

Εσωτερικό γινόμενο _ΙΕΠ_ 2ο ΘΕΜΑ

1. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα \vec{u} να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος \vec{v} του προηγούμενου ερωτήματος.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{BG} συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AG} είναι κάθετα.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3,-1)$

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1,-2)$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu}$.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{\nu} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3,4)$ και $\vec{\nu}$ είναι κάθετα.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{\nu}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

8. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AG} και να αποδείξετε ότι η γωνία \hat{A} είναι ορθή.

β) Αν M είναι το μέσο του BΓ, να βρείτε τα μέτρα των \overrightarrow{AM} και \overrightarrow{BG} .

γ) Να γραφεί το \overrightarrow{BG} ως γραμμικός συνδυασμός των \overrightarrow{AG} και \overrightarrow{AM} .

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία A(-1,2), B(β,0), Γ(0,γ). Τα διανύσματα \vec{u} , \overrightarrow{AB} είναι κάθετα και το διάνυσμα \vec{w} είναι παράλληλο στο διάνυσμα \overrightarrow{AG} .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{AB} και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

11. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$

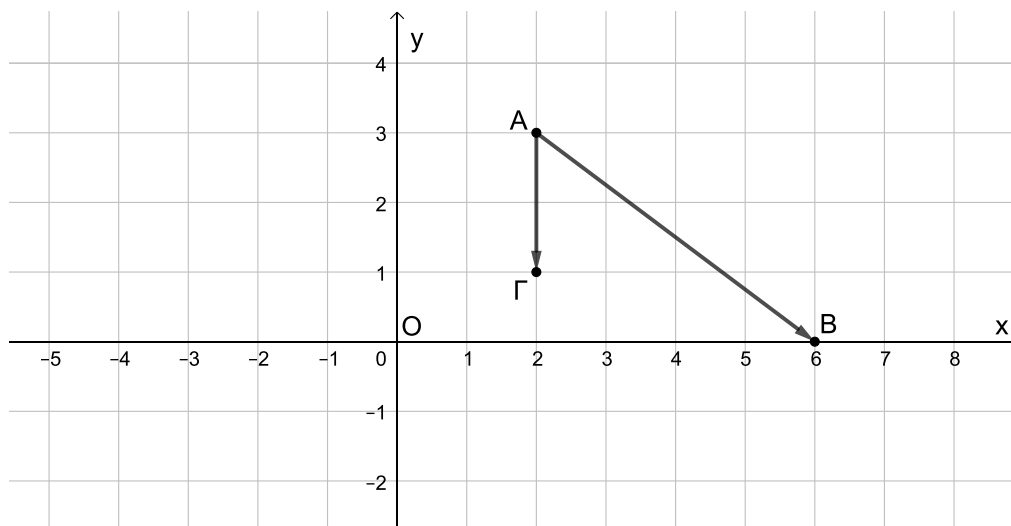
β) $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

12. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0, -2)$

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$



13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

14. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x'

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

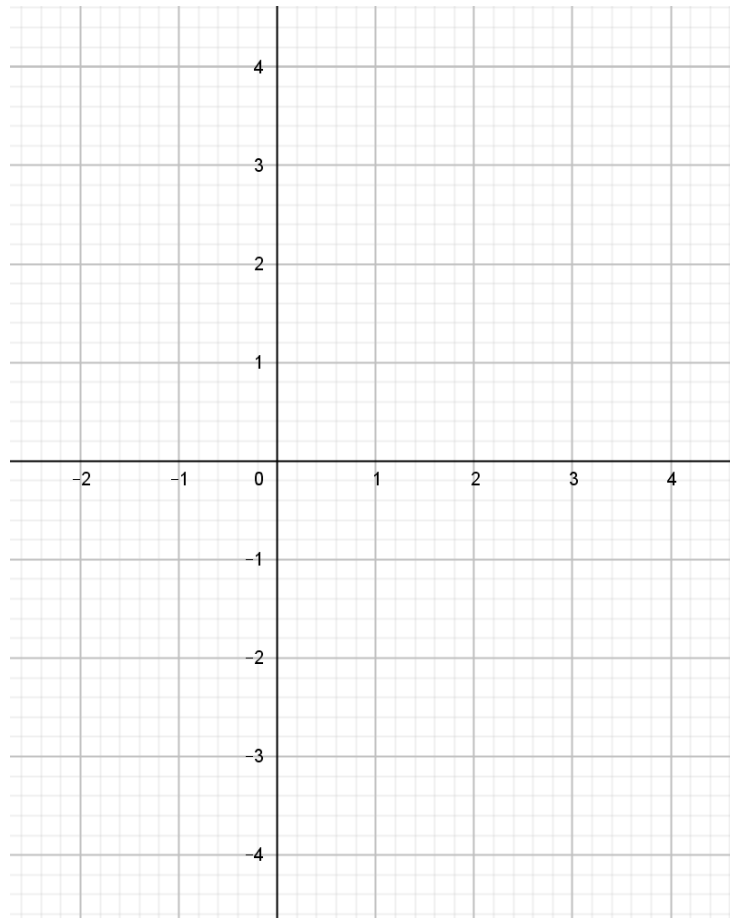
β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα \vec{v} και \vec{w} .



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

17. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 5), B(7, 8), \Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$

18. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $(\widehat{AB, A\Gamma})$

ii. $(\widehat{AM, B\Gamma})$

iii. $(\widehat{AM, \Gamma A})$

iv. $(\widehat{BM, \Gamma M})$

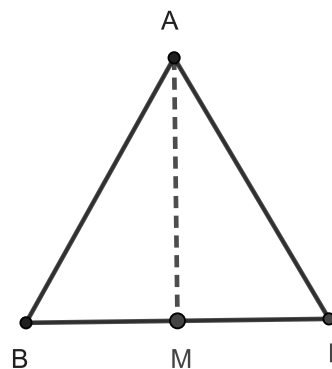
v. $(\widehat{\Gamma M, \Gamma B})$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$



19. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$

γ) Να βρείτε τη $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3), \vec{\beta} = (3, -1)$

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

21. Δίνονται τα διανύσματα $\overline{AB} = (2,1)$ και $\overline{AG} = (3,-1)$

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{BG} = (1,-2)$

β) Να αποδείξετε ότι $\overline{AB} \perp \overline{BG}$

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overline{AB}| = |\overline{BG}|$

22. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$