weiestrass για περιοδικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.2 (Θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass για περιοδικές συναρτήσεις.) *Έστω* $f\in C_{\text{περ.}}$. *Τότε, για κάθε* $\varepsilon>0$, *υπάρχει* $n\in\mathbb{N}$ *και* $f_n\in\mathcal{T}_n$, *τέτοιο ώστε*

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \qquad \square \tag{4.21}$$

Τώρα για κάθε $\varphi\in C_{\text{περ.}}$ ισχύει προφανώς

$$\|\varphi\|\le\sqrt{2\pi}\,\max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|. \tag{4.22}$$

Από την (4.22) και το Θεώρημα 4.2 έπεται ότι, για $f\in C_{\text{περ.}}$ και $\varepsilon>0$, υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $f_n\in\mathcal{T}_n$ τέτοια ώστε

$$\|f-f_n\|<\varepsilon,$$

οπότε, ιδιαίτερα, $\|f-S_nf\|<\varepsilon$ ή

$$\forall f\in C_{\text{περ.}}\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N\quad \|f-S_nf\|<\varepsilon, \tag{4.23}$$

δηλαδή

$$\forall f\in C_{\text{περ.}}\ \|f-S_nf\|\to 0,\quad n\to\infty. \tag{4.24}$$

Με άλλα λόγια το ορθομοναδιαίο σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι *πλήρες* στον χώρο $\big(C_{\text{περ.}}, (\cdot,\cdot)\big)$, η σειρά του Fourier μιας συναρτήσεως $f \in C_{\text{περ.}}$, δηλαδή η ακολουθία $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει στην f στη νόρμα $\|\cdot\|$.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι, αν μια συνάρτηση $f \in C_{\text{περ.}}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε η $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Πρώτα όμως ορισμένες βοηθητικές παρατηρήσεις. Έστω λοιπόν $f \in C_{\text{περ.}}$, συνεχώς παραγωγίσιμη. Συμβολίζουμε με a_m, b_m και a'_m, b'_m τους συντελεστές Fourier των f και f', αντίστοιχα. Τότε $a'_0 = 0$, και

$$\begin{aligned} a'_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(mx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}[f(x)\cos(mx)]_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{m}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \\ &= mb_m, \quad m\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

και, εντελώς ανάλογα, $b'_m = -ma_m$, $m \in \mathbb{N}$. Συνολικά λοιπόν

$$a_m = -\frac{1}{m}\,b'_m, \quad b_m = \frac{1}{m}\,a'_m, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση φ, $\varphi(x) := [\alpha\sin(mx) - \beta\cos(mx)]^2$. Τότε

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha^2\sin^2(mx) + \beta^2\cos^2(mx) - 2[\alpha\cos(mx)]\,[\beta\sin(mx)] \\ &\le \alpha^2\sin^2(mx) + \beta^2\cos^2(mx) + \alpha^2\cos^2(mx) + \beta^2\sin^2(mx) \\ &= \alpha^2+\beta^2, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad |\alpha\sin(mx) - \beta\cos(mx)| \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,. \tag{4.26}$$

(Ακόμα ευκολότερα αποδεικνύεται η αντίστοιχη εκτίμηση με έναν παράγοντα δύο στο δεξιό μέλος.)

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη του αποτελέσματος που προαναφέραμε.

Θεώρημα 4.3 (Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών Fourier.) *Έστω $f \in C_{\text{περ.}}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε η $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή*

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\ge N \quad \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - (S_n f)(x)| < \varepsilon. \tag{4.27}$$

Απόδειξη. Με τους συμβολισμούς που εισαγάγαμε προηγουμένως, θα αποδείξουμε κατ' αρχάς ότι η σειρά

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(a'_m)^2+(b'_m)^2}}{m} \tag{4.28}$$

συγκλίνει. Πράγματι, για $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy–Schwarz έχουμε

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\sqrt{(a'_m)^2+(b'_m)^2} \le \Big(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{m=1}^{n}\big[(a'_m)^2+(b'_m)^2\big]\Big)^{1/2},$$

οπότε, κατά την (4.20),

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\sqrt{(a'_m)^2+(b'_m)^2} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\|f'\|\Big(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\Big)^{1/2}.$$

Η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ συγκλίνει, όπως γνωρίζουμε, συνεπώς και η σειρά που εξετάζουμε συγκλίνει.

Τώρα, όπως είδαμε στην (4.25), έχουμε

$$|a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx)| = \frac{1}{m}|a'_m\sin(mx)-b'_m\cos(mx)|\,,$$

οπότε, σύμφωνα με την (4.26),

$$|a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx)| \le \frac{1}{m}\sqrt{(a'_m)^2+(b'_m)^2}\,. \tag{4.29}$$

Από την (4.29) και τη σύγκλιση της σειράς (4.28) έπεται ότι η σειρά του Fourier της f,

$$\frac{1}{2}\,a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\big[a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx)\big]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα. Απομένει τώρα να αποδείξουμε ότι συγκλίνει προς το σωστό όριο, δηλαδή προς την f. Έστω ότι συγκλίνει προς μια συνάρτηση φ. Τότε με βάση την (4.22) συμπεραίνουμε ότι

$$\|\varphi - S_nf\| \to 0, \quad n\to\infty,$$

οπότε χρησιμοποιώντας την (4.24) διαπιστώνουμε ότι $\varphi = f$. □

Ας δούμε τώρα πώς έχουν τα πράγματα στην περίπτωση που η περίοδος είναι $p \ne 2\pi$. Έστω λοιπόν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής, περιοδική συνάρτηση με περίοδο

p. Τότε η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(\frac{p}{2\pi}x)$ είναι προφανώς περιοδική με περίοδο 2π. Επίσης, αμέσως διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$g\big(\frac{2\pi}{p}x\big) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

Τώρα για τους συντελεστές Fourier της g, με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{p}{2\pi}x$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{p}\int_0^p g\big(\frac{2\pi}{p}y\big)\cos\big(\frac{2\pi}{p}ny\big)\,dy,\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{p}\int_0^p g\big(\frac{2\pi}{p}y\big)\sin\big(\frac{2\pi}{p}ny\big)\,dy, \end{aligned}$$

συνεπώς, κατά την (4.30),

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(x)\cos(\frac{2\pi}{p}nx)\,dx,\\ b_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(x)\sin(\frac{2\pi}{p}nx)\,dx. \end{cases} \tag{4.31}$$

Γνωρίζοντας τη σειρά Fourier της g και λαμβάνοντας υπ' όψιν πάλι την (4.30), οδηγούμεθα στην εξής σειρά του Fourier για την f

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos\big(\frac{2\pi}{p}nx\big) + b_n\sin\big(\frac{2\pi}{p}nx\big)\Big].$$

Περί συγκλίσεως κ.λπ. ισχύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως στην περίπτωση $p = 2\pi$.

Ασκήσεις

4.1 Έστω $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\|\cdot\|$ η παραγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα.

(i) Αποδείξτε ότι για $x, y \in H$ ισχύει

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y). \tag{$\star$}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας την (i), αποδείξτε τα Λήμματα 4.1 και 4.2.

4.2 Έστω $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1,\dots,x_n \in H$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Αποδείξτε ότι ο πίνακας του Gram G για τα $x_1,\dots,x_n$, του οποίου τα στοιχεία δίδονται δια $G_{ij} := (x_i, x_j)$, $i,j=1,\dots,n$, είναι θετικά ορισμένος.

4.3 Έστω $f \in C_{\text{περ.}}$. Αποδείξτε ότι η σειρά του Fourier της f δεν περιέχει ημίτονα, αν η f είναι άρτια, και δεν περιέχει συνημίτονα, αν η f είναι περιττή.

4.4 (Ορθοκανονικοποίηση κατά Gram–Schmidt.) Έστω $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1,\dots,x_n \in H$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Ορίζουμε τότε τα διανύσματα $e_1,\dots,e_n$ αναδρομικά δια

$$\begin{aligned}
e_1' &:= x_1\\
e_2' &:= x_2 - \frac{(x_2,e_1')}{(e_1',e_1')}\,e_1'\\
e_3' &:= x_3 - \frac{(x_3,e_2')}{(e_2',e_2')}\,e_2' - \frac{(x_3,e_1')}{(e_1',e_1')}\,e_1'\\
&\ \vdots\\
e_n' &:= x_n - \frac{(x_n,e_{n-1}')}{(e_{n-1}',e_{n-1}')}\,e_{n-1}' - \cdots - \frac{(x_n,e_1')}{(e_1',e_1')}\,e_1'.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τα διανύσματα $e_1,\dots,e_n$ δια $e_i := \frac{1}{\|e_i'\|}\,e_i', i=1,\dots,n.$

(i) Αποδείξτε ότι τα $e_1',\dots,e_{k-1}'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι το e_k' ορίζεται καλώς.

(ii) Αποδείξτε ότι τα $e_1',\dots,e_n'$ είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ των.

(iii) Αποδείξτε ότι τα $e_1,\dots,e_n$ αποτελούν ένα ορθομοναδιαίο σύστημα.

(iv) Αποδείξτε ότι $x_k - e_k'$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x_k από τον χώρο που παράγουν τα $x_1,\dots,x_{k-1}$.

4.5 Έστω $f \in C_{\text{περ.}}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $\big((S_nf)'\big)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου S_nf το $n-$στό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f, συγκλίνει ομοιόμορφα στην f'.

4.6 Αποδείξτε ότι για $x \neq 2k\pi$ ισχύει

$$\sum_{m=1}^{n}\cos(mx) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin\big(\frac{2n+1}{2}x\big)}{\sin\frac{x}{2}} - 1\Big].$$

[*Υπόδειξη*:
Πρώτος τρόπος: $\sin\frac{x}{2}\cos(mx) = \frac{1}{2}\Big[\sin\big(\frac{2m+1}{2}x\big) - \sin\big(\frac{2m-1}{2}x\big)\Big]$.

Δεύτερος τρόπος: $\cos(mx) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\big)$.]

4.7 Έστω $r \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{m=1}^{n} r^m \cos(mx).$$

4.8 Είναι γνωστό ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς του Fourier μιας συνάρτησης $f \in C[0, 2\pi]$ (όχι αναγκαστικά περιοδικής) συγκλίνουν προς την f στη νόρμα $\|\cdot\|$,

$$\|\varphi\| := \Big(\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Ποια είναι η σειρά Fourier της συναρτήσεως $f(x) = x - \pi, x \in [0, 2\pi)$; Αποδείξτε ότι από την ισότητα του Parseval γι' αυτή τη συνάρτηση και το συγκεκριμένο ορθομοναδιαίο σύστημα έπεται η σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

5. Χωρισμός μεταβλητών για τις εξισώσεις της θερμότητας και του κύματος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας για τις σειρές του Fourier και την τεχνική του *χωρισμού των μεταβλητών* για να προσδιορίσουμε παραστάσεις των λύσεων των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών σε ένα φραγμένο διάστημα για την κυματική εξίσωση και για την εξίσωση της θερμότητας.

Πρώτα θα μελετήσουμε την περίπτωση συνοριακών συνθηκών Dirichlet, ξεχωριστά για τις εξισώσεις της θερμότητας και του κύματος, και στη συνέχεια την περίπτωση συνοριακών συνθηκών Neumann για την εξίσωση της θερμότητας (η περίπτωση της εξισώσεως του κύματος αντιμετωπίζεται ανάλογα) καθώς και την περίπτωση της μη ομογενούς εξισώσεως της θερμότητας.

5.1 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Όπως αναφέραμε ήδη, θα μελετήσουμε ξεχωριστά τις εξισώσεις της θερμότητας και του κύματος. Αρχίζουμε με την εξίσωση της θερμότητας.

5.1.1 Η εξίσωση της θερμότητας

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases} \tag{5.1}$$

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχάς να προσδιορίσουμε πολλές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε εν συνεχεία για να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος (5.1). Θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις v του (5.2) της μορφής

$$v(x,t) = X(x)T(t), \tag{5.3}$$

γι' αυτό και μιλάμε για *χωρισμό των μεταβλητών*. Για μια συνάρτηση v της μορφής (5.3) η διαφορική εξίσωση $v_t = kv_{xx}$ γράφεται

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t).$$

Διαιρώντας δια $kX(x)T(t)$ λαμβάνουμε

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Το αριστερό μέρος αυτής της ισότητας είναι ανεξάρτητο του x και το δεξιό είναι ανεξάρτητος του t. Συνεπώς αμφότερα είναι ανεξάρτητα των x και t, δηλαδή είναι σταθερά. Θέτοντας

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{σταθερά}$$

οδηγούμεθα στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$T'(t) = -\lambda kT(t), \qquad t > 0, \tag{5.4}$$

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < \ell. \tag{5.5}$$

Οι λύσεις της (5.4) δίνονται προφανώς δια

$$T(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda kt}, \quad t > 0, \tag{5.6}$$

όπου A τυχαία σταθερά. Για να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες $v(0,t) = v(\ell,t) = 0$ από τη συνάρτηση της μορφής (5.3), δεδομένου ότι η T δεν μηδενίζεται, πρέπει και αρκεί για τις λύσεις X της (5.5) να ισχύει $X(0) = X(\ell) = 0$.

Γράφουμε λοιπόν αυτό το πρόβλημα ως εξής: Ζητούνται $\lambda \in \mathbb{R}$ και ομαλές, μη μηδενικές συναρτήσεις X τέτοια ώστε

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, & 0 < x < \ell, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Το πρόβλημα (5.7) είναι ένα *πρόβλημα ιδιοτιμών*. Τα λ για τα οποία υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις καλούνται *ιδιοτιμές*, τα αντίστοιχα X καλούνται *ιδιοσυναρτήσεις*. Πολλαπλασιάζοντας τη διαφορική εξίσωση στην (5.7) επί X, ολοκληρώνοντας στο $[0, \ell]$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη στον αριστερό όρο και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε

$$\int_0^\ell \big[X'(x)\big]^2\, dx = \lambda \int_0^\ell \big[X(x)\big]^2\, dx. \tag{5.8}$$

Από την (5.8) συμπεραίνουμε αμέσως ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος (5.7) είναι θετικοί αριθμοί. Θέτουμε λοιπόν $\lambda = \beta^2$, με $\beta > 0$, στη διαφορική εξίσωση στην (5.7) και έχουμε $X'' + \beta^2 X = 0$. Οι λύσεις αυτής της εξισώσεως είναι της μορφής $X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$, με σταθερές C και D. Για να ικανοποιεί αυτή η λύση τις συνοριακές συνθήκες πρέπει να έχουμε $X(0) = 0$, δηλαδή $C = 0$, καθώς και $X(\ell) = 0$, δηλαδή $D\sin(\beta\ell) = 0$. Για να πληρούται η δεύτερη συνθήκη για $D \neq 0$ πρέπει να έχουμε $\beta\ell = n\pi$, δηλαδή $\beta = \frac{n\pi}{\ell}$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές λ_n και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_n, n = 1, 2, \dots,$ του προβλήματος (5.7) δίνονται δια

$$\lambda_n = \big(\frac{n\pi}{\ell}\big)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Από τις (5.3), (5.6) και (5.9) λαμβάνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων v_n,

$$v_n(x,t) = A_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.10}$$

του προβλήματος (5.2), όπου A_n τυχούσες σταθερές.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα (5.1). Για λόγους συμβατότητας έχουμε $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$. Ας δούμε κατ' αρχάς σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε, ενδεχομένως, να πάρουμε τη λύση του προβλήματος (5.1) ως *πεπερασμένο* γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $v_1, \dots, v_N$, $N \in \mathbb{N}$, βλ. την (5.10). Προφανώς, για οποιεσδήποτε σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$, η u,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (5.1). Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται, προφανώς, αν και μόνο αν η φ είναι της μορφής

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\,,$$

δηλαδή αν η φ είναι ένα περιττό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο 2ℓ. Ανακεφαλαιώνοντας, η λύση του προβλήματος (5.1) γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής (5.10), αν και μόνο αν η αρχική συνθήκη φ είναι περιττό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο 2ℓ ή ακριβέστερα ο περιορισμός στο διάστημα $[0,\ell]$ ενός τέτοιου τριγωνομετρικού πολυωνύμου.

Στη γενική περίπτωση, επεκτείνουμε τη φ κατά περιττό τρόπο στο διάστημα $[-\ell,0)$ και εν συνεχεία σε όλη την ευθεία περιοδικά με περίοδο 2ℓ. Έστω $\varphi_{\text{επεκ.}}$ η συνάρτηση που λαμβάνουμε κατ' αυτόν τον τρόπο. Αν η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε, όπως διαπιστώνουμε εύκολα, και η $\varphi_{\text{επεκ.}}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Θεωρούμε τη σειρά του Fourier της $\varphi_{\text{επεκ.}}$, η οποία είναι φυσικά σειρά ημιτόνων, αφού η $\varphi_{\text{επεκ.}}$ είναι περιττή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε η σειρά του Fourier της $\varphi_{\text{επεκ.}}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα προς τη $\varphi_{\text{επεκ.}}$,

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\big(\frac{\pi}{\ell} nx\big), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.11}$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\big(\frac{\pi}{\ell} nx\big)\, dx, \tag{5.12}$$

βλ. την (4.31). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.10) και (5.11) ισχυριζόμεθα ότι η λύση u του προβλήματος (5.1) δίνεται ως

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0, \tag{5.13}$$

όπου b_n οι συντελεστές Fourier της $\varphi_{\text{επεκ.}}$ που δίνονται από την (5.12). (Για να είναι η u άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη για θετικό t, αρκεί η συνέχεια της φ. Υποθέσαμε ότι η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, για να εξασφαλίσουμε συνέχεια της u για $t \ge 0$.) Σημειώνουμε κατ' αρχάς ότι χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt}| \leq 1$ και την ομαλότητα της $\varphi_{\text{επεκ.}}$, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η σειρά στην (5.13) συγκλίνει ομοιόμορφα, συνεπώς η u που δίνεται από την (5.13) είναι συνεχής. Τώρα είναι προφανές ότι η u ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet, και με τη βοήθεια της (5.11) διαπιστώνουμε εύκολα ότι $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq \ell$. Τέλος χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κατά την ανισότητα του Bessel η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνει, καθώς και γνωστές ιδιότητες της εκθετικής συναρτήσεως, διαπιστώνουμε ότι η u που δίνεται από την (5.13) είναι για $t > 0$ άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι η παραγώγιση αντιμετατίθεται με το σύμβολο της άθροισης, οπότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι v_n ικανοποιούν την εξίσωση της θερμότητας συμπεραίνουμε ότι και για τη u ισχύει $u_t = ku_{xx},\ 0 < x < \ell, t > 0$, δηλαδή η u είναι λύση του προβλήματος (5.1).

Προφανώς, όσα αναφέρθηκαν για την περίπτωση που η αρχική συνθήκη είναι περιορισμός στο διάστημα $[0,\ell]$ ενός περιττού τριγωνομετρικού πολυωνύμου με περίοδο 2ℓ προκύπτουν ως ειδική περίπτωση και από τη γενική μελέτη, δηλαδή η σειρά Fourier έχει τότε πεπερασμένου πλήθους μη μηδενικούς συντελεστές.

5.1.2 Η κυματική εξίσωση

Θα ασχοληθούμε τώρα εν συντομία με το αντίστοιχο πρόβλημα για την κυματική εξίσωση. Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την κυματική εξίσωση με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε ένα φραγμένο διάστημα:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases} \tag{5.14}$$

όπου φ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, και ψ μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμη. Πάλι θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε πολλές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{5.15}$$

της μορφής

$$v(x,t) = X(x)T(t). \tag{5.16}$$

Για μια v της μορφής (5.16) η διαφορική εξίσωση στο (5.15) γράφεται

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t),$$

οπότε διαιρώντας δια c^2XT έχουμε

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{σταθερά},$$

συνεπώς για την T οδηγούμεθα στη διαφορική εξίσωση

$$T''(t) = -\lambda c^2 T(t), \quad t \geq 0, \tag{5.17}$$

για δε τη X, αν λάβουμε υπ' όψιν μας και τις συνοριακές συνθήκες, στο πρόβλημα ιδιοτιμών (5.7). Το πρόβλημα (5.7) το έχουμε λύσει ήδη· τώρα, για $\lambda = \lambda_n = (\frac{n\pi}{\ell})^2$, βλ. την (5.9), οι λύσεις της (5.17) είναι της μορφής

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.18}$$

όπου A_n και B_n τυχούσες σταθερές.

Από τις (5.3), (5.9) και (5.18) λαμβάνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων v_n,

$$v_n(x,t) = \big[A_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}\big] \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.19}$$

του προβλήματος (5.15), όπου A_n και B_n τυχούσες σταθερές.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα (5.14). Για λόγους συμβατότητας έχουμε $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0$. Όπως και για την εξίσωση της θερμότητας, ας δούμε και εδώ κατ' αρχάς σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε, ενδεχομένως, να πάρουμε τη λύση του προβλήματος (5.14) ως *πεπερασμένο* άθροισμα συναρτήσεων $v_1, \dots, v_N$, $N \in \mathbb{N}$, της μορφής (5.19). Προφανώς, για οποιεσδήποτε σταθερές $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, η u,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \big[a_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}\big] \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{5.20}$$

ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (5.14). Απομένει, συνεπώς, να δούμε κατά πόσον και σε ποιες περιπτώσεις μια u της μορφής (5.20) ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες. Κατ' αρχάς έχουμε

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,. \tag{5.21}$$

Επίσης

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi c}{\ell}\big[-a_n\sin\frac{n\pi ct}{\ell}+b_n\cos\frac{n\pi ct}{\ell}\big]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,$$

οπότε

$$u_t(x,0)=c\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{\ell}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,. \tag{5.22}$$

Βάσει των (5.21) και (5.22) οδηγούμεθα στο συμπέρασμα ότι η λύση του προβλήματος (5.14) είναι της μορφής (5.20), εάν και μόνον εάν οι αρχικές τιμές φ και ψ είναι περιττά τριγωνομετρικά πολυώνυμα με περίοδο 2ℓ. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ότι οι φ και ψ ορίζονται, ως τριγωνομετρικά πολυώνυμα, σε όλο το $\mathbb{R}$. Μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση τα a_n είναι, προφανώς, οι συντελεστές Fourier της φ. Όσον αφορά τα b_n, παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\psi(x)=c\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{\ell}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,$$

βλ. την (5.22), δίνει

$$\int_0^x\psi(s)\,ds=C-c\sum_{n=1}^{N}b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,,$$

δηλαδή τα $-b_n, n=1,\dots,N$, είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $\varPsi$,

$$\varPsi(x)=\int_0^x\psi(s)\,ds,$$

διαιρεμένοι δια c. Συνηθίζεται να γράφουμε την (5.20) στη μορφή

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\big[a_n\cos\frac{n\pi ct}{\ell}-\frac{1}{c}b_n\sin\frac{n\pi ct}{\ell}\big]\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{5.20$'$}$$

ώστε τα a_n και b_n να είναι τώρα οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων φ και $\varPsi$, αντίστοιχα.

Στη γενική περίπτωση, επεκτείνουμε τις φ και ψ κατά περιττό τρόπο στο διάστημα $(-\ell, 0)$ και στη συνέχεια σε όλη την πραγματική ευθεία περιοδικά με περίοδο 2ℓ. Συμβολίζουμε με $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ τις συναρτήσεις που λαμβάνουμε κατ' αυτόν τον τρόπο. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι φ και ψ είναι δύο φορές και μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχα, συμπεραίνουμε εύκολα ότι οι $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ είναι δύο φορές και μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες, αντίστοιχα. Επί πλέον οι $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\psi_{\text{επεκ.}}$ είναι περιττές συναρτήσεις. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$\Psi_{\text{επεκ.}}(x) := \int_0^x \psi_{\text{επεκ.}}(s)\,ds, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $\Psi_{\text{επεκ.}}$ είναι άρτια συνάρτηση. Επί πλέον, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_\alpha^{\alpha+2\ell} \psi_{\text{επεκ.}}(s)\,ds = \int_{-\ell}^{\ell} \psi_{\text{επεκ.}}(s)\,ds = 0,$$

διαπιστώνουμε αμέσως ότι η $\Psi_{\text{επεκ.}}$ είναι περιοδική με περίοδο 2ℓ. Θεωρούμε τώρα τις σειρές Fourier των συναρτήσεων $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\Psi_{\text{επεκ.}}$, οι οποίες φυσικά είναι σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων, αντίστοιχα. Κατά τα γνωστά οι σειρές αυτές συγκλίνουν ομοιόμορφα. Έχουμε

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{5.23}$$

$$\Psi_{\text{επεκ.}}(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{5.24}$$

όπου a_n και b_n οι συντελεστές Fourier των $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\Psi_{\text{επεκ.}}$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου η σειρά Fourier της $\psi_{\text{επεκ.}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την $\psi_{\text{επεκ.}}$ και δίνεται δια

$$\psi_{\text{επεκ.}}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,. \tag{5.24$'$}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.9), (5.18), (5.23) και (5.24) ισχυριζόμεθα ότι, υπό κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας των δεδομένων, η λύση του προβλήματος (5.14) δίνεται ως

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} - \frac{1}{c} b_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}\Big) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,, \tag{5.25}$$

όπου a_n και b_n όπως στις (5.23) και (5.24–24′), δηλαδή οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\Psi_{\text{επεκ.}}$, αντίστοιχα. Για τη συνάρτηση u που δίνεται από την (5.25) έχουμε: Προφανώς $u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ t \geq 0$. Επί πλέον, σύμφωνα με την (5.23),

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Τώρα παραγωγίζοντας τη σειρά στην (5.25) ως προς t και λαμβάνοντας υπ' όψιν την ομαλότητα των $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\Psi_{\text{επεκ.}}$, βλέπουμε εύκολα ότι η νέα σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα η u είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{n\pi c}{\ell} a_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell} - \frac{n\pi}{\ell} b_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} \Big) \sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

οπότε, σύμφωνα με την (5.24′),

$$u_t(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ell} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Όσον αφορά τώρα τη διαφορική εξίσωση, ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι οι δεύτερες παράγωγοι της u που δίνεται από την (5.25) λαμβάνονται παραγωγίζοντας τη σειρά όρο προς όρο. Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι v_n που δίνονται στην (5.19) ικανοποιούν την κυματική εξίσωση, διαπιστώνουμε αμέσως ότι και η u ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. Αν οι $\varphi_{\text{επεκ.}}$ και $\Psi_{\text{επεκ.}}$ είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3 διαπιστώνουμε αμέσως ότι οι δεύτερες παράγωγοι λαμβάνονται πράγματι δια παραγωγίσεως της σειράς όρο προς όρο. Αυτό πάντως επιτρέπεται και υπό ασθενέστερες συνθήκες, στις οποίες δεν θα αναφερθούμε εδώ γιατί απαιτούν λεπτομερέστερες γνώσεις από τη θεωρία των σειρών του Fourier.

5.2 Συνοριακές συνθήκες Neumann

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann:

$$\text{(5.26)} \qquad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Θα εργασθούμε όπως και στην περίπτωση ομογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet, και θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε πολλές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ v_x(0,t) = v_x(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{5.27}$$

της μορφής

$$v(x,t) = X(x)T(t). \tag{5.28}$$

Για να πληροί η v που δίνεται από την (5.28) τη διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (5.27) πρέπει να αρκεί να ισχύουν

$$T'(t) = -\lambda k T(t), \qquad t > 0, \tag{5.29}$$

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < \ell, \tag{5.30}$$

βλ. τις (5.4), (5.5). Οι λύσεις της (5.29) δίνονται προφανώς δια

$$T(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda k t}, \quad t > 0, \tag{5.31}$$

όπου A τυχούσα σταθερά. Για να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες $v_x(0,t) = v_x(\ell,t) = 0$ από τη συνάρτηση της μορφής (5.28) πρέπει και αρκεί για τις λύσεις X της (5.30) να ισχύει $X'(0) = X'(\ell) = 0$. Γράφουμε λοιπόν αυτό το πρόβλημα ως πρόβλημα ιδιοτιμών ως εξής: Ζητούνται $\lambda \in \mathbb{R}$ και ομαλές, μη μηδενικές συναρτήσεις X τέτοια ώστε

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, & 0 < x < \ell, \\ X'(0) = X'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{5.32}$$

Πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Για $\lambda = 0$ οι λύσεις της διαφορικής εξισώσεως είναι της μορφής $X(x) = C + Dx,\ C, D \in \mathbb{R}$, και για να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες πρέπει $D = 0$. Άρα στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ αντιστοιχεί η ιδιοσυνάρτηση $X_0(x) = 1$,

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \ell. \tag{5.33}$$

Για $\lambda > 0$ θέτουμε $\lambda = \beta^2$ και η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως γράφεται στη μορφή $X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x),\ C, D \in \mathbb{R}$. Τότε φυσικά $X'(x) =$

$-C\beta\sin(\beta x)+D\beta\cos(\beta x)$. Συνεπώς $X'(0) = D\beta$, οπότε η $X'(0) = 0$ συνεπάγεται $D = 0$. Επομένως $X'(\ell) = -C\beta\sin(\beta\ell)$. Για να πάρουμε συνεπώς μη τετριμμένες λύσεις πρέπει $\beta\ell = n\pi$ ή $\beta = \frac{n\pi}{\ell}$, οπότε $X(x) = \cos\frac{n\pi x}{\ell}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την (5.33), έχουμε τις εξής ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (5.32):

$$\lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.34}$$

Από τις (5.28), (5.34) και (5.31) λαμβάνουμε ένα άπειρο πλήθος λύσεων v_n,

$$v_n(x,t) = A_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt}\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

του προβλήματος (5.27), όπου A_n τυχούσες σταθερές.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα (5.26). Υποθέτουμε ότι η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,\ell]$. Για λόγους συμβατότητας έχουμε $\varphi'(0) = \varphi'(\ell) = 0$. Ας δούμε κατ' αρχάς σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε, ενδεχομένως, να πάρουμε τη λύση του προβλήματος (5.26) ως *πεπερασμένο* γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $v_0,\dots,v_N$, $N \in \mathbb{N}_0$. Προφανώς, για οποιεσδήποτε σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$, η u,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt}\cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (5.26). Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται, προφανώς, αν και μόνο αν η φ είναι της μορφής

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

δηλαδή είναι ένα άρτιο τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο 2ℓ.

Στη γενική περίπτωση, επεκτείνουμε τη φ κατά άρτιο τρόπο στο $(-\ell,0)$ και εν συνεχεία κατά περιοδικό τρόπο με περίοδο 2ℓ σε όλη την πραγματική ευθεία, και λαμβάνουμε τη συνάρτηση $\varphi_{\text{επεκ.}}$, η οποία είναι άρτια και συνεχώς παραγωγίσιμη. Η σειρά Fourier της $\varphi_{\text{επεκ.}}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα προς τη $\varphi_{\text{επεκ.}}$,

$$\varphi_{\text{επεκ.}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.35}$$

όπου

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

βλ. την (4.31). Όπως και στην περίπτωση ομογενών συνθηκών Dirichlet, διαπιστώνουμε ότι η λύση του προβλήματος (5.26) δίνεται ως

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 kt}\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0\le x\le \ell,\ t\ge 0, \tag{5.36}$$

όπου οι συντελεστές Fourier a_n δίνονται από την (5.35).

Ανάλογα οδηγούμεθα στη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann για την κυματική εξίσωση.

5.3 Μη ομογενείς εξισώσεις

Θα προσπαθήσουμε εδώ να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας για σειρές Fourier για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών με ομογενείς συνθήκες Dirichlet για τη μη ομογενή εξίσωση της θερμότητας. Η θεωρία που θα γνωρίσουμε εδώ και οι προηγούμενες γνώσεις μας, μας επιτρέπουν μετά εύκολα να διαπραγματευθούμε και το πρόβλημα για συνοριακές συνθήκες Neumann, καθώς και για την κυματική εξίσωση.

Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), & 0<x<\ell,\ t>0,\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le \ell. \end{cases} \tag{5.37}$$

Έχοντας ήδη μελετήσει το πρόβλημα (5.1), αρκεί να μελετήσουμε τώρα το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), & 0<x<\ell,\ t>0,\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=0, & 0\le x\le \ell. \end{cases} \tag{5.38}$$

Επεκτείνουμε την $f(\cdot,t)$ κατά περιττό (και ενδεχομένως ασυνεχή) τρόπο στο διάστημα $(-\ell,0)$ και στη συνέχεια περιοδικά με περίοδο 2ℓ στην πραγματική ευθεία. Συμβολίζουμε με $f_{\text{επεκ.}}$ την προκύπτουσα συνάρτηση. Ανάλογα συμβολίζουμε με $u_{\text{επεκ.}}$ τη συνάρτηση που προκύπτει δια επεκτάσεως με τον ίδιο τρόπο της (άγνωστης) συνάρτησης u. Οι $f_{\text{επεκ.}}(\cdot,t)$ και $u_{\text{επεκ.}}(\cdot,t)$ είναι φυσικά περιττές συναρτήσεις. Συμβολίζουμε με $B_n(t)$ και $b_n(t)$ τους συντελεστές Fourier αυτών των συναρτήσεων,

$$\begin{cases} b_n(t) = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^\ell u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, & n\in\mathbb{N},\ t\ge 0,\\ B_n(t) = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^\ell f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, & n\in\mathbb{N},\ t\ge 0.\end{cases} \tag{5.39}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η u είναι αρκετά ομαλή, γεγονός που εξασφαλίζεται όταν η f υποτεθεί ομαλή, και βλέπουμε εύκολα ότι οι συντελεστές Fourier των $u_t(\cdot,t)$ και $u_{xx}(\cdot,t)$ είναι $b_n'(t)$ και $-(\frac{n\pi}{\ell})^2 b_n(t)$, αντίστοιχα. Συνεπώς για να ισχύει η $u_t = ku_{xx}+f$ πρέπει και αρκεί να έχουμε

$$b_n'(t) + k\Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2 b_n(t) = B_n(t), \quad t\ge 0, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.40i}$$

Το γεγονός ότι ισχύει $u(x,0)=0$, συνεπάγεται φυσικά

$$b_n(0) = 0, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.40ii}$$

Οι άγνωστοι συντελεστές Fourier b_n υπολογίζονται από τους γνωστούς συντελεστές Fourier B_n λύνοντας τα προβλήματα αρχικών τιμών (5.40). Τα προβλήματα αυτά λύνονται πολύ εύκολα και έχουμε

$$b_n(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 k(t-s)} B_n(s)\,ds, \quad t\ge 0, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.41}$$

Η λύση u του προβλήματος (5.38) δίνεται τότε ως

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \Big[\int_0^t \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 k(t-s)} B_n(s)\,ds\Big]\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \ 0\le x\le \ell,\ t\ge 0, \tag{5.42}$$

όπου οι συναρτήσεις B_n δίνονται από την (5.39).

Στην περίπτωση που η σειρά στην (5.42) είναι πεπερασμένο άθροισμα, δηλαδή όταν μόνο πεπερασμένο πλήθος των B_n είναι μη μηδενικές συναρτήσεις, με άλλα λόγια όταν η $f(\cdot,t)$ είναι περιττό τριγωνομετρικό πολυώνυμο με περίοδο 2ℓ, ως προς την πρώτη της μεταβλητή, διαπιστώνει κανείς αμέσως ότι η u

που δίνεται από την (5.42) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $u_t = ku_{xx} + f$ και αποτελεί λύση του προβλήματος (5.38).

Στη γενική περίπτωση, για να ολοκληρωθεί αυτή η μελέτη θα έπρεπε να αποδείξει κανείς ότι, υπό κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας της f, η u που δίνεται από την (5.42) είναι αρκετά ομαλή ώστε οι παράγωγοι u_t και u_{xx} να υπολογίζονται παραγωγίζοντας τη σειρά Fourier της $u(\cdot, t)$ όρο προς όρο.

Ασκήσεις

5.1 Έστω u η περιοδική ως προς την πρώτη μεταβλητή, με περίοδο ℓ, λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου φ μια συνεχώς παραγωγίσιμη και περιοδική με περίοδο ℓ συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της φ προσδιορίστε μια παράσταση της u.

5.2 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(\star) \qquad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

όπου φ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε το πρόβλημα να έχει ομαλή λύση. Αποδείξτε κατ' αρχάς ότι οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος ιδιοτιμών

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \ell, \\ X(0) = X'(\ell) = 0, \end{cases}$$

δίνονται δια

$$\lambda_n = \big(n + \frac{1}{2}\big)^2 \big(\frac{\pi}{\ell}\big)^2, \quad X_n(x) = \sin\big[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{\ell}\big], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

και χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να προσδιορίσετε μια παράσταση της λύσεως του προβλήματος $(\star)$.

5.3 (Συνοριακές συνθήκες Robin.) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(\star)\qquad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u_x(\ell,t) + \beta u(\ell,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \ge 0$, και φ συνεχής συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ενέργειας αποδείξτε ότι το πρόβλημα $(\star)$ έχει το πολύ μία ομαλή λύση.

5.4 Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \ell, \\ X'(0) - \alpha X(0) = 0, & \\ X'(\ell) + \beta X(\ell) = 0, & \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta > 0$. Προσδιορίστε κάποιες εξισώσεις για τις ιδιοτιμές. [Οι εξισώσεις αυτές δεν μπορούν γενικά να λυθούν εύκολα, γι' αυτό και δεν είναι εύκολο να προσδιορίσουμε μια παράσταση της λύσεως του προβλήματος $(\star)$ της Άσκησης 5.3 χρησιμοποιώντας σειρές Fourier].

5.5 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} & \text{στο } [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,\pi], \\ u(0,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,\infty), \\ u(\pi,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,\infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2\sin x - \sin(2x) + 3\sin(5x)$.

5.6 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + u & \text{στο } [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,\pi], \\ u(0,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,\infty), \\ u(\pi,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,\infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2\sin x - \sin(2x) + 3\sin(5x)$, με δύο τρόπους:

- Με χωρισμό μεταβλητών.
- Ανάγοντας, με την αλλαγή μεταβλητής $v(x,t) = \mathrm{e}^{-t}u(x,t)$, το πρόβλημα σε εκείνο της Άσκησης 5.5.

5.7 Προσδιορίστε τη λύση $u = u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & \text{στο } [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(0,\cdot) = u(\pi,\cdot) = 0 & \text{στο } [0,\infty), \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στο } [0,\pi], \\ u_t(\cdot,0) = \psi & \text{στο } [0,\pi], \end{cases}$$

όπου $\varphi, \psi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2\sin x - \sin(2x) + 3\sin(5x)$ και $\psi(x) = 3\sin(2x) + \sin(4x) - 5\sin(6x)$.

6. Η εξίσωση του Laplace

Συμβολίζουμε με Δ τη Λαπλασιανή σε δύο και τρεις διαστάσεις

$$\Delta v := v_{xx} + v_{yy}$$
$$\Delta v := v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$$

για συναρτήσεις δύο και τριών μεταβλητών, αντίστοιχα. Η *εξίσωση του Laplace* είναι της μορφής $\Delta u = 0$, η μη ομογενής εξίσωση $\Delta u = f$ καλείται *εξίσωση του Poisson*. Έστω D ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο (χωρίο = ανοικτό μη κενό σύνολο) στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση του Poisson με συνοριακές συνθήκες Dirichlet: Ζητείται μια συνάρτηση $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $\bar{D}$ και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο D, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στο } D, \\ u = h & \text{στο } \partial D, \end{cases} \tag{6.1}$$

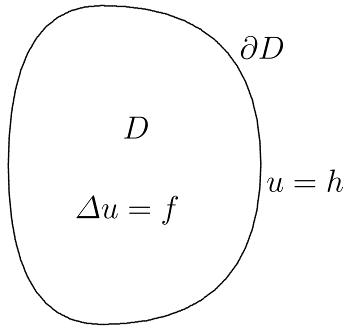
όπου ∂D το σύνορο του D και f, h δεδομένες συναρτήσεις. Θα αποδείξουμε μοναδικότητα της λύσεως, και για ορισμένες περιπτώσεις θα προσδιορίσουμε παραστάσεις της λύσεως.

Το πρόβλημα (6.1) διασπάται εύκολα σε δύο ειδικότερα προβλήματα, ένα για την εξίσωση του Poisson με ομογενείς συνοριακές συνθήκες και ένα για την εξίσωση του Laplace. Πράγματι, αν u_1 και u_2 είναι λύσεις των προβλημάτων

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στο } D, \\ u = 0 & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } D, \\ u = h & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$



Σχήμα 6.1: Το πρόβλημα για την εξίσωση του Poisson με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

αντίστοιχα, τότε το άθροισμά τους $u_1 + u_2$ αποτελεί λύση του αρχικού προβλήματος (6.1).

Επίσης, αν u_1 είναι μια οποιαδήποτε ομαλή λύση της εξίσωσης του Poisson, $\Delta u = f$, και u_2 λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } D, \\ u = h - u_1 & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

τότε το άθροισμά τους $u_1 + u_2$ αποτελεί λύση του αρχικού προβλήματος (6.1). Αντίστοιχα, αν u_1 είναι μια οποιαδήποτε ομαλή συνάρτηση, που συμπίπτει με την h στο ∂D, και u_2 λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = \tilde{f} := -\Delta u_1 + f & \text{στο } D, \\ u = 0 & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

τότε πάλι το άθροισμα $u_1 + u_2$ αποτελεί λύση του αρχικού προβλήματος (6.1).

6.1 Η αρχή του μεγίστου

Μια συνάρτηση u δύο ή τριών μεταβλητών καλείται *αρμονική* σε ένα χωρίο D, αν ισχύει $\Delta u = 0$ στο D.

Θεώρημα 6.1 (Η αρχή του μεγίστου.) *Έστω D ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο σε δύο ή τρεις διαστάσεις. Έστω $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, συνεχής στο $\bar{D}$ και αρμονική στο D. Τότε τόσο το μέγιστο όσο και το ελάχιστο της u στο $\bar{D}$ λαμβάνονται και στο ∂D.*

Απόδειξη. Αν η u είναι αρμονική, τότε και η $-u$ είναι αρμονική. Αρκεί, συνεπώς, να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για το μέγιστο. Θα δώσουμε την απόδειξη για $D \subset \mathbb{R}^2$, για $D \subset \mathbb{R}^3$ η απόδειξη γίνεται εντελώς ανάλογα. Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $v : \bar{D} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) := u(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$. Τότε, για $(x,y) \in D$,

$$\Delta v = \Delta u + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0.$$

Αν η v λάμβανε το μέγιστό της σε ένα σημείο $(x,y) \in D$, τότε εκεί θα ίσχυε

$$v_{xx}(x,y) \leq 0, \quad v_{yy}(x,y) \leq 0,$$

άτοπο. Επομένως η v λαμβάνει το μέγιστό της στο $\bar{D}$ σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \partial D$. Έστω $\ell > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(x,y) \in \bar{D}$ να ισχύει $(x^2 + y^2)^{1/2} \leq \ell$. Τέτοιο ℓ υπάρχει φυσικά, αφού το D είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $(x,y) \in D$, θα έχουμε

$$u(x,y) \leq v(x,y) \leq v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) + \varepsilon(x_0^2 + y_0^2) \leq u(x_0,y_0) + \varepsilon\ell^2,$$

συνεπώς

$$u(x,y) \leq \max_{(s,t)\in\partial D} u(s,t) + \varepsilon\ell^2$$

ή

$$\max_{(x,y)\in\bar{D}} u(x,y) \leq \max_{(s,t)\in\partial D} u(s,t) + \varepsilon\ell^2,$$

οπότε

$$\max_{(x,y)\in\bar{D}} u(x,y) = \max_{(s,t)\in\partial D} u(s,t).$$ □

Παρατήρηση 6.1 (Για την αρχή του μεγίστου αρκεί η συνθήκη $\Delta u \geq 0$.) Στην ανωτέρω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μόνο το γεγονός ότι $\Delta u \geq 0$ στο D. Συνεπώς το μέρος που αναφέρεται στο μέγιστο στο Θεώρημα 6.1 ισχύει και υπ' αυτήν την προϋπόθεση (για το ελάχιστο απαιτείται $\Delta u \leq 0$). Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 6.1 αναφέρεται ακριβέστερα ως ασθενής μορφή της αρχής του μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις. Στη λεγόμενη ισχυρά μορφή της αρχής του μεγίστου θα αναφερθούμε προς το τέλος του κεφαλαίου. □

Από το Θεώρημα 6.1 έπεται αμέσως η μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος (6.1). Πράγματι, αν u_1 και u_2 είναι δύο λύσεις του, τότε για τη $v := u_1 - u_2$

θα έχουμε

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{στο } D, \\ v = 0 & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

οπότε κατά το Θεώρημα 6.1 έχουμε $v = 0$ στο D, δηλαδή $u_1 = u_2$. Χρησιμοποιώντας και την Παρατήρηση 6.1 μπορούμε να αποδείξουμε συνεχή εξάρτηση της λύσεως u του προβλήματος (6.1) από τα δεδομένα f και h. Έστω

$$M := \max_{(x,y)\in\bar{D}} |f(x,y)|.$$

Θέτουμε $v(x,y) := u(x,y) + \frac{M}{4}(x^2+y^2)$. Τότε

$$\Delta v = \Delta u + M = f + M \geq 0,$$

συνεπώς

$$v(x,y) \leq \max_{(s,t)\in\partial D} u(s,t) + \frac{M}{4}\ell^2 \leq \max_{(s,t)\in\partial D} |h(s,t)| + \frac{M}{4}\ell^2,$$

οπότε

$$u(x,y) \leq \max_{(s,t)\in\partial D} |h(s,t)| + \frac{\ell^2}{4} \max_{(s,t)\in\bar{D}} |f(s,t)|, \quad (x,y)\in\bar{D}. \tag{6.2i}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.2i) τα u, h, f με $-u, -h, -f$ λαμβάνουμε

$$-u(x,y) \leq \max_{(s,t)\in\partial D} |h(s,t)| + \frac{\ell^2}{4} \max_{(s,t)\in\bar{D}} |f(s,t)|, \quad (x,y)\in\bar{D}. \tag{6.2ii}$$

Από την (6.2) έπεται αμέσως

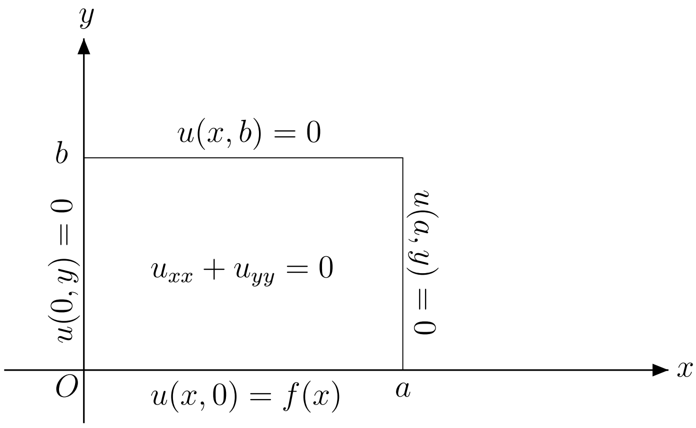
$$\max_{(x,y)\in\bar{D}} |u(x,y)| \leq \max_{(s,t)\in\partial D} |h(s,t)| + \frac{\ell^2}{4} \max_{(x,y)\in\bar{D}} |f(x,y)|, \tag{6.3}$$

που είναι το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα.

6.2 Το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ένα ορθογώνιο

Ως ένα παράδειγμα προβλήματος συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση του Laplace σε ένα ορθογώνιο θα μελετήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{στο } (0,a)\times(0,b), \\ u(x,0) = f(x) & \text{στο } [0,a], \\ u(x,b) = 0 & \text{στο } [0,a], \\ u(0,y) = u(a,y) = 0 & \text{στο } [0,b]. \end{cases} \tag{6.4}$$



Σχήμα 6.2: Παράσταση συνθηκών Dirichlet για την εξίσωση του Laplace σε ένα ορθογώνιο, βλ. το πρόβλημα (6.4).

Το ότι υποθέσαμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες σε τρεις πλευρές του ορθογωνίου δεν αποτελεί περιορισμό της γενικότητας. Αν έχουμε φερ' ειπείν μη ομογενείς συνθήκες και στις τέσσερεις πλευρές, τότε το πρόβλημα ανάγεται εύκολα στη λύση τεσσάρων προβλημάτων, σε κάθε ένα των οποίων έχουμε ομογενείς συνθήκες σε τρεις πλευρές του ορθογωνίου· βλ. την Άσκηση 6.1. Σημειώνουμε επίσης ότι προβλήματα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε ορισμένες πλευρές και Neumann στις υπόλοιπες λύνονται εντελώς ανάλογα. Εργαζόμενοι με χωρισμό των μεταβλητών θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \text{στο } (0,a)\times(0,b),\\ u(0,y)=u(a,y)=0 & \text{στο } [0,b],\\ u(x,b)=0 & \text{στο } [0,a], \end{cases} \tag{6.5}$$

το οποίο έχει ομογενείς συνοριακές συνθήκες στις πλευρές που και στο πρόβλημα (6.4) έχουμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες, της μορφής

$$v(x,y)=X(x)Y(y). \tag{6.6}$$

Για να είναι μια συνάρτηση της μορφής (6.6) αρμονική πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0.$$

Διαιρώντας δια XY λαμβάνουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις συνοριακές συνθήκες οδηγούμεθα στα προβλήματα

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x), \quad 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y), \quad 0 < y < b, \\ Y(b) = 0\,. \end{cases} \tag{6.8}$$

Το πρόβλημα (6.7) είναι το ίδιο με το πρόβλημα (5.7) και οι λύσεις του δίνονται ως

$$\lambda_n = \big(\frac{n\pi}{a}\big)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.9}$$

βλ. την (5.9). Η εξίσωση $Y''(y) = (\frac{n\pi}{a})^2 Y(y)$ έχει λύσεις της μορφής

$$Y(y) = C\sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big] + D\cosh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big]$$

και από την $Y(b) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $D = 0$. Συνεπώς για $\lambda = \lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$ το πρόβλημα (6.8) έχει τη λύση

$$Y_n(y) = \sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big],$$

και τα πολλαπλάσιά της φυσικά. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$v_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.10}$$

αποτελούν λύσεις του προβλήματος (6.5).

Τώρα για λόγους συμβατότητας έχουμε $f(0) = f(a) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,a]$ και την αναπτύσσουμε σε σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \le x \le a, \tag{6.11}$$

$$a_n := \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να συνδυάσουμε τις λύσεις v_n, βλ. την (6.10), για να οδηγηθούμε στη λύση του προβλήματος (6.4). Αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί η συνάρτηση

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big]$$

λύση είναι, προφανώς, να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $u(x,0)=f(x)$, δηλαδή να ισχύει

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\frac{n\pi b}{a}\,.$$

Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με την (6.11), οδηγούμεθα στο συμπέρασμα

$$\tilde{a}_n=a_n\,\frac{1}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\,.$$

Με αυτήν την παρατήρηση ως κίνητρο, ισχυριζόμεθα τώρα ότι η λύση u του προβλήματος (6.4) δίνεται ως

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big],\qquad 0\le x\le a,\ 0\le y\le b. \tag{6.13}$$

Χρησιμοποιώντας την ομαλότητα της f καθώς και το γεγονός ότι

$$\Big|\frac{\sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big]}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\Big|\le 1,\qquad 0\le y\le b,$$

διαπιστώνουμε εύκολα ότι η σειρά στην (6.13) συγκλίνει ομοιόμορφα, συνεπώς η u είναι συνεχής στο $[0,a]\times[0,b]$. Έτσι βλέπουμε εύκολα ότι η u ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες, και χρησιμοποιώντας και την (6.11) έχουμε $u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le a$. Τώρα

$$\frac{\sinh\big[\frac{n\pi}{a}(b-y)\big]}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}=\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi b}{a}}}\,,$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι, για $\varepsilon>0$, στο $[0,a]\times[\varepsilon,b]$ αν πάρουμε οποιεσδήποτε παραγώγους στους όρους της σειράς στην (6.13) προκύπτει ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά. Συνεπώς η u είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, a] \times (0, b]$ και οι παράγωγοι της u λαμβάνονται δια παραγωγίσεως της σειράς όρο προς όρο. Έτσι διαπιστώνουμε εύκολα ότι, αφού οι v_n (βλ. την (6.10)) είναι αρμονικές, και η u είναι αρμονική στο $[0, a] \times (0, b]$. Συνολικά λοιπόν η u που δίνεται από την (6.13) είναι λύση (σύμφωνα με την αρχή του μεγίστου μοναδική) του προβλήματος (6.4), και επί πλέον είναι στο $[0, a] \times (0, b]$ άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

6.3 Ο τύπος του Poisson

Πολύ πιο ενδιαφέρον από το πρόβλημα της προηγούμενης παραγράφου είναι το πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνθήκες Dirichlet για την εξίσωση του Laplace σε έναν κύκλο.

Πριν προχωρήσουμε, θα γράψουμε την εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες: Με $x = r\cos\vartheta, y = r\sin\vartheta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} &= -r\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}.\end{aligned}\right. \tag{6.14}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \big(\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\big)\,\big(\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\big)\\ &= \cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}\,\big(\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\big) - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\,\big(\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\big)\\ &= \cos^2\vartheta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \vartheta} + \frac{\sin^2\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\\ &\quad - \frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial \vartheta\,\partial r} + \frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},\end{aligned}$$

οπότε
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\vartheta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta} - 2\frac{\sin\vartheta\,\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\vartheta} + \frac{\sin^2\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

Ανάλογα υπολογίζουμε και το $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, και προσθέτοντας λαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}. \tag{6.15}$$

Η εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες γράφεται συνεπώς στη μορφή

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\vartheta\vartheta} = 0. \tag{6.16}$$

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών με συνοριακές συνθήκες Dirichlet για την εξίσωση του Laplace σε έναν κύκλο με κέντρο, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, την αρχή των αξόνων και ακτίνα a:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\vartheta\vartheta} = 0, & 0 < r < a, \quad \vartheta \in \mathbb{R}, \\ u(a,\vartheta) = h(\vartheta), & \vartheta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6.17}$$

όπου h μια ομαλή περιοδική συνάρτηση, με περίοδο 2π. Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα (6.17) με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Προς τούτο θα προσδιορίσουμε κατ' αρχάς λύσεις του προβλήματος

$$v_{rr} + \frac{1}{r}\,v_r + \frac{1}{r^2}\,v_{\vartheta\vartheta} = 0\,, \quad 0 < r < a, \quad \vartheta \in \mathbb{R}, \tag{6.18}$$

της μορφής

$$v(r,\vartheta) = R(r)\,\Theta(\vartheta), \tag{6.19}$$

οι οποίες είναι συνεχείς στο $[0,a] \times \mathbb{R}$ και περιοδικές ως προς ϑ, με περίοδο 2π.

Για να ικανοποιεί μια συνάρτηση της μορφής (6.19) τη διαφορική εξίσωση (6.18) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$R''(r)\Theta(\vartheta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\vartheta) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Theta''(\vartheta) = 0.$$

Διαιρώντας δια $R\Theta$ και πολλαπλασιάζοντας επί r^2 λαμβάνουμε

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\vartheta)}{\Theta(\vartheta)},$$

και κατά τα γνωστά οδηγούμεθα στις εξισώσεις

$$\Theta''(\vartheta) + \lambda\Theta(\vartheta) = 0\,, \qquad \vartheta \in \mathbb{R}, \tag{6.20}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0\,, \quad 0 < r < a. \tag{6.21}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (6.20) επί $\Theta(\vartheta)$, ολοκληρώνοντας στο $[0, 2\pi]$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, διαπιστώνουμε εύκολα ότι για να υπάρχει μη τετριμμένη περιοδική λύση της (6.20) πρέπει $\lambda \geq 0$. Για $\lambda = 0$ έχουμε ως λύση τη $\Theta(\vartheta) = 1$ και τα πολλαπλάσιά της,

$$\lambda_0 = 0, \quad \Theta_0(\vartheta) = 1, \quad \vartheta \in \mathbb{R}. \tag{6.22i}$$

Τα άλλα ζεύγη ιδιοτιμών και περιοδικών με περίοδο 2π ιδιοσυναρτήσεων δίδονται δια

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\vartheta) = A_n\cos(n\vartheta) + B_n\sin(n\vartheta), \quad \vartheta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.22ii}$$

όπου A_n, B_n τυχούσες σταθερές.

Συνολικά λοιπόν έχουμε τις εξής ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις με περίοδο 2π του προβλήματος (6.20)

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\vartheta) = A_n\cos(n\vartheta) + B_n\sin(n\vartheta), \quad \vartheta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.23}$$

Θέτουμε τώρα $\lambda = \lambda_0 = 0$ στην (6.21) και λαμβάνουμε

$$rR''(r) + R'(r) = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις αυτού του προβλήματος είναι οι $R_0(r) = 1$ και $\tilde{R}_0(r) = \ln r$. Η $\tilde{R}_0$ απορρίπτεται ως ασυνεχής στο $[0, a]$ (απειρίζεται στο 0). Θέτουμε τώρα $\lambda = n^2,\ n \in \mathbb{N}$, στην (6.21) και ζητούμε να προσδιορίσουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της. Θέτοντας $R(r) = r^\alpha$ έχουμε

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha = 0$$

ή

$$(\alpha^2 - n^2)r^\alpha = 0,$$

οπότε $\alpha = \pm n$, δηλαδή έχουμε τις λύσεις $R_n(r) = r^n$ και $\tilde{R}_n(r) = r^{-n}$. Οι $\tilde{R}_n$ απειρίζονται στο μηδέν και δεν είναι αποδεκτές. Συνολικά λοιπόν για $\lambda_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}_0$, οι αποδεκτές λύσεις της (6.21) είναι, αντίστοιχα,

$$R_n(r) = r^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.24}$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι οι συναρτήσεις

$$v_n(r,\vartheta) = \big[A_n\cos(n\vartheta) + B_n\sin(n\vartheta)\big]r^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.25}$$

είναι λύσεις του προβλήματος (6.18), φραγμένες και περιοδικές ως προς ϑ, με περίοδο 2π.

Έστω τώρα ότι η h είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε η σειρά Fourier της συγκλίνει ομοιόμορφα στην h,

$$h(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n\cos(n\vartheta) + b_n\sin(n\vartheta)\big], \quad \vartheta \in \mathbb{R}, \tag{6.26}$$

όπου

$$\begin{cases} a_n := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\vartheta)\cos(n\vartheta)\,d\vartheta, & n \in \mathbb{N}_0,\\[2mm] b_n := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\vartheta)\sin(n\vartheta)\,d\vartheta, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{6.27}$$

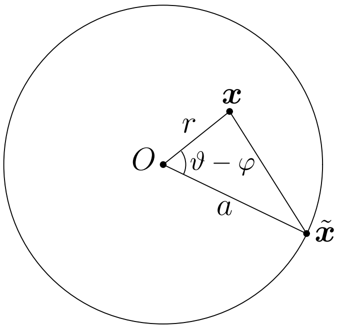
Ισχυριζόμεθα τώρα ότι η λύση u του προβλήματος (6.17) δίνεται ως

$$u(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\big[a_n\cos(n\vartheta) + b_n\sin(n\vartheta)\big], \quad 0 \le r \le a, \ \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \tag{6.28}$$

όπου οι συντελεστές a_n και b_n δίνονται από την (6.27). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $r \le a$ καθώς και την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς Fourier (6.26) συμπεραίνουμε εύκολα ότι η σειρά (6.28) συγκλίνει ομοιόμορφα, συνεπώς η u είναι συνεχής. Χρησιμοποιώντας πάλι την (6.26) έχουμε

$$u(a,\vartheta) = h(\vartheta), \quad \vartheta \in [0,2\pi].$$

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $r < a$ η συνάρτηση που δίνεται από την (6.28) είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι οι παράγωγοι λαμβάνονται παραγωγίζοντας τη σειρά όρο προς όρο. Επειδή κάθε όρος της σειράς ικανοποιεί την εξίσωση στην (6.17), βλ. την (6.25), κατά τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι και η u που δίνεται από την (6.28) ικανοποιεί την ίδια εξίσωση. Συνολικά λοιπόν η u που δίνεται από την (6.28) είναι λύση του προβλήματος (6.17), και επί πλέον είναι για $r < a$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη.



Σχήμα 6.3: Το πρόβλημα για την εξίσωση του Poisson στον κύκλο με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Το εντυπωσιακό τώρα είναι ότι η σειρά (6.28) αθροίζεται και μας δίνει τη λύση σε κλειστή μορφή, στον λεγόμενο *τύπο του Poisson.* Πράγματι χρησιμοποιώντας την (6.27) γράφουμε την (6.28) στη μορφή

$$\begin{aligned} u(r,\vartheta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\big[\cos(n\varphi)\cos(n\vartheta)+\sin(n\varphi)\sin(n\vartheta)\big]d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos\big[n(\vartheta-\varphi)\big]d\varphi. \end{aligned}$$

Εύκολα τώρα διαπιστώνουμε ότι η άθροιση και η ολοκλήρωση αντιμετατίθενται – η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα – και συνεπώς

$$u(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{r}{a}\big)^n\cos\big[n(\vartheta-\varphi)\big]\Big]d\varphi.$$

Σειρές αυτής της μορφής ανάγονται εύκολα σε γεωμετρικές σειρές, και συνεπώς αθροίζονται εύκολα, βλ. τις Ασκήσεις 4.6 και 4.7. Το αποτέλεσμα είναι

$$u(r,\vartheta) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\varphi)}{a^2-2ar\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\varphi\,. \tag{6.29}$$

Ο τύπος (6.29) καλείται *τύπος του Poisson.*

Θα δώσουμε τώρα μια πιο γεωμετρική μορφή του τύπου του Poisson. Έστω $\boldsymbol{x}=(x,y)$ ένα σημείο με πολικές συντεταγμένες (r,ϑ) και $\tilde{\boldsymbol{x}}=(a,\varphi)$ ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου, βλ. το Σχήμα 6.3. Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου αυτού είναι $r=|\boldsymbol{x}|, a=|\tilde{\boldsymbol{x}}|$ και $|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}|$. Κατά τα γνωστά από την

Τριγωνομετρία έχουμε

$$|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\vartheta-\varphi).$$

Το μήκος s τόξου γωνίας φ δίνεται φυσικά δια $s = a\varphi$, συνεπώς $ds = a\,d\varphi$. Έτσι ο τύπος του Poisson (6.29) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{a^2-|\boldsymbol{x}|^2}{2\pi a}\int_{|\tilde{\boldsymbol{x}}|=a}\frac{u(\tilde{\boldsymbol{x}})}{|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}|^2}\,ds, \quad |\boldsymbol{x}|<a. \tag{6.30}$$

Από τον τύπο του Poisson έπονται διάφορες ιδιότητες αρμονικών συναρτήσεων. Αναφέρουμε στη συνέχεια τρεις από αυτές:

Ιδιότητα μέσης τιμής: Έστω u μια συνάρτηση, αρμονική σε έναν κύκλο D, και συνεχής στον $\bar{D}$. Τότε η τιμή της u στο κέντρο του κύκλου ισούται με τον μέσο όρο των τιμών της στην περιφέρεια του κύκλου.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων με αρχή το κέντρο του κύκλου και χρησιμοποιούμε τον τύπο (6.30) με $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, οπότε λαμβάνουμε

$$u(\boldsymbol{0}) = \frac{1}{2\pi a}\int_{|\tilde{\boldsymbol{x}}|=a} u(\tilde{\boldsymbol{x}})\,ds, \tag{6.31}$$

δηλαδή το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

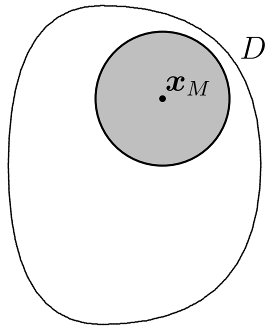
Αρχή του μεγίστου – Ισχυρά μορφή: Στο Θεώρημα 6.1 είδαμε την ασθενή μορφή της αρχής του μεγίστου. Η ισχυρά μορφή είναι ότι, αν μια συνάρτηση u, συνεχής στο $\bar{D}$ και αρμονική στο D, λαμβάνει το μέγιστό της (ή το ελάχιστό της) στο $\bar{D}$ και σε ένα σημείο του D, τότε είναι σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $\boldsymbol{x}_M \in D$ τέτοιο ώστε

$$u(\boldsymbol{x}) \le u(\boldsymbol{x}_M) \quad \forall\, \boldsymbol{x}\in\bar{D}. \tag{6.32}$$

Θέτουμε $M := u(\boldsymbol{x}_M)$. Φυσικά υπάρχει τότε ένα $a>0$ τέτοιο ώστε ο κύκλος με κέντρο το $\boldsymbol{x}_M$ και ακτίνα a να είναι υποσύνολο του D. Θα αποδείξουμε ότι $u(\boldsymbol{x}) = M$ για κάθε $\boldsymbol{x}$ στον κύκλο αυτόν. Αρχίζουμε με την περιφέρεια. Χρησιμοποιώντας τις (6.31) και (6.32) και υποθέτοντας ότι για κάποιο $\boldsymbol{x}$ στην περιφέρεια αυτού του κύκλου ισχύει $u(\boldsymbol{x})<M$ οδηγούμεθα στο άτοπο

$$u(\boldsymbol{x}_M) < M.$$



Σχήμα 6.4: Το πρόβλημα για την εξίσωση του Poisson με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Για ένα εσωτερικό σημείο $\boldsymbol{x}$ του κύκλου το συμπέρασμα έπεται με τον ίδιο τρόπο, αν θεωρήσουμε έναν άλλο κύκλο με κέντρο το $\boldsymbol{x}_M$ τέτοιον ώστε το $\boldsymbol{x}$ να ανήκει στην περιφέρειά του, βλ. το Σχήμα 6.4.

Κατ' αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι η u είναι στον γκρι κύκλο στο Σχήμα 6.4 σταθερή. Το ίδιο ισχύει και για οποιονδήποτε κύκλο με κέντρο ένα σημείο του γκρι κύκλου, αν αυτός περιέχεται στο D. Σε οποιοδήποτε σημείο του D οδηγούμεθα με πεπερασμένο πλήθος τέτοιων βημάτων, άρα η u είναι σταθερά σε όλο το D. □

Ομαλότητα αρμονικών συναρτήσεων: Γράφουμε την (6.30) στη μορφή

$$u(x,y) = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{2\pi a} \int_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=a^2} \frac{u(\tilde{x},\tilde{y})}{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2}\, ds, \qquad x^2+y^2<\tilde{x}^2+\tilde{y}^2. \tag{6.33}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το δεξιό μέλος αυτής της σχέσης είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι μια αρμονική συνάρτηση σε έναν κύκλο είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Το ίδιο ισχύει και σε ένα τυχαίο χωρίο, αφού πάντα μπορούμε να βρούμε έναν κύκλο που να περιέχεται στο D και να περιέχει ένα τυχαίο σημείο $(x,y) \in D$. □

Ασκήσεις

6.1 Έστω $a, b > 0$ και D το ορθογώνιο $(0,a)\times(0,b)$. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο D για την εξίσωση του Laplace, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{στο } D, \\ u = h & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

όπου $h : [0,a] \times [0,b] \to \mathbb{R}$ δεδομένη συνάρτηση.

α) Υποθέτοντας ότι η h μηδενίζεται στις κορυφές του ορθογωνίου, αποδείξτε ότι η λύση του προβλήματός μας είναι το άθροισμα των λύσεων τεσσάρων αντίστοιχων προβλημάτων, με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε τρεις πλευρές του ορθογωνίου, βλ. το πρόβλημα (6.4).

β) Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε το πολυώνυμο p,

$$p(x,y) = \frac{1}{ab}\big[h(0,0)(x-a)(y-b) - h(a,0)x(y-b) - h(0,b)(x-a)y + h(a,b)xy\big],$$

το οποίο παρεμβάλλεται στην h στις κορυφές του ορθογωνίου. Αποδείξτε τώρα ότι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι το άθροισμα $v+p$, όπου v η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 & \text{στο } D, \\ v = h - p & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως. (Σημειώστε ότι το p είναι αρμονική συνάρτηση, $p_{xx} + p_{yy} = 0$.)

6.2 Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ενέργειας για να αποδείξετε ότι το πρόβλημα (6.1), όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με "ομαλό" σύνορο έχει το πολύ μία ομαλή λύση.
[*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Green

$$(\star) \qquad \iint\limits_D v\Delta w\, dxdy = -\iint\limits_D (\nabla v, \nabla w)\, dxdy + \int_{\partial D} v\frac{\partial w}{\partial n}\, dS,$$

όπου ∇v το διάνυσμα με συνιστώσες v_x, v_y, και $\frac{\partial w}{\partial n} = n_1 w_x + n_2 w_y$ η κατά την κατεύθυνση του κάθετου εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος n παράγωγος της w.]

6.3 Αποδείξτε ότι αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση του Poisson με συνοριακές συνθήκες Neumann

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{στο } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο, είναι

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} h(x,y)\,dS.$$

[*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Green ($\star$) της υπόδειξης στην Άσκηση 6.2 με $v(x,y) = 1$.]

6.4 Για το πρόβλημα ($\star\star$) της Άσκησης 6.3 δεν έχουμε προφανώς μοναδικότητα της λύσεως. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της ενέργειας και τον τύπο του Green για να αποδείξετε ότι αν u_1, u_2 λύσεις του ($\star\star$), τότε $u_1(x,y) - u_2(x,y) =$ σταθερά.

6.5 Με τη μέθοδο της ενέργειας αποδείξτε μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u - u = f & \text{στο } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο.

6.6 (*Αρχή του Dirichlet.*) Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο ∂D. Έστω u η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } D, \\ u = h & \text{στο } \partial D. \end{cases}$$

Η "ενέργεια" μιας ομαλής συνάρτησης $w : D \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$E(w) := \frac{1}{2} \iint\limits_D (\nabla w, \nabla w)\,dx\,dy.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε ομαλή συνάρτηση v, τέτοια ώστε $v = h$ στο ∂D, ισχύει $E(u) \leq E(v)$.

[*Υπόδειξη:* Θέστε $w := u - v$ και χρησιμοποιήστε τον τύπο του Green για να αποδείξετε ότι $E(v) = E(u) + E(w)$.]

6.7 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο και $k : D \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Με τη μέθοδο της ενέργειας αποδείξτε μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u - ku = f & \text{στο } D, \\ u = h & \text{στο } \partial D. \end{cases}$$

6.8 Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u(x) = \alpha \sin(\pi x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, αποτελούν λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} u'' + \pi^2 u = 0 & \text{στο } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Σε ποιο συμπέρασμα μπορούμε να οδηγηθούμε συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με την Άσκηση 6.7;

6.9 Χρησιμοποιήστε την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών για να προσδιορίσετε μια παράσταση της λύσης του προβλήματος συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{στο } (0,a)\times(0,b), \\ u(x,0) = f(x) & \text{στο } [0,a], \\ u(x,b) = 0 & \text{στο } [0,a], \\ u(0,y) = u_x(a,y) = 0 & \text{στο } [0,b], \end{cases}$$

ανάλογη της (6.13), όπου $a, b > 0$.

6.10 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο, $\lambda \in \mathbb{R}$ και u μια ομαλή, μη μηδενική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{στο } D, \\ u = 0 & \text{στο } \partial D. \end{cases}$$

Με τη μέθοδο της ενέργειας αποδείξτε ότι $\lambda > 0$, δηλαδή ότι οι ιδιοτιμές της αντίθετης της Λαπλασιανής, $-\Delta$, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet είναι θετικοί αριθμοί.

6.11 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο, $\lambda \in \mathbb{R}$ και u μια ομαλή, μη μηδενική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{στο } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } \partial D. \end{cases}$$

Με τη μέθοδο της ενέργειας αποδείξτε ότι $\lambda \geq 0$, δηλαδή ότι οι ιδιοτιμές της αντίθετης της Λαπλασιανής, $-\Delta$, με συνοριακές συνθήκες Neumann είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

6.12 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο, $\lambda \in \mathbb{R}$ και u μια ομαλή, μη μηδενική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda u & \text{στο } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } \partial D. \end{cases}$$

Με τη μέθοδο της ενέργειας αποδείξτε ότι $\lambda \geq 1$.

6.13 Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 6.2, αποδείξτε ότι ο τύπος του Green ($\star$) στην υπόδειξη της Άσκησης 6.2 έπεται από τους τύπους

$$(\circ) \qquad \iint\limits_D v w_x \, dxdy = -\iint\limits_D v_x w \, dxdy + \int_{\partial D} v w n_1 \, dS,$$

και
$$\iint\limits_D v w_y \, dxdy = -\iint\limits_D v_y w \, dxdy + \int_{\partial D} v w n_2 \, dS \,,$$
οι οποίοι ισχύουν για συνεχείς στο $\bar{D}$ και συνεχώς παραγωγίσιμες στο D συναρτήσεις v και w.

6.14 Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη σε ένα διάστημα, αποδείξτε τον τύπο ($\circ$) της Άσκησης 6.13 στην ειδική περίπτωση που το D είναι ένα ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

6.15 Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε μία διάσταση ισχύει και για συνεχείς και κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις (βεβαιωθείτε γι' αυτό θεωρώντας μια συνάρτηση, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του διαστήματος ολοκληρώσεως), αποδείξτε τον τύπο ($\circ$) της Άσκησης 6.13 για γενικό φραγμένο συνεκτικό χωρίο D, με ομαλό σύνορο ∂D, στην περίπτωση που μία των συναρτήσεων, ας πούμε η v, μηδενίζεται στο ∂D.
[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ένα ορθογώνιο O με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, το οποίο περιέχει το $\bar{D}$, επεκτείνετε τη v στο $\bar{O} \setminus D$ ως μηδενική συνάρτηση, και εφαρμόστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 6.14. Δεχτείτε ότι μια συνάρτηση $w \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$ μπορεί να επεκταθεί σε μια συνάρτηση $\bar{w}$ στο $\bar{O}$ κατά τρόπον ώστε $\bar{w} \in C^1(\bar{O})$.]

6.16 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο και $u, \tilde{u}$ ομαλές λύσεις των προβλημάτων
$$\begin{cases} \varDelta u(x,y) = f(x,y) & \text{στο } D, \\ u(x,y) = h(x,y) & \text{στο } \partial D, \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \varDelta \tilde{u}(x,y) = \tilde{f}(x,y) & \text{στο } D, \\ \tilde{u}(x,y) = h(x,y) & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$
αντίστοιχα, όπου $f, \tilde{f}, h : \bar{D} \to \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Αν $f(x,y) > \tilde{f}(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$, αποδείξτε ότι $u(x,y) < \tilde{u}(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$.

6.17 Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο ∂D. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με *μη αρνητική* παράγωγο. Αποδείξτε μοναδικότητα ομαλών λύσεων του προβλήματος
$$\begin{cases} \varDelta u(x,y) = f\big(u(x,y)\big) & \text{στο } D, \\ u(x,y) = h(x,y) & \text{στο } \partial D, \end{cases}$$
όπου $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$ μια δεδομένη συνάρτηση.

Βιβλιογραφία

1. Ν. Δ. Αλικάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος: *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2003.
2. S. C. Brenner and L. R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. 2nd ed., Springer–Verlag, New York, 2002.
3. P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*. North–Holland, Amsterdam, 1978. (Ανατύπωση Dover, New York, 2002.)
4. R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2, Wiley–Interscience, New York, 1962.
5. Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα, 1994.
6. C. Dafermos: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer–Verlag, Berlin, 2000.
7. E. DiBenedetto: *Partial Differential Equations*. Birkhäuser, Basel, 1995.
8. L. C. Evans: *Partial Differential Equations*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1998.
9. G. Folland: *Introduction to Partial Differential Equations*. 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1995.
10. A. Friedman: *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart, Winston, 1969.
11. P. Garabedian: *Partial Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1964. (Ανατύπωση AMS Chelsea Publishing, 1998.)
12. D. Gilbarg and N. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed., Springer–Verlag, New York, 1983.
13. K. E. Gustafson: *Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*. J. Wiley, New York, 1980.
14. L. Hörmander: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Vol. 1–4, Springer–Verlag, New York, 1983–85.

15. F. John: *Partial Differential Equations*. 4^{th} ed., Springer–Verlag, New York, 1982.
16. N. V. Krylov: *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996.
17. O. A. Ladyzhenskaya: *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Springer–Verlag, New York, 1985.
18. S. Larsson and V. Thomée: *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer–Verlag, Berlin, 2003.
19. G. M. Lieberman: *Second Order Parabolic Partial Differential Equations*. World Scientific, 1996.
20. J.–L. Lions and E. Magenes: *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Vol. I–III, Springer–Verlag, New York, 1972.
21. J. D. Logan: *Applied Mathematics*. 2^{nd} ed., J. Wiley, New York, 1997. (Ελληνική μετάφραση με τίτλο *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2002.)
22. A. Lunardi: *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Basel, Birkhäuser, 1995.
23. R. McOwen: *Partial Differential Equations*. Prentice–Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
24. V. P. Mikhailov: *Partial Differential Equations*. Mir, Moscow, 1978.
25. I. G. Petrovsky: *Lectures on Partial Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1954. (Ανατύπωση Dover, 1991.)
26. J. Rauch: *Partial Differential Equations*. Springer–Verlag, New York, 1991.
27. M. Renardy, R. C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer–Verlag, New York, 1993.
28. W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*. 3^{rd} ed., McGraw–Hill, Singapore, 1976. (Ελληνική μετάφραση με τίτλο *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα, 2000.)
29. J. Smoller: *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*. 2^{nd} ed., Springer–Verlag, New York, 1995.
30. I. Sneddon: *Elements of Partial Differential Equations*. McGraw–Hill, 1957.
31. W. Strauss: *Partial Differential Equations*: *An Introduction*. J. Wiley, New York, 1992.

32. M. Taylor: *Partial Differential Equations: An Introduction*. Vol. I–III, J. Wiley, New York, 1996.
33. Σ. Α. Τερσένοβ: *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1992.
34. V. Thomée: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. 2nd ed., Springer–Verlag, Berlin, 2006.
35. Σ. Τραχανάς: *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*: *Μέθοδοι Λύσης και Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2005.
36. Σ. Τραχανάς: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*: *Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.
37. E. Treves: *Basic Linear Partial Differential Equations*. Academic Press, 1975.
38. H. Triebel: *Höhere Analysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
39. A. Tveito and R. Winther: *Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach*. Springer–Verlag, Berlin, 1998.
40. H. Weinberger: *A First Course in Partial Differential Equations*. Blaisdell, 1965.
41. G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves*. J. Wiley, 1974.
42. J. Wloka: *Partial Differential Equations*. Cambridge Univ. Press, 1987.
43. E. Zauderer: *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2nd ed., J. Wiley, New York, 1989.

Ευρετήριο

Α

ανάκλαση κυμάτων, 40, 45
ανάπτυγμα του Fourier, 103
ανισότητα
  του Bessel, 104, 105
  των Cauchy–Schwarz, 97, 108
αρμονική συνάρτηση, 130, 131, 133, 136, 141, 142
αρχή
  της επαλληλίας, 2
  της υπερθέσεως, 2
  του Dirichlet, 144
  του Duhamel, 49, 87
  του μεγίστου, 65, 68, 69, 74, 90, 92, 130, 136, 141
    ασθενής μορφή, 65
    ισχυρά μορφή, 65
αρχικές συνθήκες, 17

Β

βέλτιστη προσέγγιση, 99–103, 106

Γ

γραμμική
  διαφορική εξίσωση, 2
γραμμικός διαφορικός τελεστής, 2

Δ

δυναμική εξίσωση, 18

Ε

ελλειπτική εξίσωση, 22, 27
ενέργεια, 38
εξίσωση
  αναλλοίωτη σε περιστροφές, 25
  ελλειπτική, 22
  θερμότητας, 97, 117
  κυματική, 29
  κύματος, 22, 31, 84, 92, 97, 113, 117, 121, 124
  μεταφοράς, 9, 10
  παραβολική, 22
  της θερμότητας, 17, 22, 65, 84, 113, 121, 124
  του Laplace, 22, 97, 129, 132, 133, 136, 137
  του Poisson, 129, 130, 143
  του Tricomi, 22
  υπερβολική, 22
εξωτερική δύναμη, 47
εσωτερικό γινόμενο, 97, 99
ευστάθεια, 20

Θ

θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass, 106
θεώρημα του Green, 51

Ι

ιδιοσυνάρτηση, 115, 126, 138
ιδιοτιμή, 115, 126, 127, 138
ιδιότητα μέσης τιμής, 141
ισότητα του Parseval, 104
ισότητα του παραλληλογράμμου, 98, 99

Κ

κάθετα διανύσματα, 98
καλώς τεθειμένο πρόβλημα, 20
κλασική λύση
  διαφορικής εξίσωσης, 1
κύμα, 9
κυματική εξίσωση, 18, 29, 84, 92, 97, 113, 117, 121, 124

Λ

Λαπλασιανή, 18, 129
λήμμα του Gronwall, 62

Μ

μέθοδος
  της ενέργειας, 44, 90, 93, 127, 143, 144
  των χαρακτηριστικών, 49
μεικτές συνοριακές συνθήκες, 19
μερικό άθροισμα σειράς Fourier, 105, 110
μη γραμμική
  διαφορική εξίσωση, 2
μη ομογενής διαφορική εξίσωση, 2, 124
μοναδικότητα, 68
μοναδικότητα λύσεως, 20

Ν

νόρμα, 97, 106

Ο

ομογενής διαφορική εξίσωση, 2
ορθογώνια
  διανύσματα, 98
  προβολή, 102
ορθογώνιο ανάπτυγμα, 103
ορθοκανονική βάση, 102
ορθοκανονικοποίηση Gram–Schmidt, 103, 110
ορθομοναδιαία βάση, 102, 103
ορθομοναδιαίο σύστημα, 107
ορίζουσα του Gram, 102

Π

παραβολική εξίσωση, 22, 27
πεδίο εξαρτήσεως, 47
περιοχή εξαρτήσεως, 35, 42
περιοχή επιρροής, 35, 36
πίνακας
  του Gram, 102, 110
πλήρες ορθομοναδιαίο σύστημα, 104, 107
πρόβλημα ιδιοτιμών, 115, 122, 126, 127
Πυθαγόρειο θεώρημα, 98, 100, 103

Σ

σειρές του Fourier, 97, 103, 105, 110, 113, 121, 124, 126, 127, 134, 139
στατική εξίσωση, 18
συνέλιξη, 77

συνήθης διαφορική εξίσωση, 3
συνεχής εξάρτηση, 20, 68
συνοριακές συνθήκες, 17
δευτέρου είδους, 19
μεικτές, 19
πρώτου είδους, 19
του Dirichlet, 19
του Neumann, 19, 57, 121
του Robin, 19
τρίτου είδους, 19
συντελεστές Fourier, 106, 107, 109, 116, 120, 124
σύστημα κανονικών εξισώσεων, 102

Τ

τάξη, 17
διαφορικής εξίσωσης, 1
ταξινόμηση Μ.Δ.Ε. δευτέρας τάξεως, 21
τελεστής του Laplace, 17
τριγωνική ανισότητα, 98
τριγωνομετρικά πολυώνυμα, 106
τύπος, 17
του Green, 143–145
του Poisson, 136, 140, 141

Υ

ύπαρξη λύσεως, 20
υπερβολική εξίσωση, 22, 27

Φ

φυσική σημασία συνοριακών συνθηκών, 19

Χ

χαρακτηριστικές γραμμές, 6, 8, 10, 31
χαρακτηριστικές καμπύλες, 10
χαρακτηριστική γραμμή, 9
χαρακτηριστικό τρίγωνο, 47, 48
χρόνος θραύσεως, 16
χωρίο, 1, 17
χωρισμός μεταβλητών, 113, 114, 133, 137

B

Bessel, 104, 105

C

Cauchy, 97, 108

D

Dirichlet, 19, 20, 55, 113, 117, 122, 124, 130, 133, 136, 137, 140
Duhamel, 49, 87

F

Fourier, 103, 105

G

Gram, 102, 110
Green, 51, 143–145
Gronwall, 62

L

Laplace, 129

N

Neumann, 19, 20, 57, 113, 121, 124, 133, 143

P

Parseval, 104
Poisson, 129, 136, 140, 141, 143

R

Robin, 19, 20, 127

S

Schmidt, 110
Schwarz, 97, 108

W

Weierstrass, 106