

5. Συνάρτηση 1-1 - Αντίστροφη συνάρτηση

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)^2 + 1 = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 1)^3}$

γ. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) > f(1 - x^3)$ για κάθε $x > 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1$ με x πραγματικό

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)e^{x^2} = 1$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x) + f(x) - x - 1 = 0 \text{ για κάθε } x \text{ πραγματικό}$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

β. Να βρείτε την f^{-1}

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=x$

4. [2022_B] Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

B2. Αν $h(x) = (x-1)^2, x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h

2 Μαθηματικά Γ Λυκείου

5. [2020_B] Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

Ερωτήσεις Σ ή Λ

1. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε $x_1 \neq x_2$
2. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$
4. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$
5. Αν για κάθε y του συνόλου τιμών της f , η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x , τότε f είναι 1-1
6. Αν υπάρχει οριζόντια ευθεία που τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία τότε η f δεν είναι 1-1
7. Μία συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη
8. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι 1-1
9. Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1, είναι γνησίως μονότονη
10. Αν μία συνάρτηση δεν είναι 1-1 τότε δεν είναι γνησίως μονότονη
11. Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο
12. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A=(-a,a)$ είναι 1-1, τότε η f δεν είναι άρτια